



מרצה : ד"ר גלית יום-טוב
מתרגל : נועה זיכלינסקי

תאריך הבחינה : 7.3.2016

מס' סטודנט _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד ב' – סמסטר חורף 2016

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון מדעי רגיל.
- המבחן כולל 27 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

תרגילי בית	מתוך 25 נקודות	שאלה 1	ניקוד:
בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים	מתוך 25 נקודות	שאלה 2	
יישום	מתוך 35 נקודות	שאלה 3	
תיאוריה	מתוך 15 נקודות	שאלה 4	

ס ה " כ _____ מתוך 100 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 - תרגילי בית (25 נקודות).

חלק 1 – "Pizza Anonymous" (15 נקודות).

בפיצרייה מסוימת ניתן לתאר את תהליך הגעת ההזמנות לפיצה באמצעות תהליך פואסון עם קצב של 12 הזמנות בשעה. בפיצרייה מועסק מכין פיצות בודד, אשר עלות העסקתו הינה \$10 לשעה, המכין בממוצע פיצה אחת כל 3 דקות. זמן הכנת הפיצות מפולג מעריכית. לאחר הכנת הפיצה, היא מוכנסת לתנור בעל קיבולת של 10 פיצות, וזמן אפייתה הוא 12 דקות בדיוק. בפיצרייה צוות של 6 שליחים וזמן משלוח (הלוך ושוב) מפולג מעריכית עם ממוצע של 10 דקות. זמן נסיעה לכיוון אחד שווה למחצית זמן נסיעה הלוך ושוב, ונניח לפשטות כי גם זמן זה מפולג מעריכית. עלות העסקת שליח הינה \$8 לשעה. זמני הכנת הפיצות וזמני המשלוח בלתי תלויים. הפיצרייה פועלת במדיניות לפיה היא מתחייבת לספק את הפיצה המוזמנת תוך 40 דקות מקבלת ההזמנה (תחילת הכנת הפיצה), ובמקרה של סטייה ממדיניות זו הלקוח מפוצה ע"י הוזלה של \$2 במחיר הפיצה.

1.1.1. (5 נקודות) שרטטו דיאגרמת זרימה לתהליך המתואר לעיל (Process Flow Diagram), החל מהגעת הזמנה ועד לשליחתה ללקוח. תארו כל תחנה באמצעות המודל המתמטי המתאים לה, תוך הסבר מתאים.

תשובה:
תרשים זרימה:

הזמנות פיצה
12/hour

תחנה 1:
הכנת פיצה
M/M/1

תחנה 2:
אפיית פיצה
M/D/10

תחנה 3:
משלוח פיצה
M/M/6

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{20} = 60\%$$
$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{12}{5 \cdot 10} = 24\%$$
$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{12}{6 \cdot 6} = 33.3\%$$

אנו מציגים את תהליך השירות כרשת תורים פשוטה בעלת 3 תחנות.

תחנה 1 : M|M|1

הסבר: נתון כי תהליך הגעת ההזמנות הוא תהליך פואסון, זמן הכנת הפיצות מפולג מעריכית ובתחנה מכין פיצה בודד.

תחנה 2 : M|D|10

הסבר: תהליך העזיבה מתחנה 1 (שהוא גם תהליך הכניסה לתחנה 2) הוא פואסוני. זמן האפייה הוא דטרמיניסטי והקיבולת הסטטית של התנור היא 10 פיצות.

תחנה 3 : M|M|6

הסבר: זמן השהיה בתחנה 2 הוא דטרמיניסטי ולכן תהליך העזיבה מתחנה זו הוא פואסוני (כתהליך הכניסה לתחנה). ולכן, תהליך הכניסה לתחנה 3 הוא פואסוני. נתון כי זמן השירות (נסיעה הלוך ושוב) מפולג מעריכית וכי בתחנה עובדים 6 שליחים.

1.1.2. (2 נקודות) איזו פעולה מהווה את צוואר הבקבוק בתהליך? הסבירו בדיוק ככל שתוכלו.

תשובה:

הקיבולת של תחנה 1 היא 20 פיצות לשעה, של תחנה 2 היא 50 פיצות לשעה ושל תחנה 3 היא 36 פיצות לשעה. קצב ההגעה לכל אחת מהתחנות זהה ולכן תחנה 1, שלה הקיבולת הנמוכה ביותר, היא צוואר הבקבוק.

1.1.3 (5 נקודות) חשבו את ההסתברות כי לקוח יפוצה עקב איחור בהגעת פיצה.

לצורך החישוב, היעזרו בחומר המופיע בעמודים הבאים, הכולל: נספח שהופיע בתרגיל הבית והעמודים הרלוונטיים שנלקחו מההרצאות. הסבירו כל שלב בחישוביכם. **אין צורך בחישובים מספריים - מספיק שימוש בנוסחאות הרלוונטיות והצבת הפרמטרים בהן.**

תשובה:

זמן שהיה בתחנה 2 הוא 12 דקות.

נסמן:

X = זמן שהיה בתחנה 1 (תור $M|M|1$)

$$X \sim \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{\mu(1-\rho_1)} = \frac{1}{8} \text{ hour}\right) = \exp(8)$$

Y = זמן המתנה בתור לתחנה 3 (תור $M|M|6$)

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{w.p. } 1 - E_{2,N} \\ \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{n\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho_3} \text{ hour}\right) = \exp(24) & \text{w.p. } E_{2,N} \end{cases}$$

Z = זמן משלוח (זמן שהיה בתחנה 3)

$$Z \sim \exp\left(\text{mean} = 5 \text{ minutes} = \frac{1}{12} \text{ hour}\right) = \exp(12)$$

(הנצילות בתחנה 2 נמוכה ולכן נניח כי אין תור לתחנה זו, כלומר פיצה מוכנסת לתנור מיד בתום הכנתה בתחנה 1).

X, Y, Z ב"ת.

$$\begin{aligned} P(X + 12 + Y + Z > 40) &= P(X + Y + Z > 28) = \\ &= P(\underbrace{X + Z}_{\text{sum of two exponential random variables}} > 28) * P(Y = 0) + P(\underbrace{X + Y + Z}_{\text{sum of three exponential random variables, first scenario}} > 28 | Y > 0) * P(Y > 0) \\ &= 0.064 * 0.982 + 0.093 * 0.018 = 0.065 \end{aligned}$$

1.1.4. (3 נקודות) ידוע כי ההסתברות לתשלום קנס על איחור כאשר מעסיקים מכין פיצה אחד ושלושה שליחים היא 16%. האם רמת איוש אחרת תביא להורדת העלויות הכוללות?

תשובה:

נבדוק מהי עלות הקנס הממוצעת לשעה עבור איוש של מכין פיצה אחד ושלושה שליחים.

$$\text{Arrival Rate} \cdot P\{\text{violate guarantee}\} \cdot 2\$ = 3.83\$ \text{ per hour.}$$

עלות זו נמוכה יותר מעלות כל אחד מהעובדים לשעה ולכן לא כדאי להוסיף עובדים.

Sum of two exponential random variables.

Assume that $X \sim \exp(\lambda_1)$, $Y \sim \exp(\lambda_2)$, X and Y are independent and $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Then straightforward calculations provide us with the following cumulative distribution function of $X + Y$:

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 x}.$$

Sum of three exponential random variables.

Assume that $X \sim \exp(\lambda_1)$, $Y \sim \exp(\lambda_2)$, $Z \sim \exp(\lambda_3)$, X , Y and Z are independent and $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Then the cumulative distribution function of $X + Y + Z$ is given by:

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 x} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{-\lambda_3 x}.$$

M/M/1: Sojourn Time

Sojourn time is **exponentially** distributed:

$$W \stackrel{d}{=} \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu} \left[1 + \frac{\rho}{1 - \rho}\right]\right).$$

Proof: By PASTA and the memoryless-property of Exponentials,

$$W \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^N X_i, \quad X_i \sim \exp(\mu) \text{ i.i.d.},$$

$N \triangleq L + 1 \stackrel{d}{=} \text{Geom}(1 - \rho)$ (from 1);

N and $\{X_i\}$ are all independent.

Conclude by recalling: Geometric sum of iid Exponentials is Exponentially distributed. (The parameter is calculated via Wald.)

Aside: The latter property is essentially Poisson-Splitting. A self-contained proof can be give via *Moment generating functions*:

$$\begin{aligned} \phi_W(t) &\triangleq \mathbb{E}[\exp\{tW\}] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{t \cdot \sum_{i=1}^N X_i\right\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left\{t \cdot \sum_{i=1}^N X_i\right\} \middle| N\right]\right] \\ &\quad (X_i \text{ independent with } \mathbb{E}[\exp\{tX_i\}] = \frac{\mu}{\mu - t}) \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\mu}{\mu - t}\right)^N\right] = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \rho) \rho^{k-1} \left(\frac{\mu}{\mu - t}\right)^k \\ &= \frac{\mu(1 - \rho)}{\mu - t} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu\rho}{\mu - t}\right)^k = \frac{\mu(1 - \rho)}{\mu(1 - \rho) - t} \\ &= \phi_{\exp(\mu(1 - \rho))}(t). \end{aligned}$$

M/M/n Queue: Properties

Erlang-C Formula (1917) for the Delay probability:

$$P\{W_q > 0\} \triangleq E_{2,n} = \sum_{i \geq n} \pi_i = \frac{R^n}{n!} \frac{1}{1 - \rho} \cdot \pi_0.$$

Erlang-C computation: via recursion, see Erlang-B below.

Erlang-C approximations: important later in course.

Number-in-queue:

$$P\{L_q = i\} = E_{2,n} \cdot (1 - \rho)\rho^i, \quad i > 0,$$

or

$$L_q = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Geom}_{\geq 0}(1 - \rho) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Waiting time distribution:

$$\frac{W_q}{1/\mu} = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Exp}\left(\text{mean} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Compare with M/M/1!

Departure process: Poisson(λ) in steady-state.

Proof via reversibility, as with M/M/1.

חלק 2 – אמידת סבלנות (10 נקודות)

להלן ארבעה מודלים לתיאור סבלנות של לקוחות :

1. מודל אקספוננציאלי סטנדרטי.

הזמן שלקוח מוכן להמתין הוא מהתפלגות אקספוננציאלית עם פרמטר θ .

2. מודל אקספוננציאלי עם נטישות מיידיות.

לקוח המתקשר ומסתבר לו שהוא נדרש להמתין בתור, נוטש באופן מיידי בהסתברות p (באופן מעשי זמן הנטישה ייקח מספר שניות). במידה והלקוח לא נוטש מיידי, סבלנותו תהיה אקספוננציאלית עם פרמטר θ .

3. סבלנות בת שתי פאזות.

סבלנות $X + Y^d$. כאשר X הינו משתנה מקרי (או קבוע) המתאים לזמן בו הלקוח "מרגיש בסדר" ולא חושב על נטישה, המ"מ Y מתאים לזמן בו הלקוח מתחיל להיות קצר רוח, והתפלגות Y הינה אקספוננציאלית עם פרמטר θ . לבסוף, X ו Y בלתי תלויים.

4. התנהגות אדפטיבית.

סבלנות הלקוחות משתנה במשך שעות היום (לדוגמא בשעות אשר הלקוחות מצפים להמתין זמן רב תהיה להם סבלנות ארוכה).

עליכם למדל את סבלנותם של לקוחות ממענה קולי טלפוני מסוים. כדי לבחור מודל מתאים לסוגים שונים של לקוחות, שורטטו ארבעת הגרפים הבאים :

- כל גרף מייצג סוג לקוחות מסוים (PS, IN, NE, NW).
- כל גרף מתאר פיזור נקודות, כאשר כל נקודה מחושבת כממוצע במשך רבע שעה.
- ערכי נקודה בגרף הם : ממוצע זמן ההמתנה של הלקוחות שהמתינו בתור, ברבע שעה מסוימת, מול אחוז הנוטשים של לקוחות אשר המתינו בתור באותה רבע שעה.
- בכל גרף משורטט קו ישר אשר נוצר על ידי רגרסיה ליניארית בין שני המשתנים.

Figure 1 NE customers.
 $P\{\text{Abandon} \mid \text{Wait} > 0\}$ vs. $E[\text{Wait} \mid \text{Wait} > 0]$.

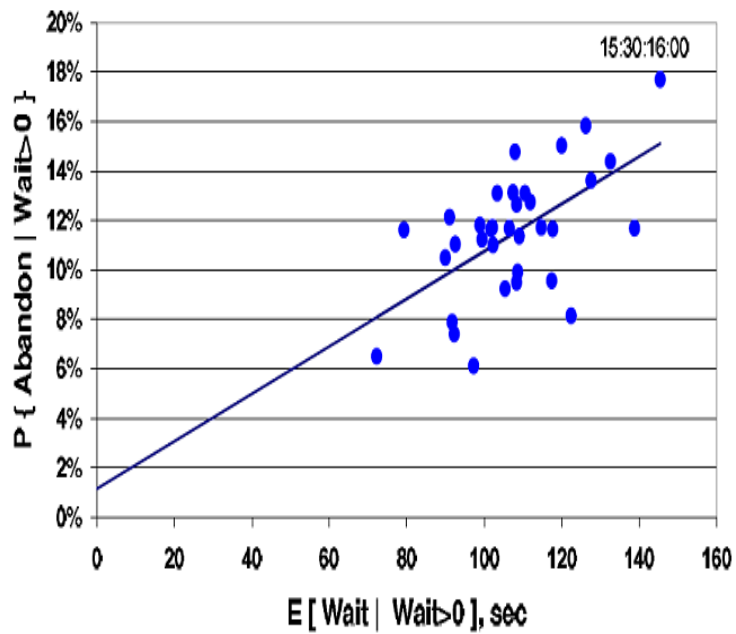


Figure 2 NW customers.
 $P\{\text{Abandon} \mid \text{Wait} > 0\}$ vs. $E[\text{Wait} \mid \text{Wait} > 0]$.

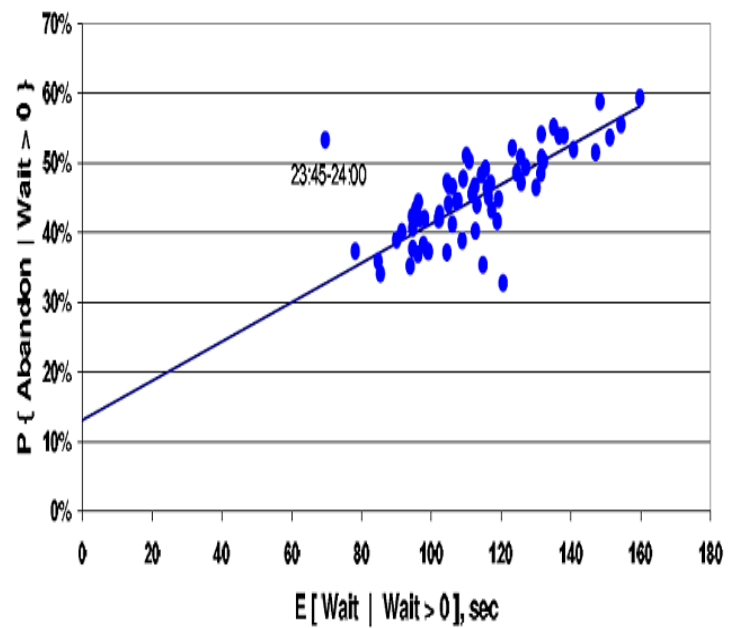


Figure 3 PS customers.
 $P\{\text{Abandon} \mid \text{Wait} > 0\}$ vs. $E[\text{Wait} \mid \text{Wait} > 0]$.

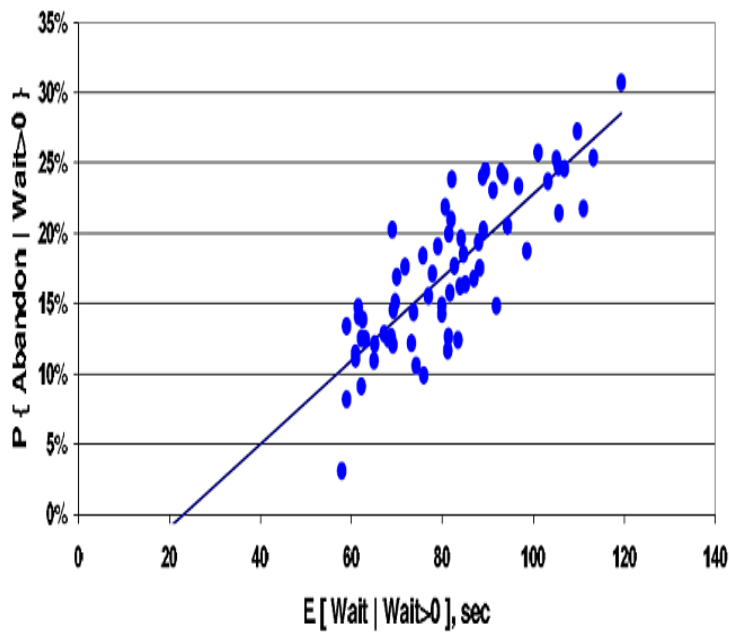
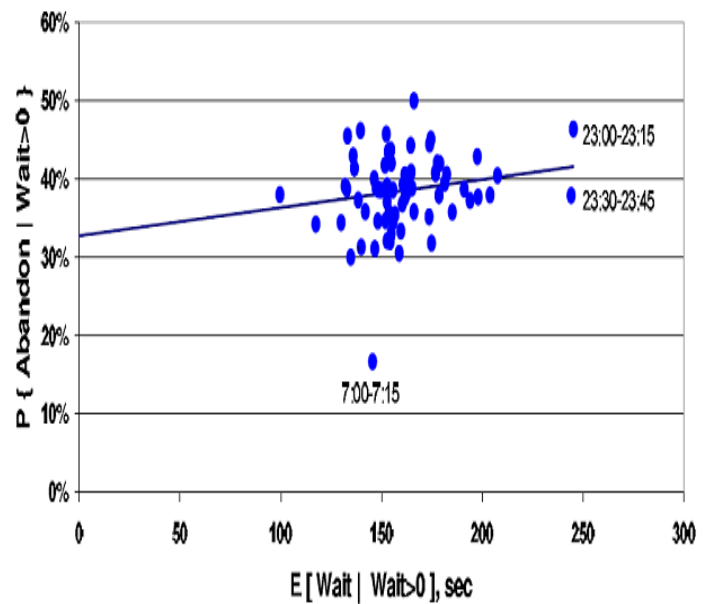


Figure 4 IN customers.
 $P\{\text{Abandon} \mid \text{Wait} > 0\}$ vs. $E[\text{Wait} \mid \text{Wait} > 0]$.



על סמך הגרפים הנ"ל, התאימו מודל סבלנות מתאים (מארבעת המודלים המוצגים בשאלה) לכל אחד מארבעת סוגי הלקוחות. הסבירו את תשובתכם בכל סעיף.

1.2.1 (2 נקודות) לקוחות NE

תשובה:

לקוחות NE

המודל המתאים הוא מודל אקספוננציאלי סטנדרטי. מאחר ובמודל אקספוננציאלי מתקיים הקשר $P(\text{Abandon} | \text{Wait} > 0) = \theta \cdot E(\text{Wait} | \text{Wait} > 0)$, עבור גרף בו קיים קשר ליניארי העובר בראשית הצירים נבחר את המודל האקספוננציאלי הסטנדרטי (הגרף "כמעט" עובר דרך הראשית).

1.2.2 (2 נקודות) לקוחות NW

תשובה:

לקוחות NW

מאחר וישנה נקודת חיתוך עם ציר Y בערך ב- $0.12 \approx P(\text{Abandon} | \text{Wait} > 0)$, המודל המתאים יהיה מודל אקספוננציאלי עם נטישות מיידיות, בו ישנה הסתברות חיובית לנטוש ללא זמן המתנה משמעותי ולאחר מכן אנו מקבלים קו ישר, כלומר לקוחות אשר החליטו לא לנטוש ישר הם בעלי סבלנות אקספוננציאלית.

1.2.3 (2 נקודות) לקוחות PS

תשובה:

לקוחות PS

מאחר והחיתוך עם ציר ה- X הינו בערך ב- $21\text{sec} \approx E(\text{Wait} | \text{Wait} > 0)$, אנו נבחר את מודל שתי הפאזות כאשר X הינו מ"מ דטרמיניסטי השווה ל 21 שניות ולאחר מכן אנו עוברים לפאזה השנייה Y אשר יוצרת קו ישר ולכן מתאימה להתפלגות אקספוננציאלית.

תשובה:

לקוחות IN

מאחר ואנו מקבלים קו ישר בעל שיפוע קטן מאד אנו למדים כי ההסתברות לנטישה של לקוחות אלו כמעט ולא תלויה בזמן ההמתנה שלהם ולכן המודל המתאים ביותר יהיה המודל האדפטיבי.

1.2.5. (2 נקודות) הסבירו בקצרה מדוע הנתונים שנבחרו עבור מידול הסבלנות (אותם נתונים אשר מופיעים בארבעת הגרפים), הם נתונים המדברים רק על לקוחות שהמתינו בתור, ולא על כלל הלקוחות. (במילים אחרות, מדוע לא נכללו הלקוחות ששורתו מיידית?)

תשובה:

לקוחות אשר לא המתינו בתור לא תורמים מידע לגבי סבלנותם ולכן אין צורך להשתמש בהם בשביל לאמוד סבלנות.

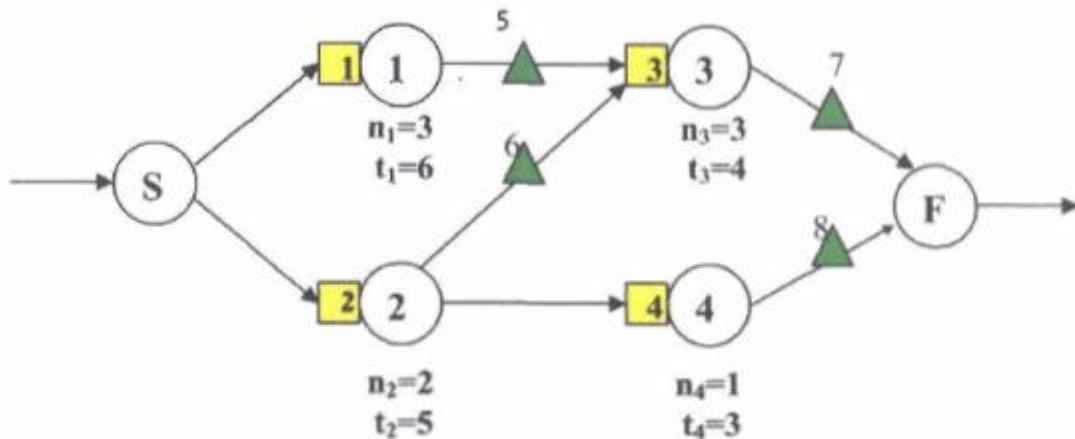
שאלה 2 – בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים (25 נקודות).

חלק 2. רשתות דינמיות סטוכסטיות (15 נקודות)

נתונה רשת PERT/CPM דינמית סטוכסטית, כמתואר בגרף 1 וכפי שנלמד בכיתה: t_i הוא ממוצע זמן

השירות בתחנה i , ו- n_i הוא מספר השרתים בתחנה i , $i = 1, 2, 3, 4$.

פרויקטים חדשים מופיעים למערכת לפי תהליך פואסון עם ממוצע זמן בין מופעי של 3.5 ימים. נניח שהרשת במצב יציב.



2.1.1. (2 נקודות) לרשת 8 תורים הממוספרים מ-1 עד 8. מיהם התורים הנובעים מפערי סינכרון ומי הנובעים ממשאבים מוגבלים?

תשובה:

תורי סינכרון: 5,6,7,8

תורי משאבים: 1,2,3,4

2.1.2. (2 נקודות) מהי נצילות כל אחד משלושת השרתים המטפל בפעילות 3? הסבירו במשפט או שניים את תשובתכם.

תשובה:

נצילות השרתים: $4/(3.5*3)=0.3809$

הסבר: מכיוון שהרשת נמצאת במצב יציב, קצב המופע לכל תחנה הוא $1/3.5$ פעילויות (פרויקטים) ליום. כל פרויקט דורש 4 ימי עבודה של פעילות 3 והעבודה מתחלקת בין 3 שרתים.

2.1.3. (3 נקודות) מהו המספר המינימלי של שרתים הנדרשים לטפל בפעילות 3 כדי שנצילות כל אחד לא תעלה על 33%?

תשובה:

מספר מינימלי: $0.33 \leq \lceil 4 / (3.5 * n_3) \rceil$. התוצאה היא 4 שרתים.

2.1.4. (4 נקודות) נסמן ב- T_{DS} את משך ביצוע פרויקט שמגיע למערכת במצב יציב. הסבירו במדויק ככל שתוכלו, אבל בשני משפטים לכל היותר, מדוע $ET_{DS} < 10$.

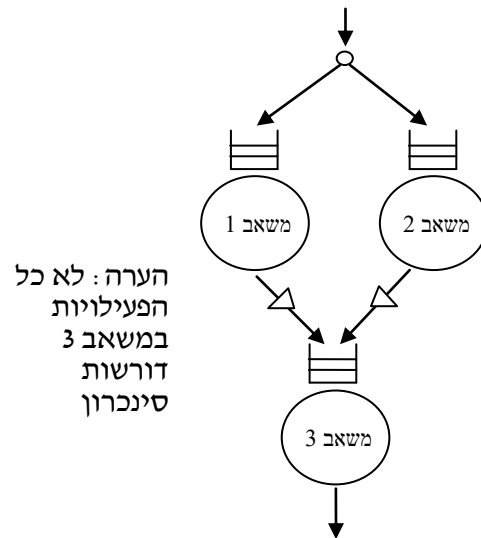
תשובה:

ההסבר כולל שני חלקים. מכיוון שהרשת סטוכסטית ועל סמך מבנה הקדימויות, אנחנו כבר יודעים ש- $ET_{DS} \leq 10$ (ראו הוכחה בהמשך). בנוסף, הדינאמיות של המערכת (ריבוי הפרויקטים) גורמת לתורי משאבים שמאריכים עוד יותר את משך ביצוע הפרויקט.

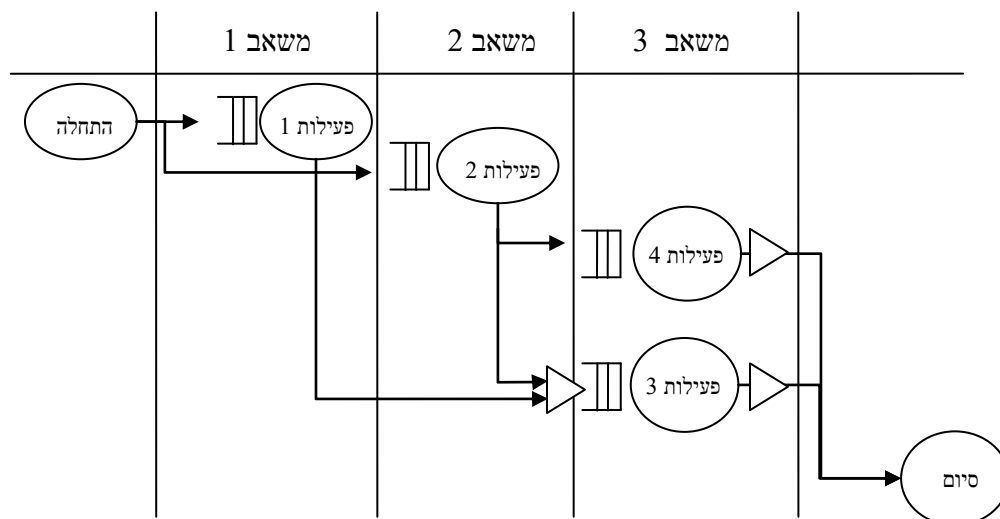
כאשר j מונה את המסלולים האפשריים ברשת, $E\left(\max_j \sum_{i \in j} T_i\right) \geq \max_j E\left(\sum_{i \in j} T_i\right) = \max_j \sum_{i \in j} ET_i = 10$ (אי השוויון הוכח בכיתה).

2.1.5. (4 נקודות) מנהל החברה הכשיר את השרתים שמבצעים את פעילות 3 ו-4 לבצע את שתי הפעילויות. ציירו תרשים משאבים ותרשים משולב משאבים ופעילויות לפרויקט תחת תרחיש חדש זה.

תרשים משאבים :



תרשים משולב פעילויות-משאבים :



חלק 2. חוק Little (10 נקודות)

חברת MBPF Finance Inc. מבצעת הערכת בקשות להלוואות ולאחר מכן מאשרת או דוחה את הבקשות. החברה מעוניינת להעריך שינויים ברמת השירות הנובעים משינוי בתהליך הערכת הבקשות. מופע הבקשות להלוואות הינו בקצב של 1000 בקשות בחודש. עד לינואר 1998 (תחת "תהליך 1"), כל בקשה עוברת את אותו התהליך. נמצא כי בממוצע קיימות 500 בקשות בתהליך ההערכה, ובממוצע 20% מהבקשות מאושרות בתום התהליך. מכיוון שקיימים סוגי בקשות שונים וכי לא סביר להתייחס לכל הבקשות באותו אופן, הוחלט לבצע שינוי בתהליך העבודה. לפי "תהליך 2" כל הבקשות עוברות בדיקה ראשונית שבסופה תסווג כל בקשה לאחת מ-3 הקבוצות הבאות:

A – בקשות שעבורן קיים סיכוי גבוה לאישור ועבורן נדרשת בדיקה קצרה נוספת.

B – בקשות עבורן נדרשת בדיקה מפורטת.

C – בקשות נדחות לאחר בדיקה ראשונית.

נמצא כי בממוצע 25% מכלל הבקשות הן מסוג A, 25% מסוג B ו- 50% מסוג C. בממוצע, 70% מהבקשות מסוג A ו- 10% מהבקשות מסוג B מאושרות בתום הבדיקה הנוספת. מספר הבקשות הממוצע בתהליך הינו: 200 בקשות בבדיקה הראשונית, 25 בבדיקה לבקשות מסוג A ו- 150 בבדיקה לבקשות מסוג B.

2.2.1. (2 נקודות) חשבו את ממוצע זמן בדיקת בקשה לפי תהליך 1.

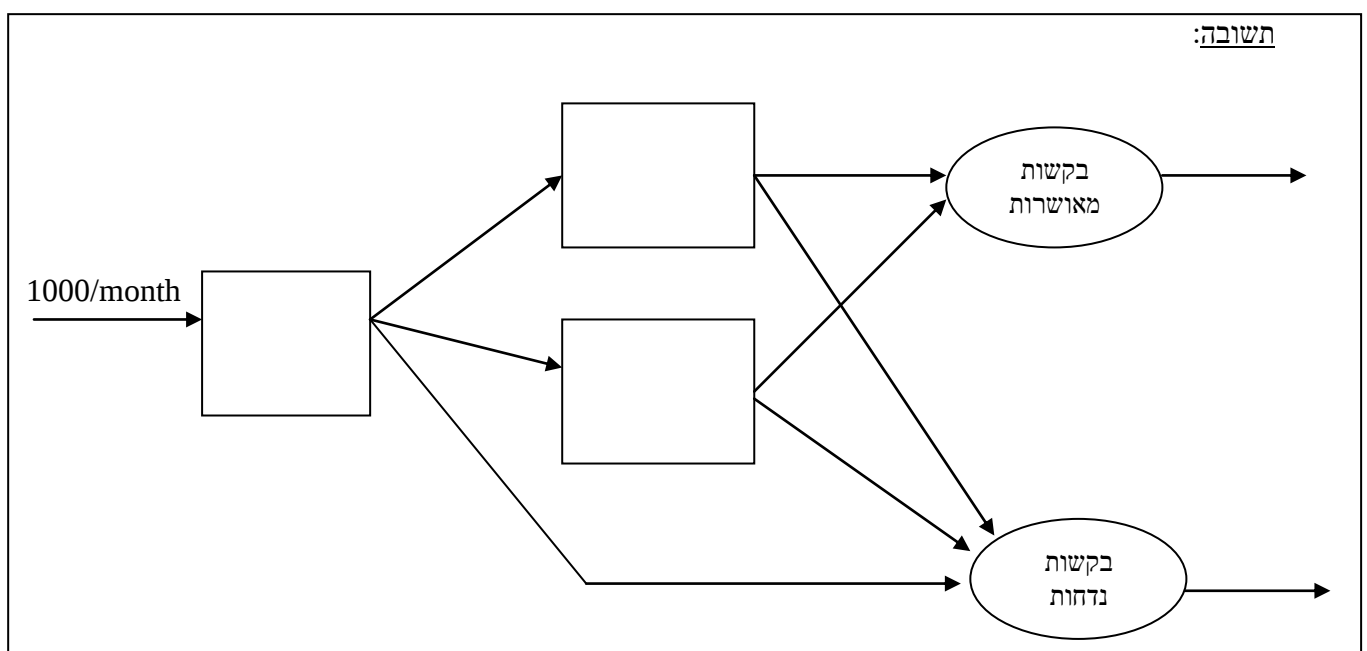
תשובה:

לפי חוק Little,

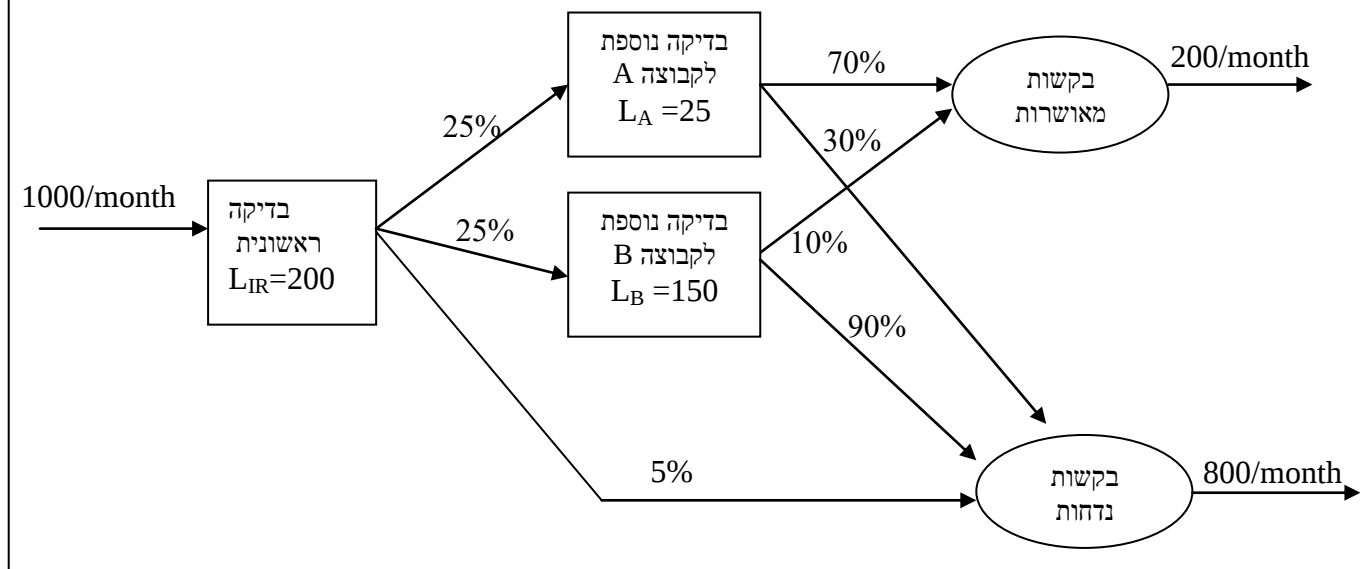
$$W_1 = \frac{500}{1000} \text{ month} = 15 \text{ days}$$

2.2.2. (2 נקודות) השלימו את התרשים המתאר את תהליך 2 ע"י תוספת שמות הפעילויות, אחוזי מעבר, קצבי מעבר וממוצע מספר בקשות בתחנה.

תשובה:



תשובה :



2.2.3. (2 נקודות) חשבו את ממוצע זמן בדיקת בקשה לפי תהליך 2.

תשובה :

דרך 1 :

$$W_2 = \frac{375}{1000} \text{ month} = 11.25 \text{ days}$$

דרך 2 :

$$W_{IR} = \frac{200}{1000} \text{ month} = 6 \text{ days}; \quad W_A = \frac{25}{1000 \times 0.25} \text{ month} = 3 \text{ days};$$

$$W_B = \frac{150}{1000 \times 0.25} \text{ month} = 18 \text{ days};$$

$$\Rightarrow W_2 = 0.5 \cdot 6 + 0.25 \cdot (6 + 3) + 0.25 \cdot (6 + 18) = 11.25 \text{ days}$$

כלומר, שיפור של 4 ימים בממוצע זמן השירות.

2.2.4. (2 נקודות) האם זמן השירות הממוצע עבור בקשות שאושרו השתפר במעבר מתהליך 1 לתהליך 2? הציגו את חישוביכם.

תשובה:

דרך 1: $\frac{25\% \times 70\%}{20\%} = \frac{7}{8}$ מהבקשות שאושרו הן מסוג A, ו- $\frac{1}{8}$ מסוג B. לכן,

$$W_{Approved} = \frac{7}{8} \cdot 9 + \frac{1}{8} \cdot 24 = 10.875 \text{ days}$$

דרך 2:

$$L_{Approved} = L_{IR, App} + L_{A, App} + L_{B, App} = 200 \cdot 20\% + 25 \cdot 70\% + 150 \cdot 10\% = 72.5$$

$$\lambda_{Approved} = 1000 \cdot 20\% = 200 \text{ per month}$$

$$\Rightarrow W_{Approved} = \frac{72.5}{200} \text{ month} = 10.875 \text{ days}$$

← זמן העיבוד עבור הבקשות שאושרו השתפר.

2.2.5. (2 נקודות) הניחו כי 8 סוכנים עובדים בתחנת הבדיקה הנוספת לבקשות מסוג B וכי עומס העבודה מתחלק ביניהם באופן שווה. כל סוכן יכול לשרת 40 בקשות לחודש. בנוסף, בממוצע, 20% מהבקשות שמסווגות לאחר הבדיקה הראשונית לקבוצה A דורשות למעשה בדיקה מפורטת יותר, ונשלחות לבדיקה עבור קבוצה B (לאחר בדיקתן בקבוצה A). מהי כעת נצילות סוכן בתחנת הבדיקה מסוג B? הציגו את חישוביכם.

תשובה:

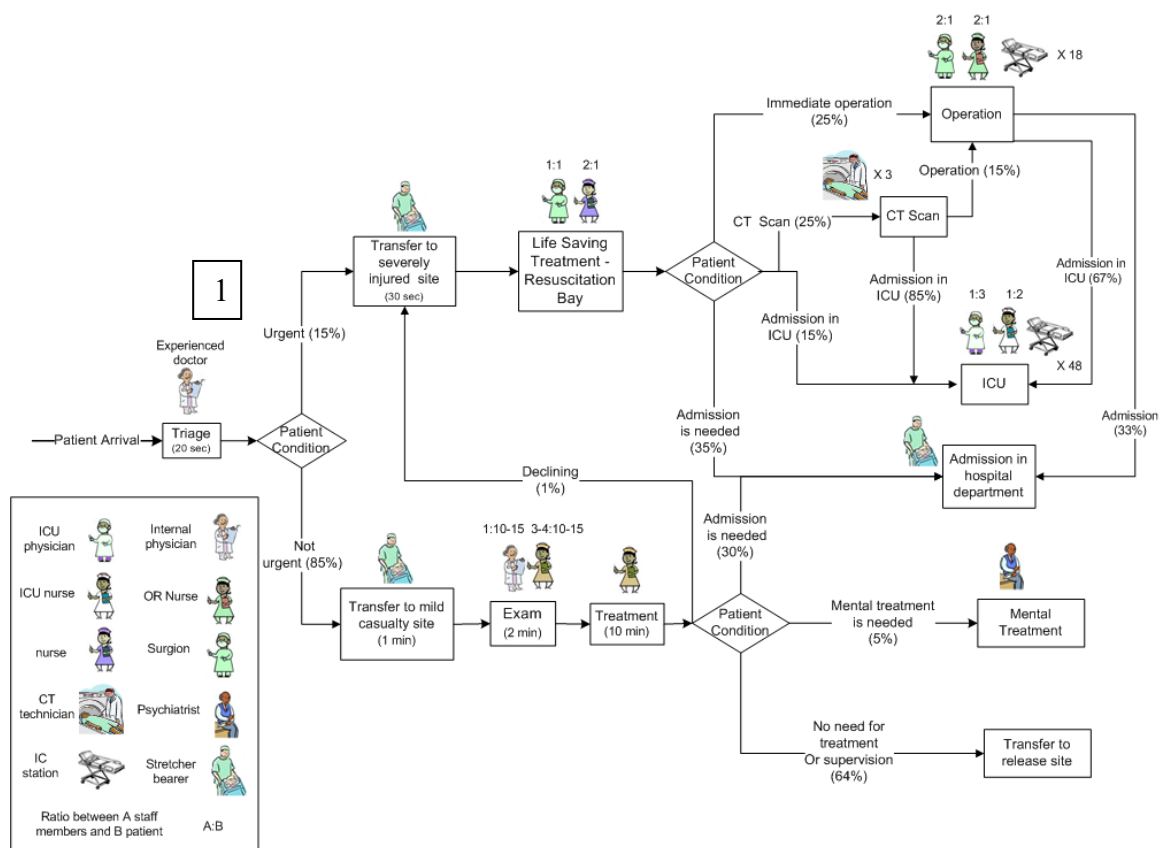
$$\rho_B = \frac{250 + 250 \cdot 20\%}{8 \cdot 4} = 94\%$$

שאלה 3 – יישום (35 נקודות)

שאלה זו עוסקת בניהול אירוע רב נפגעי (אר"ן) בבית חולים. אר"ן הינו אירוע בו הביקוש לטיפול רפואי עולה על יכולת המערכת הרפואית לספק אותו. קצב ההגעה לבית החולים באר"ן יכול להיות פתאומי בגל אחד או יותר של פצועים כמו למשל בפיגוע גדול או תאונת רכבת, אך יכול להיות גם הדרגתי עולה כמו למשל בהתפרצות של מחלה מדבקת.



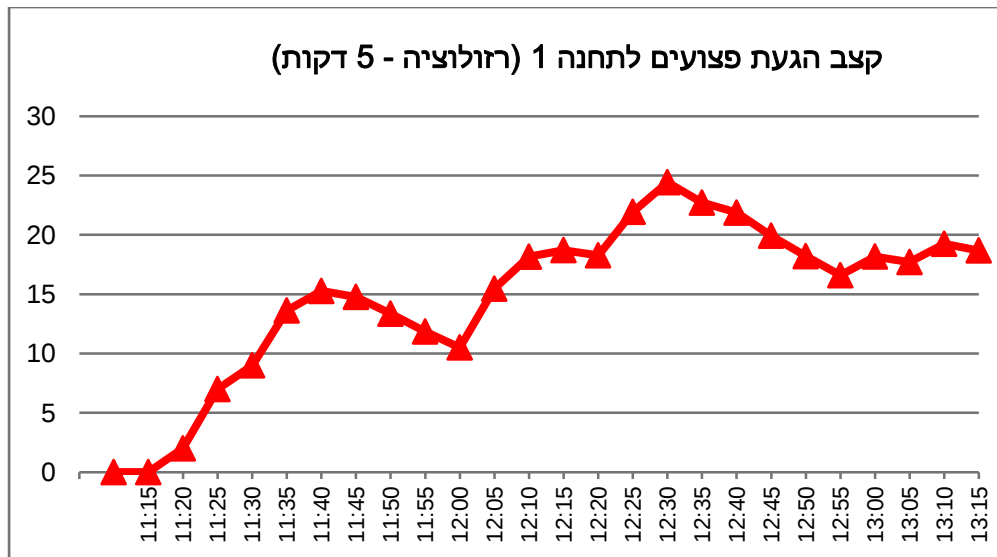
תרשים הפעילויות בבית החולים בזמן אר"ן מתואר בתרשים הבא. אין צורך בשלב זה להבין את כל השלבים בתהליך, הפעילויות הרלוונטיות לניתוח יפורטו בהמשך.



חלק 1 – קצב הגעה – 15 נקודות

נתמקד כעת בתהליך הטריאג' במסומן בתרשים כתחנה מספר 1. בתהליך זה, מבצע רופא בכיר ומנוסה אבחון קצר (כ- 20 שניות) של כל פצוע המגיע לבית החולים. בתום האבחון מחליט הרופא אם מדובר בפצוע מידי או ממתין. חולה מידי הוא חולה שנשקפת סכנה מיידית לחייו אם לא יקבל טיפול רפואי ועל כן הוא מועבר ישירות לחדר הלם. חולה ממתין הוא חולה שזקוק לטיפול רפואי, אך לא נשקפת סכנה מיידית לחייו אם לא יטופל, ועל כן הוא מועבר לאגף ממתנים.

הגרף הבא מראה קצב הגעה של פצועים לתחנה 1 במהלך תרגיל אר"ן שהתקיים לאחרונה בבית חולים רמב"ם.



3.1.1. (2 נקודות) תארו בקצרה את קצב ההגעה לתחנה 1 בתרגיל.

תשובה:

קצב ההגעה לבית החולים מתחיל לעלות בשעה 11:15 שהוא כנראה זמן תחילת התרגיל. הפצועים בתרגיל מגיעים בשני גלים (פיקים). הגל הראשון מתרחש בין 11:30-12:00. בשיאו מגיע קצב ההגעה ל- 5 דקות ל- 15 פצועים. הגל השני מתרחש בין 12:00-12:55. בשיאו מגיע קצב ההגעה ל- 25 פצועים שמגיעים ב- 5 דקות.

בשעה 13:15 קצב ההגעה הוא עדיין גבוה (כ- 17 פצועים ב- 5 דקות), אך הוא מופסק לאחר מכן.

3.1.2. (2 נקודות) האם סביר שתהליך ההגעה הוא תהליך פואסון הומוגני בזמן? הסבירו.

תשובה:

קצב ההגעה בבירור אינו קבוע בזמן על כן, לא יתכן שתהליך ההגעות הוא פואסון הומוגני בזמן.

3.1.3. (3 נקודות) כיצד הייתם בודקים סטטיסטית את ההשערה שהתהליך הוא פואסוני הומוגני בזמן?

תשובה:

יש לחשב את הזמנים הבין-מופעיים, ולבדוק האם הם מהתפלגות מעריכית עם פרמטר קבוע. בדיקה ראשונית ע"י חישוב CV ובדיקה האם הוא קרוב ל-1. בדיקה שניה היא בדיקה ויזואלית של היסטוגרמת נתוני הזמנים הבין מופעיים. בדיקה נוספת בעזרת QQPlot: ממיינים את נתוני הזמנים הבין-מופעיים, ומחשבים $\hat{F}_N(x)$ ע"י חישוב ממוצע כמות הנתונים הקטנים מ- x (ע"י $\hat{F}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{\{X_i \leq x\}}$). עושים להם טרנספורמציה ע"י הנוסחה $-\ln(1-\hat{F}(x))$ ומשווים אותם לקו ישר. שיפוע הגרף הוא λ .

3.1.4. (1 נקודה) האם סביר שתהליך ההגעה הוא תהליך פואסון לא הומוגני בזמן?

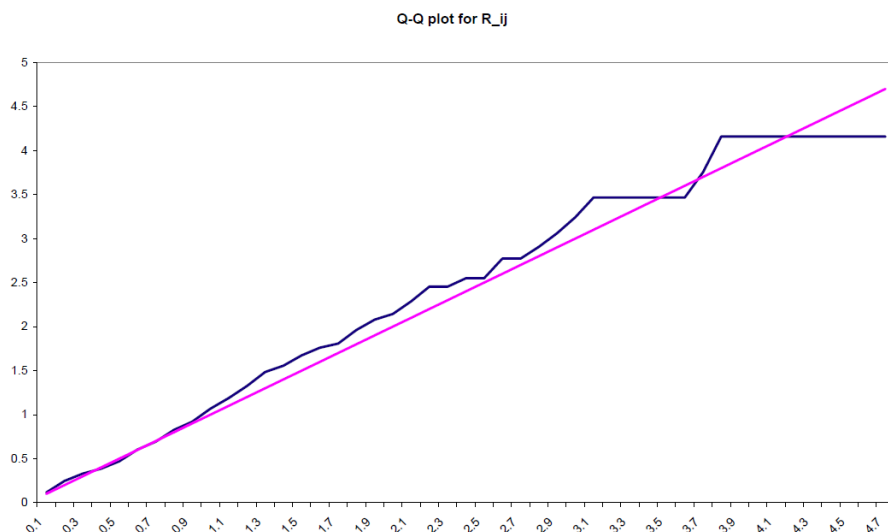
תשובה:

כן, יתכן שתהליך ההגעות הוא פואסוני לא הומוגני בזמן.

3.1.5. (4 נקודות) כדי לבדוק את ההשערה שהתהליך הוא פואסוני לא הומוגני בזמן, הוצגה בתרגול שיטה

המבוססת על הנוסחה הבאה: $R_{ij} = (J(i)+1-j) \left(-\ln \left(\frac{L-T_{ij}}{L-T_{i,j-1}} \right) \right)$. נוסחה זו מהווה קלט לתרשים

QQ-Plot. להלן תרשים QQ-Plot שהתקבל:



מה בודקים בעזרת השיטה ובעזרת תרשים ה-QQPlot הנ"ל? הסבירו בקצרה. האם סביר על סמך התרשים שהתהליך הוא אכן לא הומוגני בזמן?

תשובה:

אם התהליך המקורי הוא פואסון (לא הומוגני בזמן), עם קצבים קבועים למקוטעין (על פני אינטרוולים באורך L) אזי, נוסחת הטרנספורמציה, ממירה את הזמנים הבין-מופעיים לזמנים מהתפלגות מעריכית עם קצב 1. ולכן, ב-QQPlot בודקים התאמה של ה- R_{ij} לקו ישר בשיפוע 45° .
על סמך התרשים ניתן לראות שיש התאמה טובה לקו ישר ועל כן ניתן להסיק שתהליך ההגעה הוא פואסוני לא הומוגני בזמן.

3.1.6. (3 נקודות) אם קצב ההגעה הממוצע במהלך התרגיל היה 15 פצועים ב-5 דקות. מהי כמות האנשים הממוצעת שהיתה בטריאג' במהלך התרגיל? הנח שההגעות הפסיקו בשעה 13:15 ובשעה 14:00 לא היו יותר פצועים בתחנת הטריאג'.

תשובה:

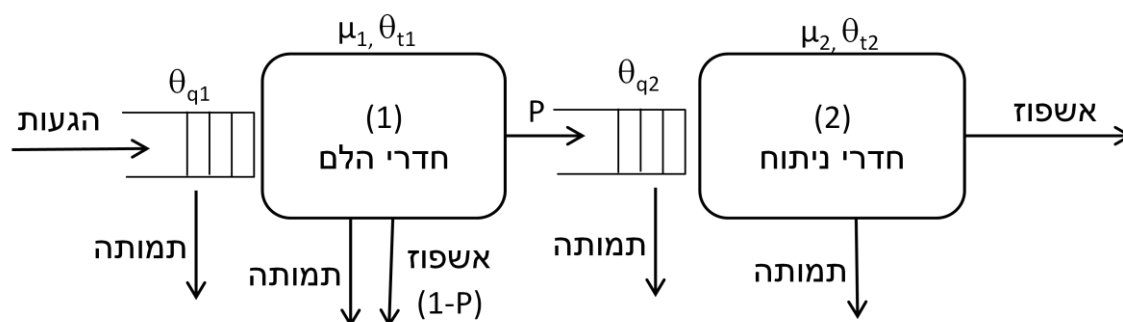
על פי חוק ליטל: מערכת הטריאג' היתה ריקה בהתחלת התרגיל ובסופו ועל כן:

$$L = \lambda W = \frac{15}{5} \cdot \frac{20}{60} = 1$$

בממוצע בכל רגע היה פצוע אחד בטריאג'.

חלק 2 – קביעת רמות איוש (20 נקודות)

נתמקד כעת בפצועים המיידיים ובמיוחד בשתי התחנות הבאות: חדר הלב (תחנה 1) בו מתבצע טיפול מציל חיים וחדר ניתוח (תחנה 2), אליו מועברים חלק מהפצועים המיידים בהסתברות p , לאחר הטיפול בחדר הלב. קצב המופע לתחנה 1 משתנה בזמן והינו $\lambda(t)$, $0 \leq t$. מספר הרופאים בכל תחנה משתנה אף הוא בזמן. בכל זמן t מספר הרופאים הוא $N_1(t)$ ו- $N_2(t)$ בתחנה 1 ובתחנה 2, בהתאמה. המשאב הקריטי בתהליך הוא רופאים כירורגים, ועל כן נתמקד בו. בשתי התחנות, רופא יכול לטפל בחולה אחד בכל רגע. הניחו שקצב הטיפול בתחנה 1 ובתחנה 2 הוא אקספוננציאלי עם קצב μ_1 ו- μ_2 בהתאמה. בכל אחת מהתחנות פצועים יכולים למות (במהלך הטיפול או בזמן ההמתנה בתור). את התמותה נמדל בדומה למידול של נטישות ממערכת שירות. אך, בעוד נטישות ממערכת שירות יכולות לקרות רק בזמן המתנה בתור, הנטישות במקרה זה יכולות להתבצע גם בזמן המתנה בתור, אך גם תוך כדי טיפול. הניחו כי קצב התמותה הוא אקספוננציאלי עם קצב θ_{q1} ו- θ_{q2} מהתור לתחנה 1 ומהתור לתחנה 2, בהתאמה, ובקצב θ_{t1} ו- θ_{t2} מטיפול בתחנה 1 ומטיפול בתחנה 2, בהתאמה.



כדי לתאר את מספר הפצועים במערכת, נתאים מודל נוזלים למערכת הנ"ל. נגדיר את המשתנים הבאים:

$$Q_1(t) = \text{סה"כ מספר הפצועים בתחנה 1 (חדרי הלב) במערכת (בטיפול או בתור), בזמן } 0 \leq t.$$

$$Q_2(t) = \text{סה"כ מספר הפצועים בתחנה 2 (חדרי הניתוח) במערכת (בטיפול או בתור), בזמן } 0 \leq t.$$

3.2.1. (2 נקודות) בטאו באמצעות הפרמטרים של המודל את סך כל התמותה מתחנה 1 (מהשירות ומהתור) עבור אינטרוול הזמן $[0, T]$.

תשובה:

$$\int_0^T \theta_{q1} [Q_1(t) - N_1(t)]^+ + \theta_{t1} (Q_1(t) \wedge N_1(t)) dt$$

3.2.2. (4 נקודות) כתבו משוואות דיפרנציאליות עבור $Q_1(t)$ ועבור $Q_2(t)$, $0 \leq t$.

תשובה:

$$\frac{dQ_1(t)}{dt} = \lambda(t) - (\mu_1 + \theta_{t1})(Q_1(t) \wedge N_1(t)) - \theta_{q1}[Q_1(t) - N_1(t)]^+$$

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = \mu_1 p(Q_1(t) \wedge N_1(t)) - (\mu_2 + \theta_{t2})(Q_2(t) \wedge N_2(t)) - \theta_{q2}[Q_2(t) - N_2(t)]^+$$

המטרה של בית החולים באר"ן היא מזעור שיעור התמותה הכולל. עפ"י מחקרים וניהול אירועים בעבר, משאב צוואר הבקבוק בבית החולים הוא רופאים כירורגים, אשר פועלים בחדרי ההלם ובחדרי הניתוח. נסמן את מספר הרופאים הכירורגים בבית החולים ב- N . מנהל האירוע בבית החולים מעוניין לקבוע כמה רופאים כירורגים להקצות לכל אחת משתי התחנות במהלך האירוע. הקצאה זו אינה קבועה ויכולה להשתנות כל 60 דקות במהלך האירוע. הניחו שמשך האירוע הוא $[0, 60T]$, כאשר T הוא מספר שלם חיובי.

3.2.3. (2 נקודות) מהם משתני ההחלטה בבעיית האופטימיזציה שתוארה לעיל.

תשובה:

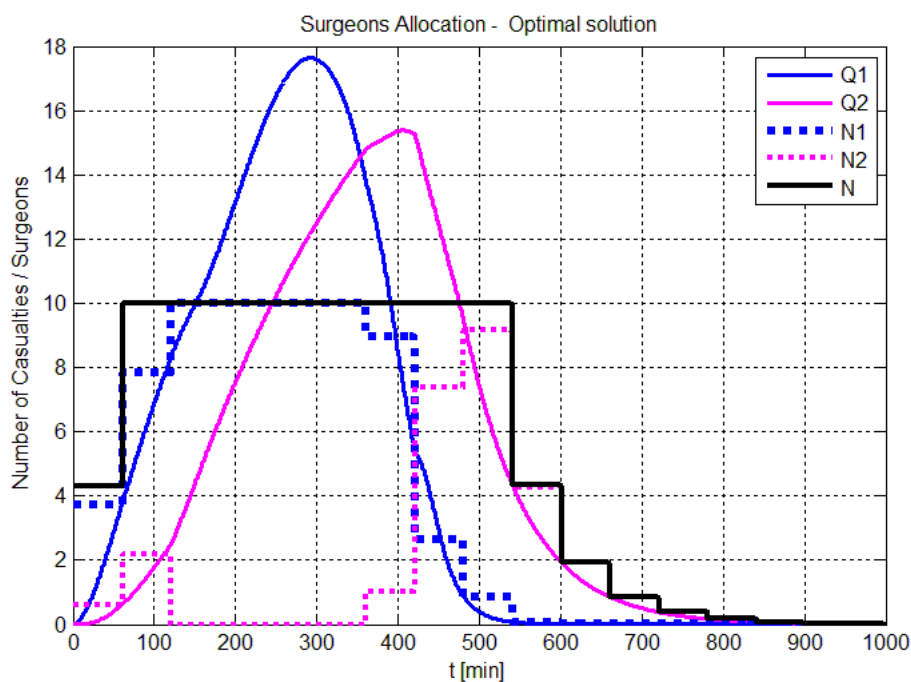
$$N_1(1), N_1(61), \dots, N_1(60T - 59), N_1(60T) \\ N_2(1), N_2(61), \dots, N_2(59T - 59), N_2(60T)$$

3.2.4. (4 נקודות) כיתבו את אילוצי המשאבים בבעיה שתוארה.

תשובה:

$$N_1(1) + N_2(1) \leq N, \\ N_1(61) + N_2(61) \leq N, \\ \vdots \\ N_1(60T - 59) + N_2(60T - 59) \leq N, \\ N_1(60T) + N_2(60T) \leq N.$$

פתרון אופטימלי של תרחיש מסויים של אר"ן מתואר בתרשים הבא :



3.2.5 (2 נקודות) כמה רופאים כירורגים היו זמינים במהלך האירוע בבית החולים?

תשובה:

10 רופאים כירורגים, על פי הערך המקסימלי ש- N מקבל.

3.2.6 (2 נקודות) תארו במילים את מדיניות ההקצאה של הרופאים לשתי התחנות ברגע $t = 200$.

תשובה:

כל 10 הרופאים הכירורגים מוקצים לתחנה 1. לתחנה 2 לא מוקצים רופאים כלל.

3.2.7 (4 נקודות) מהו אורך התור המקסימלי שיהיה בכל אחת מהתחנות? הסבירו תשובתכם.

תשובה:

בתחנה 1 אורך התור המקסימלי הוא 7 אנשים והוא מתקבל כש- $t = 300$.

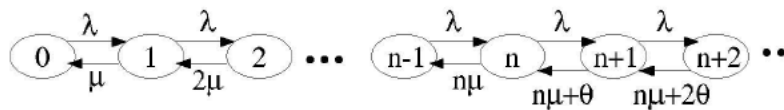
בתחנה 2 אורך התור המקסימלי הוא 15 אנשים והוא מתקבל כש- $t = 350$.

שאלה 4 תיאוריה (15 נקודות)

בשאלה זו נדון במודל Erlang-A עם פרמטרים N, θ, μ, λ , המתאר מערכת שירות עם לקוחות קצרי רוח. נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t . אזי $L = \{L(t), t \geq 0\}$ הוא תהליך לידה ומוות.

4.1. (5 נקודות) ציירו את דיאגרמת קצבי המעבר של L , כתבו את משוואות המצב היציב כפונקציה של π_0 . (נסמן כרגיל את הפתרון למשוואות ב- $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$).

תשובה:



משוואות המצב היציב הן:

$$\lambda \pi_i = i \mu \pi_{i+1} \quad i \leq n$$

$$\lambda \pi_i = (n\mu + (i - n)\theta) \pi_{i+1} \quad i > n$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

משוואות המצב היציב כפונקציה של π_0 הן:

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} \pi_0 \quad i \leq n$$

$$\pi_i = \prod_{k=n+1}^i \frac{\lambda}{n\mu + (k - n)\theta} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \pi_0 \quad i > n$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

4.2. (5 נקודות) הוכיחו מתמטית שמודל Erlang-A הוא תמיד ארגודי (סטבילי). דהיינו, הוכיחו שהטור הרלוונטי משוואות המצב היציב אכן מתכנס.

רמז: ניתן להשתמש בטור הבא - $\sum_{i=0}^{\infty} a^i \frac{1}{i!} = e^a$

תשובה:

מערכת משוואות המצב היציב מ-4.1, שקולה ל-

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} \pi_0 \quad i \leq n$$

$$\pi_i = \prod_{k=n+1}^i \frac{\lambda}{(n\mu + (k-n)\theta)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \pi_0 \quad i > n$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

מכיוון שהתהליך אי-פריק, כדי להוכיח ארגודיות, הכרחי ומספיק להוכיח שלמערכת המשוואות הנ"ל יש

פתרון. כלומר, צריך להוכיח שהטור $\pi_0^{-1} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \prod_{k=n+1}^i \frac{\lambda}{(n\mu + (k-n)\theta)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}$ מתכנס.

מכיוון ש- $n\mu + (k-n)\theta \geq k \min(\mu, \theta)$ לכל $k \geq n$, ו- $k\mu \geq k \min(\mu, \theta)$ לכל $k < n$, מתקיים:

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} \pi_0 \leq \left(\frac{\lambda}{\mu \wedge \theta}\right)^i \frac{1}{i!} \pi_0 \quad i \leq n$$

$$\pi_i = \prod_{k=n+1}^i \frac{\lambda}{(n\mu + (k-n)\theta)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \pi_0 \leq \left(\frac{\lambda}{\mu \wedge \theta}\right)^i \frac{1}{i!} \pi_0 \quad i > n$$

$$\pi_0 \geq \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu \wedge \theta}\right)^j \frac{1}{j!} \right]^{-1} = e^{\frac{\lambda}{\mu \wedge \theta}} > 0 \quad \text{נובע כי } \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

מאחר ו- $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$, נובע כי $\pi_0 > 0$

שכמובן שקול להתכנסות הטור הרלוונטי.

ולכן, לכל ערכי פרמטרים λ, μ, θ, N מודל Erlang-A ארגודי.

הערה: החסמים הנ"ל "הומצאו" בעזרת האטת קצבי המוות, עובדה שנלמדה בכיתה כדי לחסום מלמעלה (סטוכסטית) את Erlang-A על ידי מודל $M/M/\infty$ מתאים (שהוא תמיד ארגודי).

4.3. (5 נקודות) נניח שלקוח מוצא את כל השרתים עסוקים, ובנוסף ממתינים j לקוחות בתור ($j \geq 0$). נניח

שללקוח זה סבלנות סופית המתפלגת $\exp(\theta)$. נסמן ב- $P_j(Sr)$ את ההסתברות שהלקוח הנידון יקבל שירות. הוכיחו:

$$P_j(Sr) = \frac{n\mu}{n\mu + (j+1)\theta}, \quad j \geq 0$$

רמז: השתמשו באינדוקציה מ- $j=0$ ומעלה.

תשובה:

נוכיח באינדוקציה על $j = 0, 1, 2, \dots$:

נשתמש בתכונת חוסר הזיכרון של ההתפלגות המעריכית ונקבל כי

$$P_0\{Sr\} = \frac{n\mu}{n\mu + \theta}$$

נניח כי הנ"ל מתקיים עבור $j-1$, ונוכיח באינדוקציה כי מתקיים עבור j .

$$P_j\{Sr\} = \frac{n\mu + j\theta}{n\mu + (j+1)\theta} \times P_{j-1}\{Sr\} = \frac{n\mu + j\theta}{n\mu + (j+1)\theta} \times \frac{n\mu}{n\mu + j\theta}$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{מכפלה} \\ \text{"טלסקופית"}}}{=} \frac{n\mu}{n\mu + (j+1)\theta}, \quad j \geq 0.$$

כאשר המעבר השני הוא לפי הנחת האינדוקציה.

q.e.d.

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Gen. Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$N \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multi-nomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(m, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; m \geq 1$	$k = m, m+1, \dots$	$\left[\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t} \right]^m$	$\frac{mp}{p}$	$\frac{mq}{p^2}$	Number of trials till m -th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$\exp\{-\lambda(1 - e^t)\}$	λ	λ	
Hyper-geometric	$X \sim HG(N, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N + M$	$\max(0, n - M) \leq k$ $k \leq \min(n, N)$	$\sum_k e^{tk} p(k)$	$\frac{n \cdot N}{N+M}$	$n \cdot \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N}{N+M-1}$	N – special elements M – ordinary ones n – sample size k – special in sample
		Density Function						
Beta	$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	Complicated	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ $= (x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp \left\{ t\mu + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2 \right\}$	μ	σ^2	