

שאלה 4 תיאוריה (8 נקודות)

חלק 1. אמידה מוטה.

נניח שזמנים בין-מופעים של אוטובוסים לתחנה הם בלתי-תלויים, שווי-התפלגות, ומתוארים על ידי משתנה מקרי (מ"מ) S . נניח שלמ"מ S יש תוחלת סופית $E(S)$ ושונות סופית $\sigma^2(S)$. בכתה הראינו שעבור נוסע המופיע באקראי לתחנה, הזמן S_e מרגע מופע הנוסע עד רגע מופע האוטובוס הבא הוא בעל תוחלת:

$$E(S_e) = \frac{1}{2}E(S) \cdot [1 + C^2(S)]$$

כאשר $C(S)$ הוא מקדם ההשתנות של המ"מ S . (בהקשרים של שירות, S_e נקרא גם "זמן שארית השירות").

4.1 הסבירו בקיצור את התופעה המתוארת על ידי הנוסחה ל- $E(S_e)$ (אותה כינינו "אמידה מוטה"), תוך שימוש במקרה פרטי (התפלגות מיוחדת) הממחיש אותה.

תשובה:

התופעה: דגימה של אינטרוול זמן ע"י בחירה של נקודת זמן בו, גורמת להטיה לטובת אינטרוולי זמן ארוכים.
 לדוגמא: כאשר האינטרוולים הם זמנים בין מופעים של אוטובוסים, המתפלגים מעריכית (exp), נניח עם ממוצע $\frac{1}{\mu}$,
 ממוצע S_e גם הוא $\frac{1}{\mu}$ (מיידיית, על סמך חוסר זיכרון); שיקול נאיבי היה צופה כי הממוצע של S_e הוא רק $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu}$.

חלק 2. $M_t | G | \infty$

במערכת שירות $M_t | G | \infty$, המופע הוא פואסוני לא הומוגני בזמן עם קצב מופע $\{\lambda(t), t \geq 0\}$, ומשכי השירות S הם בלתי-תלויים, שווי התפלגות, ובלתי תלויים במופע. נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t ויהי $R(t)$ ממוצע מספרם: $R(t) = EL(t)$.

ניתן להראות ש- $R(t)$ נתון על ידי כל אחד משני ההביטויים הבאים:

$$R(t) = E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

מטרת שני הסעיפים 4.2.1-4.2.2 להוכיח את הנוסחאות הנ"ל במקרה פרטי של משך שירות דטרמיניסטי.

$$(4.5 \text{ פרט}) \rightarrow \int_{-\infty}^t \lambda(u) P\{S > t-u\} du = \int_{-\infty}^t \lambda(u) [1 - G(t-u)] du$$

4.2.1 נניח שמשך השירות S הוא דטרמיניסטי $D : S=D$. הוכיחו את השוויון בין שתי ההצגות של $R(t)$ למקרה זה, ז"א:

$$\int_{t-D}^t \lambda(u) du = D \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

כאשר S_e הוא זמן שארית השירות המתאים ל- S דטרמיניסטי D .

תשובה:

$S_e \equiv U(0, D)$ מתפלג אחיד על $[0, D]$.

$$RHS = D \cdot E(\lambda(t - S_e)) = D \cdot \int_0^D \frac{1}{D} \cdot \lambda(t - x) dx = \int_0^D \lambda(t - x) dx \stackrel{u=t-x}{=} \int_{t-D}^t \lambda(u) du = LHS$$

4.2.2 הוכיחו שמתקיים:

$$R(t) = \int_{t-D}^t \lambda(u) du$$

$$\int_{t-D}^t \lambda(u) du = \int_0^t \lambda(u) du - \int_0^{t-D} \lambda(u) du \quad \text{רמז:}$$

תשובה:

נסמן $A(t)$ = מספר המופעים המצטבר עד זמן t . אזי $L(t) = A(t) - A(t-D)$, כי בזמן t נמצאים במערכת כל המופעים באינטרוול הזמן $(t-D, t]$.

בנוסף, $A(t) \stackrel{d}{=} \text{Poisson} \left(\int_0^t \lambda(u) du \right)$, ולכן

$$R(t) = E(L(t)) = \int_0^t \lambda(u) du - \int_0^{t-D} \lambda(u) du = \int_{t-D}^t \lambda(u) du.$$

חלק 3 . עומס מוצע.

בכתה הוסבר ש- $R(t)$ הנ"ל משמש כהגדרת העומס המוצע (Offered Load) למערכת שירות בזמן t , כאשר המופע אליה ומשכי השירות בה הם כמתואר בחלק 2 הנ"ל. (כזכור, $R(t)$ נמדד ב- Erlang).

4.3 הסבירו בקצרה מדוע אכן ההגדרה מתאימה. את הסברכם חלקו לשלושה חלקים:

4.3.1 המקרה הפרטי של מופע פואסוני בקצב קבוע ($\lambda(t) \equiv \lambda$): מהו $R(t)$ במקרה זה ומדוע הגדרתו מתאימה?

תשובה:

במקרה זה $R(t) = \lambda \cdot E(S) \equiv R$, אינו תלוי ב- t !

λ = מספר ממוצע של מופעים ליחידת זמן. כל מופע מביא עימו בממוצע $E(S)$ יחידות עבודה, הנמדדת ביחידות זמן-שירות. לכן R = כמות העבודה המגיעה למערכת ליחידת זמן, כאשר עבודה נמדדת ביחידות זמן שירות.

4.3.2 דוגמא של חדר מיון בבית חולים, שבו משך שהיה הממוצע 6 שעות: מדוע ההגדרה מסעיף 4.3.1 איננה מתאימה במקרה שכזה?

תשובה:

כאשר S מקבל ערכים יחסית גדולים, כמות העבודה בזמן t במערכת כוללת עבודה שהגיעה זמן רב יחסית לפני t , ואם קצב המופע משתנה, כמו בחדר מיון, קצב מופע העבודה לפני זמן רב יכול להיות שונה בהרבה מקצב המופע בזמן t .

4.3.3 המקרה הכללי: מדוע הגדרת $R(t)$ בחלק 2 הנ"ל אכן מתאימה?

תשובה:

בהמשך ל- 4.3.2, $R(t)$ = כמות העבודה הנמצאת במערכת בזמן t ; עבודה נמדדת ביחידות זמן שירות, או לחילופין מספר יחידות זמן-שרת הנדרשות לטיפול. לכן $R(t) = E(L(t))$.

הביטוי $R(t) = E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right)$ ממחיש יפה את העובדה שכמות העבודה בזמן t כוללת עבודה שהגיעה לפני כן, בקצב תלוי זמן $\lambda(t)$.

4.4 הסבירו כיצד ניתן להרחיב את המקרה הדטרמיניסטי ב- 4.2.1 הנ"ל למקרה של S כללי, דהיינו כיצד מוכיחים שאכן:

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

רמז: ניתן לקרב כל משתנה מקרי, בדיוק רב כרצונכם, על ידי משתנה מקרי המקבל מספר סופי של ערכים (מ"מ דיסקרטי).

תשובה:

נניח p_i w.p. $S = D_i$, מ"מ דיסקרטי.

על סמך עמידה מוחלטת, $\frac{p_i D_i}{E(S)}$ w.p. $S_e = U_i$, כאשר $U_i \stackrel{d}{=} U(0, D_i)$.

לכן,

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_i p_i \int_{t-D_i}^t \lambda(u) du \stackrel{\lambda_i = \lambda \cdot p_i}{=} \sum_i \int_{t-D_i}^t \lambda_i(u) du \stackrel{4.2.1}{=} \sum_i D_i E(\lambda_i(t - U_i)) = \\ &= E(S) \sum_i \frac{p_i D_i}{E(S)} E(\lambda(t - U_i)) = E(S) E(\lambda(t - S_e)) = RHS \end{aligned}$$

4.5 ניתן להראות (על ידי שינוי משתני אינטגרציה בלבד) שמתקיים:

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = \int_{-\infty}^t \lambda(u) [1 - G(t - u)] du$$

כאשר $G(\cdot)$ היא פונקציית ההתפלגות של משך השירות S . שימו לב ליחס:

$$1 - G(t - u) = P\{S > t - u\}$$

היעזרו בעובדות אלו כדי לחדד את הסברכם בסעיף 4.3.3, וז"א תנו הסבר מדויק יותר לעובדה ש- $R(t)$ הוא אכן

ההגדרה המתאימה לעומס המוצע (Offered Load) בזמן t .

תשובה:

1. $\lambda(u)$ = קצב המופע בזמן u . לכן $\lambda(u) du \approx$ ממוצע מספר המופעים במשך $(u, u + du)$.

2. $1 - G(t - u)$ = % המופעים בזמן u שעדיין נמצאים במערכת בזמן $t > u$.

3. $[\lambda(u) du] \cdot [1 - G(t - u)] \approx$ כמות העבודה במערכת בזמן t , שמקורה במופעים שהתרחשו במשך $(u, u + du)$.

4. $\int_{-\infty}^t \lambda(u) [1 - G(t - u)] du$ = כמות העבודה במערכת בזמן t , $t > 0$.