



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגל : איתמר זייד

תאריך הבחינה : 16.03.2011

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד ב' – סמסטר חורף תשע"א 2011

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 32 עמודים, כולל עמוד זה, ועמוד נוסחאות סטנדרטי מהסתברות.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

ניקוד: שאלה 1	_____ מתוך 10 נקודות	תרגילי בית
שאלה 2	_____ מתוך 10 נקודות	הרצאות\תרגולים\בחינות קודמות
שאלה 3	_____ מתוך 20 נקודות	יישום
שאלה 4	_____ מתוך 10 נקודות	תיאוריה

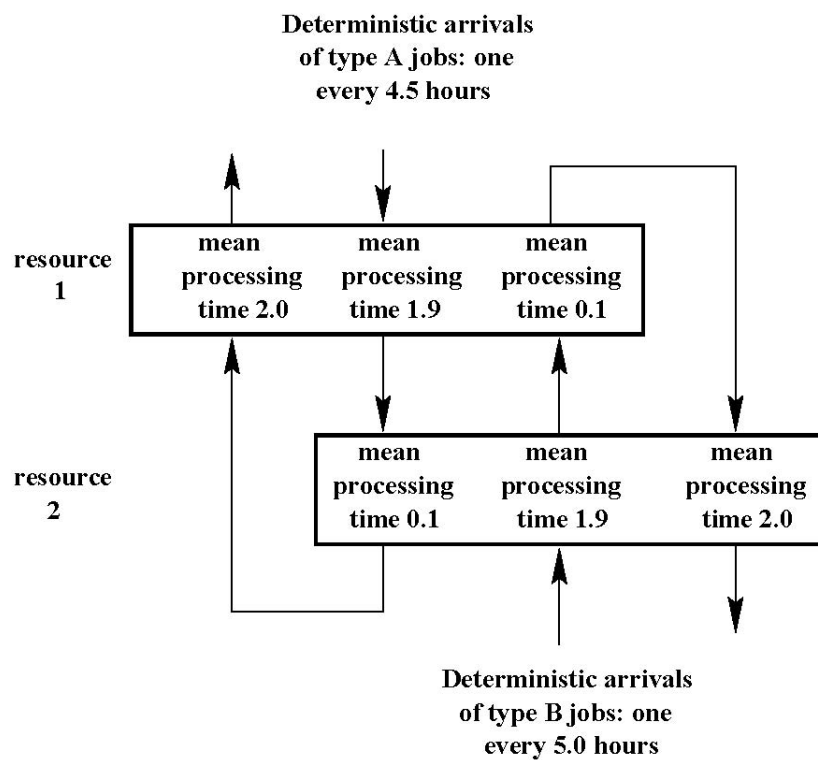
סה"כ _____ מתוך 50 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 תרגילי בית (10 נקודות)

חלק 1. ניתוח קיבולת

הניחו תהליך בו מעובדים שני סוגים של עבודות- סוג A וסוג B. בתהליך העיבוד משתתפים שני משאבים – משאב 1 ומשאב 2. מבנה התהליך, קצבי ההגעות וממוצעי זמני השירות, עבור שני סוגי העבודות, מתוארים בתרשים הבא :



1.1.1 חשבו את נצילות שני המשאבים במצב יציב, אם יש כזה. אם המערכת לא מתייצבת, הסבירו מדוע.

תשובה:

$$U_1 = \frac{2.0+1.9}{4.5} + \frac{0.1}{5} = 0.887$$

$$U_2 = \frac{2.0+1.9}{5} + \frac{0.1}{4.5} = 0.802$$

1.1.2 הניחו כעת כי עבודה מסוג A מגיעה כל 3.5 שעות (במקום 4.5 שעות). חשבו את נצילות המשאבים תחת הנחה זו. נסחו במדויק את ההנחות בהן אתם משתמשים.

תשובה:

$$U_1 = \frac{2.0+1.9}{3.5} + \frac{0.1}{5} > 100\%$$

המערכת לא עומדת בעומס ו"מתפוצצת".

נצילות משאב 2 תלויה במדיניות העדיפויות הניתנות לתת התהליכים של משאב 1. לדוגמא, אם תת התהליך עם משך השירות הממוצע של שעתיים במשאב 1 מקבל את העדיפות הנמוכה ביותר אזי

$$U_2 = \frac{2.0+1.9}{5} + \frac{0.1}{3.5} = 0.728$$

לעומת זאת, אם תת התהליך שמשכו הממוצע 1.9 שעות מקבל את העדיפות הגבוהה ביותר ותת התהליך שמשכו הממוצע 0.1 שעות מקבל את העדיפות הנמוכה ביותר אזי לא יגיעו עבודות לתת התהליך במשאב 2 שמשכו שעתיים ומתקיים

$$U_2 = \frac{1.9}{5} + \frac{0.1}{3.5} = 0.408$$

חלק 2. מודלים אמפירים

להלן נתון חלק מדו"ח call by call data של בנק ישראלי מיום ה-1 לאוגוסט 1999. בנוסף, מצורפת טבלה הכוללת נתוני הגעות מצטברות ועזיבות מצטברות מהמערכת, מהתנור ומהשירות. שעות פעילות המוקד ביום זה הן 00:00-24:00.

לנוחיותכם, הדוחות מצורפים גם בשני העמודים האחרונים של הבחינה, כדי שתוכלו לתלוש עמודים אלו ולהשתמש בהם למענה על השאלות הבאות.

customer_id	priority	type	date	vru_entry	vru_exit	vru_time	q_start	q_exit	q_time	outcome	ser_start	ser_exit	ser_time	server
23703994	1	PS	990801	09:12:53	09:12:58	5	09:12:58	09:13:42	44	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
57918849	1	NE	990801	09:12:59	09:13:05	6	09:13:05	09:16:58	233	AGENT	09:16:57	09:22:22	325	NAAMA
0	0	NW	990801	09:13:37	09:13:46	9	09:13:46	09:14:36	50	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
42477224	2	PS	990801	09:13:46	09:13:52	6	09:13:52	09:14:18	26	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
1382043	2	PS	990801	09:14:05	09:14:11	6	09:14:11	09:14:52	41	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
58273764	2	PS	990801	09:14:45	09:14:51	6	09:14:51	09:19:31	280	AGENT	09:19:30	09:20:50	80	ANAT
38345369	1	PS	990801	09:14:48	09:14:53	5	09:14:53	09:20:56	363	AGENT	09:20:55	09:22:06	71	ANAT
58641838	2	PS	990801	09:15:28	09:15:34	6	09:15:34	09:19:35	241	AGENT	09:19:35	09:30:17	642	DORIT
14264295	2	PS	990801	09:15:31	09:15:37	6	09:15:37	09:19:40	243	AGENT	09:19:39	09:22:05	146	AVI
67710418	2	PS	990801	09:15:46	09:15:53	7	09:15:53	09:22:29	396	AGENT	09:22:27	09:23:34	67	NAAMA
50270297	2	PS	990801	09:16:07	09:16:12	5	09:16:12	09:16:12	0	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
3968047	2	PS	990801	09:16:38	09:16:43	5	09:16:43	09:22:40	357	AGENT	09:22:39	09:27:26	287	AVNI
0	0	IN	990801	09:16:46	09:17:03	17	00:00:00	00:00:00	0	AGENT	09:17:03	09:35:51	1128	YIFAT
22761092	1	PS	990801	09:16:51	09:16:57	6	09:16:57	09:17:28	31	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
43329655	2	PS	990801	09:16:53	09:16:59	6	09:16:59	09:22:10	311	AGENT	09:22:08	09:23:54	106	AVI
52586328	1	PS	990801	09:17:01	09:17:07	6	09:17:07	09:17:28	21	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
22761092	1	NE	990801	09:18:02	09:18:07	5	09:18:07	09:23:59	352	AGENT	09:23:57	09:28:40	283	AVI
0	0	NW	990801	09:18:08	09:18:17	9	09:18:17	09:19:41	84	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
3267788	2	PS	990801	09:18:27	09:18:33	6	09:18:33	09:23:40	307	AGENT	09:23:38	09:29:07	329	NAAMA
29566940	1	PS	990801	09:18:39	09:18:44	5	09:18:44	09:26:52	488	AGENT	09:26:51	09:33:06	375	AVI
25165374	1	PS	990801	09:19:01	09:19:07	6	09:19:07	09:20:11	64	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
55476253	2	NE	990801	09:19:47	09:19:53	6	09:19:53	09:30:16	623	AGENT	09:30:01	09:34:18	257	YITZ
1161660	2	PS	990801	09:19:56	09:20:03	7	09:20:03	09:26:45	402	AGENT	09:26:44	09:30:16	212	VICKY
0	0	NW	990801	09:20:06	09:20:15	9	09:20:15	09:26:39	384	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
58886011	2	PS	990801	09:20:18	09:20:23	5	09:20:23	09:21:32	69	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
54042171	2	NE	990801	09:21:02	09:21:08	6	09:21:08	09:29:14	486	AGENT	09:29:13	09:35:19	366	NAAMA
0	0	NW	990801	09:21:40	09:21:50	10	09:21:50	09:30:57	547	AGENT	09:30:56	09:34:33	217	STEREN
1460617	2	PS	990801	09:21:47	09:21:53	6	09:21:53	09:27:33	340	AGENT	09:27:33	09:29:52	139	AVNI
28934784	2	PS	990801	09:21:59	09:22:04	5	09:22:04	09:26:06	242	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
0	0	IN	990801	09:22:25	09:22:34	9	09:22:34	09:22:51	17	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
34531269	1	PS	990801	09:22:29	09:22:35	6	09:22:35	09:24:42	127	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
0	0	NW	990801	09:22:49	09:22:58	9	09:22:58	09:23:27	29	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
306948266	2	PS	990801	09:23:02	09:23:08	6	09:23:08	09:25:54	166	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
53394052	2	PS	990801	09:23:15	09:23:21	6	09:23:21	09:30:28	427	AGENT	09:30:27	09:34:22	235	AVNI

time	Arr_sys	Dep_sys	Arr_q	Dep_q	Arr_ser	Dep_ser
09:00	189	174	150	140	137	132
09:01	190	177	151	144	138	132
09:02	195	179	156	145	139	134
09:03	197	183	158	150	142	136
09:04	198	184	158	151	143	137
09:05	201	186	162	153	145	139
09:06	204	189	165	155	145	140
09:07	206	193	167	160	148	142
09:08	207	195	167	162	149	143
09:09	214	199	174	164	149	145
09:10	214	199	175	166	151	145
09:11	215	200	176	167	151	145
09:12	217	204	178	170	152	147
09:13	226	206	186	172	153	148
09:14	228	212	189	178	154	149
09:15	231	217	192	183	155	150
09:16	234	220	195	187	159	153
09:17	239	223	199	190	161	155
09:18	240	225	200	192	162	155
09:19	244	225	204	192	162	155
09:20	247	228	206	196	165	157
09:21	249	230	209	198	166	158
09:22	253	232	212	200	167	159
09:23	256	237	216	204	170	163
09:24	265	240	225	207	172	165
09:25	267	244	227	211	172	165
09:26	270	247	229	214	173	165
09:27	274	254	233	221	175	167
09:28	279	257	238	224	176	168
09:29	281	260	239	227	176	168
09:30	286	267	245	232	177	171
09:31	292	270	251	237	182	174
09:32	297	274	256	241	183	175
09:33	303	276	262	243	183	175
09:34	307	286	266	253	186	178
09:35	313	294	272	261	191	183
09:36	321	301	278	267	193	186
09:37	324	307	282	273	196	189
09:38	328	309	287	275	196	189
09:39	332	314	290	281	199	191
09:40	338	322	297	288	202	195
09:41	345	325	304	292	204	196
09:42	347	327	305	294	206	198
09:43	349	332	307	298	209	202
09:44	353	336	311	302	212	205
09:45	357	341	316	307	215	208
09:46	359	345	318	310	217	211
09:47	365	346	323	312	218	211
09:48	369	350	328	314	218	213
09:49	371	354	330	320	222	215
09:50	376	357	335	324	224	216
09:51	380	364	338	329	228	222
09:52	381	370	340	336	231	224
09:53	385	371	343	336	231	225

1.2.1 הניחו כי לקוחות מקבלים שירות לפי מדיניות שירות First Come First Served. השתמשו במודל נוזלים כדי לאמוד את זמן ההמתנה לפני קבלת שירות של לקוח "וירטואלי" המגיע לתור ב- 09:20. לאחר מכן, השוו בין התוצאה שקיבלתם לבין זמני ההמתנה של לקוחות שהגיעו למערכת בסביבות 09:20. האם לדעתכם מודל הנוזלים מתאים לאמידת זמן ההמתנה של לקוח במערכת? אם לא, נסו להסביר מדוע.

תשובה: לפי מודל נוזלים, אמד לזמן ההמתנה של לקוח "וירטואלי" המגיע למערכת ב- 09:20 (הלקוח ה-207) לפי עמודות Arr_q ו- Dep_q יהיה כ- 3.5 דקות (זמן עזיבת הלקוח ה-207 הוא בין 09:23 לבין 09:24). כעת נסתכל על נתוני לקוחות שהגיעו למערכת בין 09:19 ל- 09:21.

Arrival	type	Priority	Outcome	Waiting
09:19:07	PS	1	HANG	64
09:19:53	NE	2	AGENT	623
09:20:03	PS	2	AGENT	402
09:20:15	NW	0	HANG	384
09:20:23	PS	2	HANG	69
				308.4

ניתן לראות שזמני ההמתנה רחוקים מהערך שאמדנו (ממוצע: 308 שניות).
מודל הנוזלים אינו מתאים מכיוון שחלק מהלקוחות נוטים וכן קיום עדיפויות מפר קיום משטר FCFS.

1.2.2 נשים לב כי הנתונים אינם כוללים את מספר המוקדנים הנותנים שירות. הניחו כי רמת האיוש נשארת קבועה לאורך כל שעה והציעו גישה לאמידת מספר המוקדנים תוך שימוש בנתונים הקיימים. הסבירו. (אין צורך בחישובים)

תשובה: נציע 2 שיטות לאמידת רמת האיוש במוקד:
א. בכל שעה, נמצא את מספר הלקוחות המקסימלי שנמצאים בשירות בו-זמנית.
ב. מספר שמות המוקדנים הנותנים שירות במהלך השעה (לא ניקח בחשבון את הערך NO_SERVER).

1.2.3 אם ברשותכם היה דו"ח השיחות היומי המלא, כיצד תאמדו את ממוצע אורך השירות במהלך היום? הסבירו ופרטו את תשובתכם תוך שימוש בשמות עמודות הנתונים בהם אתם משתמשים.

תשובה: באמידת ממוצע אורך השירות אין לקחת בחשבון לקוחות שנטשו (HANG) ולכן יש לחשב ממוצע על פני עמודות ser_time ללא השיחות שאורכן 0 שניות.

1.2.4 ביונס אם ברשותכם היה דו"ח Call-by-Call מלא, כיצד הייתם אומדים את ה Offered-Load בזמן מסוים של היום? פרטו בדיוק את ההנחות בהן אתם משתמשים.

תשובה:

הרעיון הכללי יהיה "הורדת זמני ההמתנה לאפס". כלומר, נשמור את הנתונים הבאים : זמן הגעת כל לקוח ומשך השירות שלו. לצורך החישוב נניח כי הלקוח מקבל שירות ברגע שהוא נכנס אל המערכת (כמו במערכת עם אינסוף שרתים). במערכת זו מספר הלקוחות הנמצאים במערכת הוא ראליזציה של ה- Offered-Load והוא יהווה אמד ל Offered-Load ברגע זה.

הקושי שעלול להיווצר בחישוב זה הוא : אין בידנו נתונים לגבי זמן השירות של הלקוחות אשר נטשו את המערכת. לקוחות אלו לא היו נוטשים במערכת עם אינסוף שרתים ולכן נצטרך "להשלים" את זמני השירות שלהם. תחת התנאי שזמן השירות בלתי תלוי בסבלנות הלקוחות ובזמן ההגעה, ניתן להשלים את זמני השירות של הלקוחות הנוטשים כממוצע (או הגרלת מ"מ) של זמני השירות של הלקוחות אשר לא נטשו את המערכת.

1.2.5 הניחו שני סוגי ימים - "עמוס" ו-"לא עמוס". הניחו בנוסף שרמות האיוש בשני הימים זהות. נסמן ב- W_1 ו- W_2 את ממוצעי זמני ההמתנה ביום עמוס וביום לא עמוס בהתאמה; וב- W_1^+ ו- W_2^+ את ממוצעי זמני ההמתנה בהינתן המתנה.

מהו היחס בין $\frac{W_1}{W_2}$ ו- $\frac{W_1^+}{W_2^+}$ אותו תצפו לקבל? הסבירו.

תשובה:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{W_1^+}{W_2^+} \quad \text{א.}$$

$$\frac{W_1}{W_2} > \frac{W_1^+}{W_2^+} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{W_1}{W_2} < \frac{W_1^+}{W_2^+} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{W_1}{W_2} : \frac{W_1^+}{W_2^+} = \frac{P_1\{\text{Wait} > 0\}}{P_2\{\text{Wait} > 0\}} > 1 \quad \text{מכיוון ש-} \frac{W_1}{W_2} > \frac{W_1^+}{W_2^+} \quad \text{הסבר: נצפה ליחס}$$

שאלה 2 תרגולים (10 נקודות)

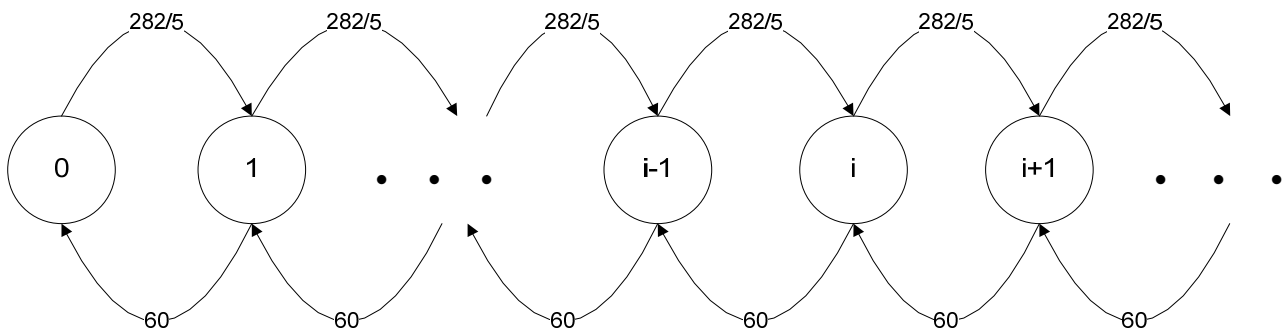
קצב ההגעה לדלפק הקבלה בנמל תעופה הוא 282 נוסעים בשעה. קצב השירות בדלפק הוא 60 לקוחות בשעה. ישנם 5 פקידים (שרתים) העובדים בדלפק הקבלה. ניתן להניח כי זמני השירות מתפלגים מעריכית וכי תהליך הגעת הנוסעים הינו תהליך פואסון וכן כי זמני השירות בלתי תלויים בתהליך הגעת הנוסעים. מנהל שדה התעופה בוחן שתי אפשרויות לניהול התורים:

1. חמישה תורי M/M/1 כאשר בכל אחד קצב הגעה של $282/5$ נוסעים לשעה, וקצב שירות של 60 נוסעים לשעה בכל אחד מהתורים.

2. תור M/M/5 יחיד בו קצב ההגעה הינו 282 נוסעים בשעה, ובו עובדים חמישה פקידים כל אחד בקצב של 60 לקוחות בשעה.

- שאלות 2.1, 2.2 מתייחסות לתור M/M/1 ואילו שאלות 2.3, 2.4 מתייחסות לתור M/M/5.

2.1 להלן דיאגרמת קצבי המעבר של אחד מתורי ה M/M/1 הנ"ל:



חשבו את $E(L_{sys}^1)$, כאשר $L_{sys}^1 =$ מספר האנשים במערכת M/M/1 כולה (שירות+תור) במצב יציב.

תשובה: לפי שיטת החתכים

$$\text{ולכן } \begin{cases} \frac{282}{5} \pi_i = 60 \pi_{i+1} \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\pi_i = 0.94^i \pi_0$$

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} 0.94^i \pi_0 = \frac{1}{1-0.94} \pi_0 \Rightarrow \pi_0 = 1 - 0.94 = 0.06 \Rightarrow \pi_i = 0.94^i \cdot 0.06$$

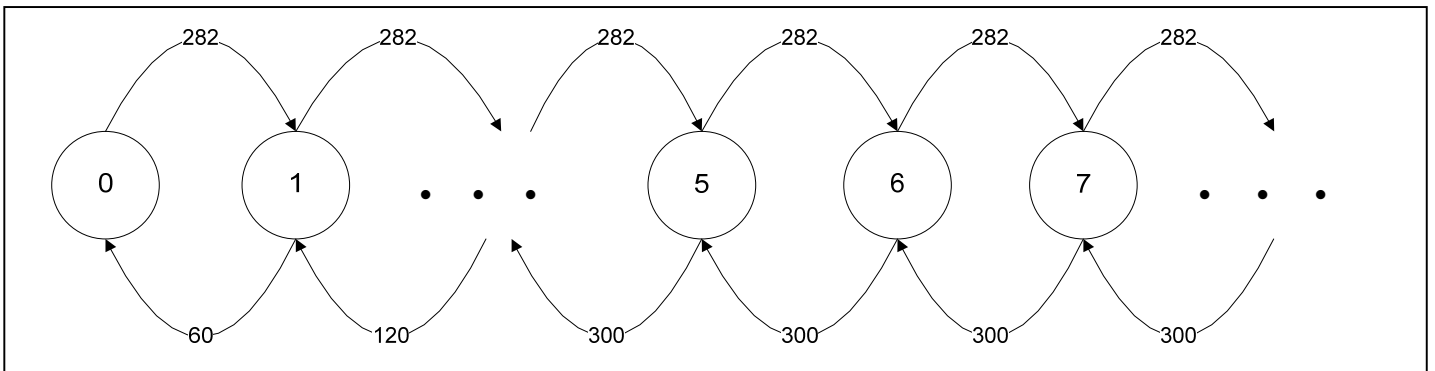
מאחר ו $P(L_{sys}^1 = i) = \pi_i = 0.94^i \cdot 0.06$ נקבל כי $L_{sys}^1 \sim Geo_0(0.06)$ ולכן $E(L_{sys}^1) = \frac{0.94}{0.06} = 15 \frac{2}{3}$

2.2 מצא את $E(W_q^1)$, כאשר $W_q^1 =$ זמן ההמתנה בתור במצב יציב במודל M/M/1 הנייל.

תשובה: לפי נוסחת Little, $E(W_{sys}^1) = \frac{E(L_{sys}^1)}{\lambda} = \frac{15 \frac{2}{3}}{282/5} = 0.2778 \text{ hour} = 16.7 \text{ min}$, כעת,

$$E(W_q^1) = E(W_{sys}^1) - E(\text{Service}) = 16.7 - 1 = 15.7 \text{ min}$$

2.3 השלם את דיאגרמת קצבי המעבר של התור M/M/5 הרלוונטי:



2.4 מצא את $E(W_q^5)$. כאשר $W_q^5 =$ זמן ההמתנה בתור במערכת M/M/s הנייל.

עבור פתרון סעיף זה ניתן להיעזר בדפי עזר מההרצאות אשר מופיעים בסוף שאלה 2.

תשובה:

$$E(W_q^5) = \frac{1}{\mu} \cdot E_{2,n} \cdot \frac{1}{n} \frac{1}{1-\rho} \quad \text{ולכן} \quad \frac{W_q^5}{1/\mu} \sim \begin{cases} 0 & w.p. 1 - E_{2,n} \\ \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{n} \frac{1}{1-\rho}\right) & w.p. E_{2,n} \end{cases}$$

$$, R = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{282}{60} = 4.7, \rho = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{4.7}{5} = 0.94$$

$$\pi_0^{-1} = \frac{R^0}{0!} + \frac{R^1}{1!} + \frac{R^2}{2!} + \frac{R^3}{3!} + \frac{R^4}{4!} + \frac{R^5}{5!(1-\rho)} = 1 + 4.7 + \frac{4.7^2}{2} + \frac{4.7^3}{6} + \frac{4.7^4}{24} + \frac{4.7^5}{5! \cdot 0.06} = 372.9$$

$$\pi_0 = 0.00268$$

$$\text{ולכן} \quad E_{2,n} = \frac{4.7^5}{5!} \frac{1}{1-0.94} \cdot 0.00268 = 0.854$$

$$\text{לסיכום} \quad E(W_q^5) = \frac{1}{60} \cdot 0.854 \cdot \frac{1}{5} \frac{1}{1-0.94} = 0.047 \text{ hours} = 2.85 \text{ min}$$

2.5 השוו בין $E(W_q^1)$ מסעיף 2.2 לבין $E(W_q^5)$ מסעיף 2.4. הסבירו מדוע $E(W_q^5)$ הוא בערך פי 5 קטן יותר מאשר $E(W_q^1)$. תנו הסבר מדויק ככל שתוכלו.

תשובה: תחילה נחשב את נצילות שתי המערכות.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \frac{\lambda_1}{n \cdot \mu_1} = \frac{282/5}{1 \cdot 60} = 0.94 \\ \rho_5 = \frac{\lambda_5}{\mu_5} = \frac{282}{5 \cdot 60} = 0.94 \end{array} \right. \text{ כעת } E(W_q^1) = E(S) \cdot \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \text{ ו } E(W_q^5) = \frac{E(S)}{5} \cdot \frac{P(\text{Wait} > 0)}{1 - \rho_5} \text{ מאחר ו}$$

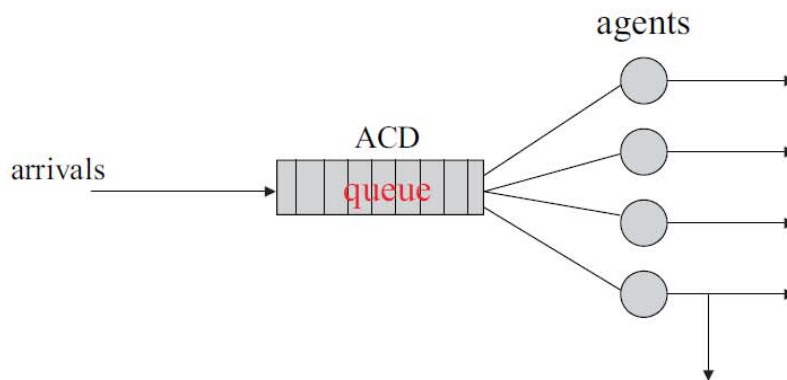
$P(\text{Wait} > 0) \approx \rho_5$ ובנוסף $\rho_5 = \rho_1$ נקבל כי

$$E(W_q^5) = \frac{E(S)}{5} \cdot \frac{P(\text{Wait} > 0)}{1 - \rho_5} \approx \frac{E(S)}{5} \cdot \frac{\rho_5}{1 - \rho_5} = \frac{1}{5} E(S) \cdot \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} = \frac{1}{5} E(W_q^1)$$

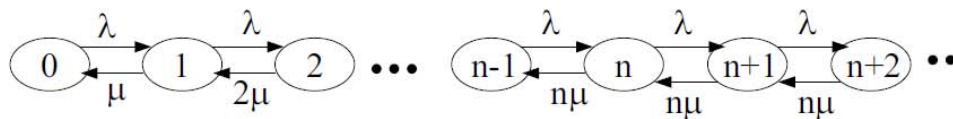
M/M/ n (Erlang-C) queue

- Poisson arrivals, rate λ ;
- n exponential servers, rate μ .

Widely used in call centers.



Transition-rate diagram



$$\lambda_j = \lambda, \quad j \geq 0,$$

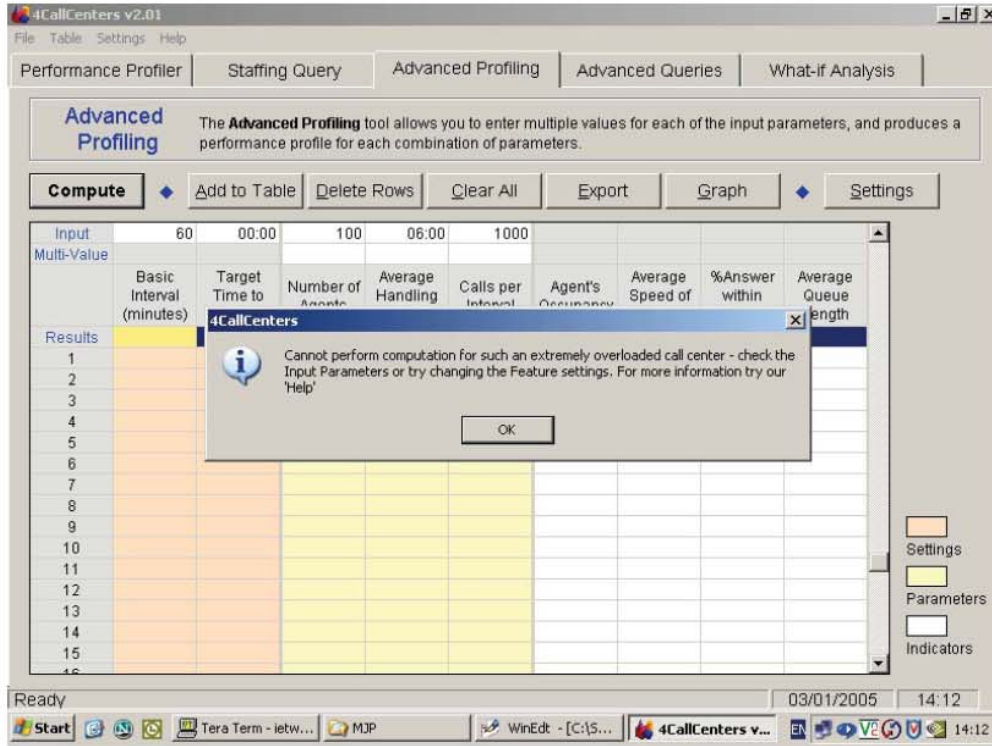
$$\mu_j = (j \wedge n)\mu, \quad j \geq 1.$$

Agents' utilization

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu}.$$

Assume $\rho < 1$ ($R < n$) to ensure stability (as in M/M/1).

4CallCenters output: Instability, $\rho \geq 1$



Steady-state distribution:

$$\begin{aligned}\pi_i &= \frac{R^i}{i!} \pi_0, & i \leq n, \\ &= \frac{n^n \rho^i}{n!} \pi_0, & i \geq n, \\ \pi_0 &= \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{R^j}{j!} + \frac{R^n}{n!(1-\rho)} \right]^{-1},\end{aligned}$$

where $R = \frac{\lambda}{\mu}$ is the **offered load**.

Erlang-C Formula (1917):

Delay probability:

$$P\{W_q > 0\} \triangleq E_{2,n} = \sum_{i \geq n} \pi_i = \frac{R^n}{n!} \frac{1}{1 - \rho} \cdot \pi_0.$$

Erlang-C computation: recursion, see Erlang-B below.

Number-in-queue:

$$P\{L_q = i\} = E_{2,n} \cdot (1 - \rho)\rho^i, \quad i > 0,$$

or

$$L_q = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Geom}(1 - \rho) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Waiting time distribution:

$$\frac{W_q}{1/\mu} = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Compare with M/M/1!

Departure process: Poisson(λ) in steady-state.

Proof via reversibility, as with M/M/1.

להלן כתבה שפורסמה בחודש מאי 2010 באתר האינטרנט של העיתון גלובס:



זירת העסקים של ישראל

תיק איש

פורטל פיננסי

חדשות

ראשי

שוק ההון

וול סטריט ועולם

היי טק

נדל"ן

סביבה

נתח שוק וצרכנות

דין וחשבון

עמוד הבית < נתח שוק

אושר בטרומית: חברות יענו תוך 3 דקות במוקד שירות הלקוחות

הכנסת אישרה היום בקריאה טרומית את הצעת החוק של ח"כ איתן כבל, הקובעת כי חברות שלהן למעלה מ-10,000 לקוחות יחויבו לתת מענה אנושי במוקד השירות בתוך 3 דקות - או שיתחייבו לחזור ללקוח בתוך 3 שעות

14:27, 26/05/2010



נושאים: איתן כבל הצעת חוק שירות לקוחות

חברות הסלולר והאינטרנט יחויבו לענות ללקוחות בתוך 3 דקות: מליאת הכנסת אישרה היום (ד') בקריאה טרומית את הצעת החוק של ח"כ איתן כבל, הקובעת כי חברות שלהן למעלה מ-10,000 לקוחות יחויבו לתת מענה אנושי במוקד שירות הלקוחות בתוך 3 דקות, או שיתחייבו לחזור ללקוח שהשאיר הודעה במענה קולי בתוך 3 שעות.

חברת סלולר מסוימת, המפעילה מוקד שירות טלפוני, מעוניינת להתאים (לשפר) את רמת השירות שלה לחוק החדש. כיום, מספר המוקדנים העובדים במוקד השירות הוא 85, משך שיחה ממוצע הינו 6 דקות, בעוד הסבלנות הממוצעת של לקוח היא 12 דקות. קצב המופע משתנה על פני היום, וניתן להניח שהוא קבוע למקוטעין כפי שיוסבר בהמשך. אנליסט העובד בחברה הסלולרית הנוכחית ממדל את המוקד הטלפוני הנ"ל.

חלק 3.1. מידול המוקד

3.1.1 איזה מודל סטוכסטי נראה לכם מתאים לניתוח מצב זה? מה הן ההנחות המתמטיות במודל זה?

תשובה: מאחר וישנן נטישות המודל המתאים ביותר הינו מודל Erlang A. ההנחות הפורמאליות הדרושות לרלוונטיות מודל זה הן: התפלגות זמני השירות והסבלנות אקספוננציאלים, תהליך ההגעה הינו תהליך פואסון וישנה אי תלות בין זמני השירות לתהליך ההגעה. מניחים שקצב המופע קבוע על פני התקופות בהן משתמשים במודל.

הנהלת המוקד הטלפוני פונה אל האנליסט בנוגע להתאמת המוקד הטלפוני לחוק החדש. בשלב הראשון מעוניין האנליסט לבדוק מהו כיום אחוז הלקוחות אשר המתינו בתור יותר משלוש דקות. לשם כך נגדיר את המדד התפעולי הבא:

$\text{Target} = \%$ אחוז הלקוחות אשר המתינו בתור למעלה משלוש דקות.

שימו לב: בחישוב $\text{Target} \%$ אנו כוללים גם את הלקוחות שהמתינו יותר משלוש דקות וקיבלו שירות וגם את הלקוחות אשר המתינו יותר משלוש דקות ולבסוף נטשו את המוקד.

חלק 3.2. התאמת המוקד לחוק החדש: שלב א'

מעתה נדון בשעות הבוקר בהן קצב הגעת הלקוחות קבוע ושווה ל 1000 לקוחות לשעה. כיום, בשעות אלו המערכת נמצאת תחת משטר ED ואחוז הלקוחות אשר ממתינים יותר מ 3 דקות קרוב ל 10%. עקב החוק החדש, מספר זה אינו מקובל על מנהלי המוקד ולכן הם פונים אל האנליסט כדי שיעזור להבין מה מספר המוקדנים הנדרש בשעות אלו.

להלן פלט של תוכנת 4CC

4CallCenters v2.23

File Table Settings Help

Performance Profiler Staffing Query Advanced Profiling Advanced Queries What-if Analysis

Performance Profiler

Performance Profiler allows you to determine and optimize the Performance Level of your Call Center. Enter your call center's parameters below, then press 'Compute'.

Your Call Center's Parameters

- Number of Agents Answering Calls: 100
- Average Time to Handle One Call (mm:ss): 06:00
- Calls per 60 minute Interval: 1000
- Average Callers' Patience (mm:ss): 12:00

Settings

- Features: Abandons
- Basic Interval: 60 minutes
- Target Time: 03:00 (mm:ss)

Change Settings

Compute Add to Table Delete Rows Clear All Export Import Graph

	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Agent's Occupancy	%Answer	%Abandon	Average Speed of Answer	%Answer within Target	%Abandon within Target	Average Queue Length
Results	60.0	03:00.0	100.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	96.7%	96.7%		00:23.5	96.7%		6.6
1	60.0	03:00.0	85.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	99.9%	84.9%		01:55.4	74.8%		30.1
2	60.0	03:00.0	86.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	99.9%	85.9%	14.1%	01:47.3	78.0%	13.8%	28.2
3	60.0	03:00.0	87.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	99.9%	86.9%	13.1%	01:39.3	80.9%	12.9%	26.2
4	60.0	03:00.0	88.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	99.8%	87.8%	12.2%	01:31.6	83.4%	12.0%	24.3
5	60.0	03:00.0	89.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	99.7%	88.8%	11.2%	01:24.1	85.5%	11.1%	22.5
6	60.0	03:00.0	90.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	99.6%	89.7%	10.3%	01:16.8	87.3%	10.3%	20.7
7	60.0	03:00.0	91.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	99.5%	90.5%	9.5%	01:09.9	88.9%	9.4%	18.9
8	60.0	03:00.0	92.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	99.3%	91.4%	8.6%	01:03.2	90.3%	8.6%	17.2
9	60.0	03:00.0	93.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	99.2%	92.2%	7.8%	00:56.9	91.4%	7.8%	15.6
10	60.0	03:00.0	94.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	98.9%	93.0%	7.0%	00:51.0	92.5%	7.0%	14.0
11	60.0	03:00.0	95.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	98.7%	93.7%	6.3%	00:45.4	93.4%	6.3%	12.5
12	60.0	03:00.0	96.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	98.4%	94.4%	5.6%	00:40.2	94.2%	5.6%	11.2
13	60.0	03:00.0	97.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	98.0%	95.1%	4.9%	00:35.5	94.9%	4.9%	9.9
14	60.0	03:00.0	98.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	97.6%	95.7%	4.3%	00:31.1	95.6%	4.3%	8.7
15	60.0	03:00.0	99.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	97.2%	96.2%	3.8%	00:27.1	96.1%	3.8%	7.6
16	60.0	03:00.0	100.0	06:00.0	1,000.0	12:00.0	96.7%	96.7%		00:23.5	96.7%		6.6

3.2.1 בפלט הנ"ל חסרים נתונים לגבי אחוז הנוטשים עבור מערכת בה 85 מוקדנים ועבור מערכת בה 100 מוקדנים. בסעיף זה עליכם לחשב את שני הנתונים החסרים.

להלן שני קירובים לאחוז הנוטשים אשר למדתם בכיתה:

$$1. \text{ עבור מערכת הנמצאת תחת משטר ED, } P(Ab) \approx 1 - \frac{1}{\rho}$$

2. עבור מערכת הנמצאת תחת משטר QED, נחשב את $P(Ab)$ בעזרת פונקציית Garnett (מצורפת בסוף שאלה 3).

חשבו את אחוז הנוטשים לכל מערכת (85 מוקדנים ו-100 מוקדנים) בשתי השיטות. השוו בכל מערכת את שני החישובים. מהי הסיבה להבדלים (או לכך שהתוצאות קרובות)? את מי הייתם בוחרים כקירוב הטוב יותר (בחרו קירוב לכל מערכת בנפרד)?

תשובה:

בשימוש בפונקציית Garnett: $\theta/\mu = 0.5$ לכן נשתמש בעקומה $GMR(0.5)$.

עבור 85 שרתים:

$$\text{קירוב מספר 1: } P(Ab) \approx 1 - \frac{1}{\rho} = 1 - \frac{1}{1000/10 \cdot 85} = 0.15$$

$$\text{קירוב מספר 2: נמצא את } \beta \text{ עבור 85 מוקדנים: } \beta = \frac{n-R}{\sqrt{R}} = \frac{n-\lambda/\mu}{\sqrt{\lambda/\mu}} = \frac{85-1000/10}{\sqrt{1000/10}} = -1.5$$

$$1.5 \approx \sqrt{n}P(Ab) \Rightarrow P(Ab) \approx \frac{1.5}{\sqrt{85}} \approx 0.16$$

התוצאות קרובות מאחר ואנו תחת משטר ED (15% נטישה) אך לא רחוקים ממשטר QED. אך מאחר ואנו תחת המשטר ED נבחר בשיטה הראשונה בה קיבלנו 15% נטישה.

עבור 100 שרתים:

$$\text{קירוב מספר 1: } P(Ab) \approx 1 - \frac{1}{\rho} = 1 - \frac{1}{1000/10 \cdot 100} = 0$$

$$\text{נמצא את } \beta \text{ עבור 85 מוקדנים: } \beta = \frac{n-R}{\sqrt{R}} = \frac{n-\lambda/\mu}{\sqrt{\lambda/\mu}} = \frac{100-1000/10}{\sqrt{1000/10}} = 0$$

$$0.33 \approx \sqrt{n}P(Ab) \Rightarrow P(Ab) \approx \frac{0.33}{\sqrt{100}} \approx 0.033$$

התוצאות יצאו רחוקות מאחר ואנו נמצאים תחת משטר QED (ורחוקים מאד ממשטר ED). מאחר ואנו תחת משטר QED נבחר בשיטה השנייה (פונקציית Garnett) בה קיבלנו 3.3% נטישות.

3.2.2 עבור פתרון סעיף זה הניחו כי מספר המוקדנים במערכת הינו 90. מהי תוחלת זמן ההמתנה בתור של לקוחות שנטשו את המערכת?

תשובה:

$$E(W_q) = \frac{E(L_q)}{\lambda} = \frac{20.7}{1000} \text{ Little מנוסחת}$$

$$E(W_q) = E(W_q | Abandon)P(Abandon) + E(W_q | Service)P(Service)$$

$$\Rightarrow E(W_q | Abandon) = \frac{E(W_q) - E(W_q | Service)P(Service)}{P(Abandon)} =$$

$$\frac{E(W_q) - (Average\ Speed\ of\ Answer) \cdot P(Service)}{P(Abandon)}$$

$$E(W_q | Abandon) = \frac{20.7/1000 \cdot 60 \cdot 60 - 76.8 \cdot 0.897}{0.103} = 54.66 \text{ sec}$$

חלק 3.3. התאמת המוקד לחוק החדש: שלב ב'

חברת הסלולר מחליטה להעסיק את אריק, מהנדס בוגר הפקולטה לתעשייה וניהול בטכניון, אשר למד את הקורס הנדסת מערכות שירות. מהנדס זה מעיר להנהלת החברה כי השיטה בה השתמשו עד עתה לחישוב מספר הלקוחות אשר המתנינו יותר מ 3 דקות אינה מדויקת. אריק מציע שיטה אלטרנטיבית לבדיקה זאת. לפני שנפרט את השיטה המוצעת ע"י אריק, נציג את המאפיין Overflow אשר מופיע בתוכנת ה 4CC :

- בחירה ב "Overflows" היא עבור מערכת בה לקוחות הממתינים זמן מסוים (3 דקות במקרה זה) מפונים מהמערכת למערכת אחרת (מערכת אשר אחראית לחזור אל הלקוח לאחר שלוש שעות לכל היותר).
- קלט : Overflow Time Limit : כאן נקבע הזמן אשר לקוחות הממתינים יותר ממנו יופנו למערכת האחרת.
- פלט : %Overflow מציין את אחוז הלקוחות אשר עברו את הזמן המדובר (שלוש דקות) והופנו למערכת האחרת.

לשלמות, להלן פירוט ה- Feature : Overflow בתוכנה 4CC (לקוח מ-Help).

אין צורך לקרוא את הפירוט הבא.



Feature Overview : Overflows

What are "Overflows"?

At some call centers a technical limit has been set on the time a call can spend waiting in queue. Once this time limit is reached the call is "overflowed" and rerouted to some other destination, such as a different queue, an IVR or a voice box. Such an overflowing mechanism is meant to reduce congestion by offering callers a partial or temporary solution, hopefully before they become aggravated by a long wait.

When should I enable the "Overflows" feature?

If an overflowing mechanism is implemented at your call center and the fraction of calls "overflowed" is not negligible, then it is recommended that you enable the "Overflows" feature. However, since you cannot have both the "Overflows" and "Trunks" features enabled, you should decide which to enable according to the more dominant phenomena at your call center - overflowing or blocking.

What are the corresponding input parameters and performance indicators?

The input parameter corresponding to the "Overflows" feature is the "Overflow time", which is the time limit on calls waiting in queue.

There is a single performance indicator available only when the "Overflows" feature is enabled: %Overflow.

הצעתו האלטרנטיבית של אריק:

במקום לבדוק את אחוז הלקוחות אשר המתינו במערכת יותר מ 3 דקות בעזרת ה Target Time, בוחר אריק להשתמש במודל עם Overflows, וקובע את ה Overflow Time Limit להיות 3 דקות.

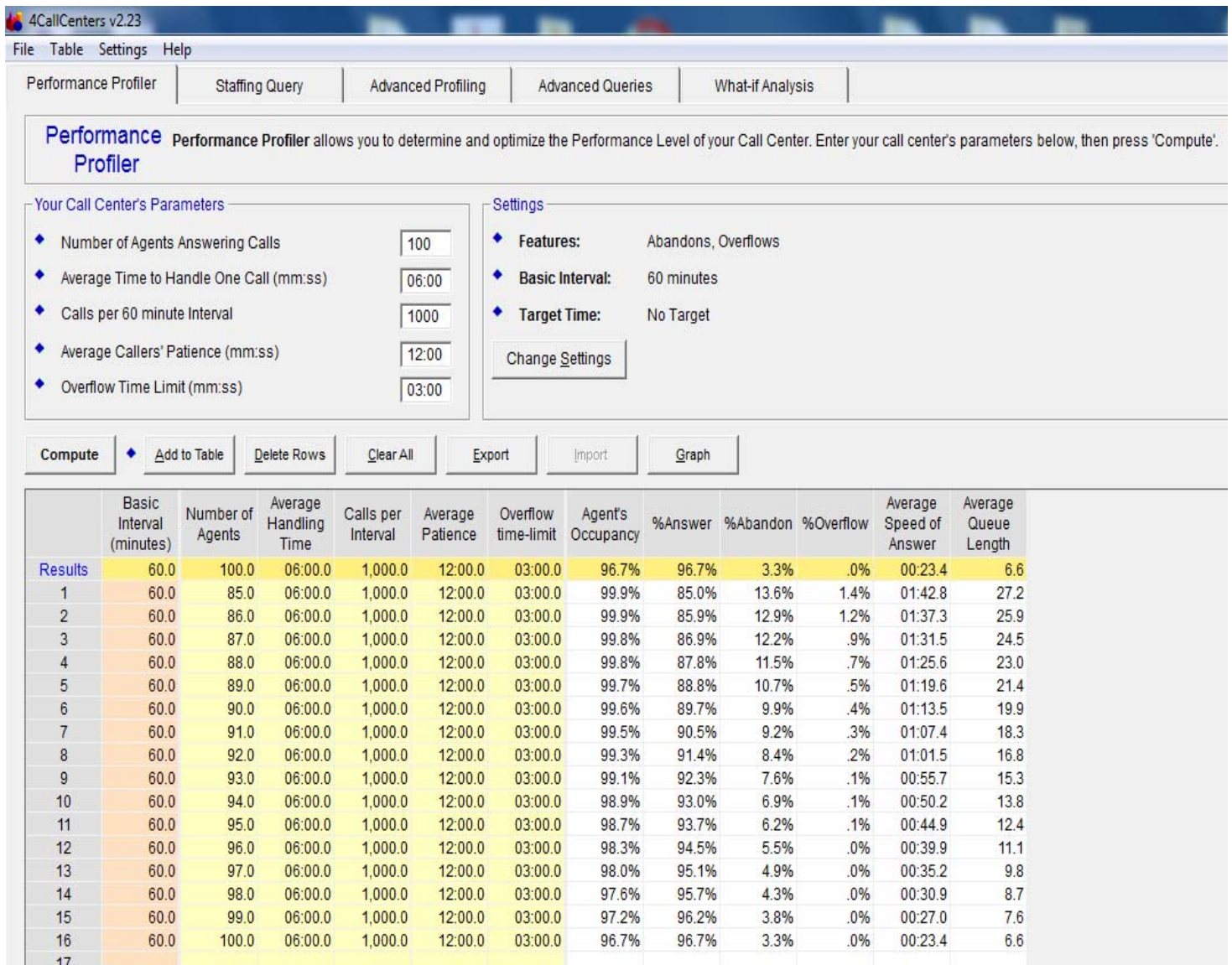
3.3.1 אריק טוען כי שיטתו תתאר טוב יותר את המתרחש במציאות, מדוע הוא צודק? פרטו!

תשובה:

אריק צודק מאחר ואותם לקוחות אשר הופנו למערכת אחרת (שם יחזרו אליהם לאחר לא יותר משלוש שעות) יוצאים מהמערכת ומפנים מקום ללקוחות שיופיעו אח"כ (דומה הדבר לנטישה אחרי 3 דקות). תופעה זאת מתבצעת במודל עם ה Overflows ולא במודל המקורי עם ה Target Time (שם נשארים במערכת להמתין גם יותר מ 3 דקות).

חלק דף זה
נשאר ריק

להלן פלט ה 4CC של המודל הנ"ל:



נניח כי עלות מוקדן היא 40 ₪ לשעה, וכי הנהלת המוקד מעוניינת ליצור תמריץ לכך שהלקוחות יקבלו שירות טוב (זמני המתנה נמוכים ואחוז נטישה נמוך). הנהלת המוקד קובעת לכן כי על אריק להתייחס לעלות שעת המתנה של לקוח כקנס של 6 ₪ וכל נטישה תעלה למוקד 15 ₪. כמו כן, כדי להתאים את המוקד לחוק החדש, קובעת ההנהלה כי כל לקוח אשר המתין יותר משלש דקות (וכתוצאה מכך עזב את המערכת) ילווה בקנס למערכת של 30 ₪.

3.3.2 מה תהיה פונקציית העלות הממוצעת לשעה במוקד תחת משטר התמריצים הנ"ל? נמקו!

תשובה:

נסמן ב C_t את העלות בשעה t .

$$C_t = 20 \cdot N_t + 2 \cdot L_{qt} + 15 \cdot \frac{\%Abandon_t}{100} \cdot 1000 + 30 \cdot \frac{\%Overflow_t}{100} \cdot 1000$$

כאשר:

$20 \cdot N_t$ היא עלות המוקדנים עבור מספר המוקדנים אשר עבדו בשעה זו.

$2 \cdot L_{qt} = 2 \cdot \frac{E(W_q)_t}{60} \cdot 1000$ היא עלות ההמתנה עבור זמן ההמתנה בשעה זו.

$15 \cdot \frac{\%Abandon_t}{100} \cdot 1000$ היא עלות הנטישה עבור מספר הנוטשים בשעה זו.

$30 \cdot \frac{\%Overflow_t}{100} \cdot 1000$ היא עלות הלקוחות אשר המתינו יותר משלש דקות.

3.3.3 מלאו את הטבלה הבאה, כאשר העמודה הריקה (עמודת העלות) תחושב לפי הנוסחה שהצעתם בסעיף הקודם. מהו האיוש האופטימאלי?

Number of Agents	Calls per Interval	P(Abandon)	P(Overflow)	Average Queue Length	Cost
90	1000	0.099	0.004	19.895	3938.37
91	1000	0.092	0.003	18.341	3932.046
92	1000	0.084	0.002	16.8	3924.8
93	1000	0.076	0.001	15.287	3917.722
94	1000	0.069	0.001	13.819	3941.914
95	1000	0.062	0.001	12.411	3966.466

ולכן האיוש האופטימאלי יהיה 93 מוקדנים.

3.3.4 מהי, לפי דעתכם, הדרך בה קבעה הנהלת המוקדן את מחירי ההמתנה, נטישה והמתנה של יותר משלש דקות?

תשובה:

עלות המתנה של 6 ש"ח לשעת המתנה: לפי כלל ה-1-800, ההנהלה לקחה כחסם תחתון את עלות זמן ההמתנה במערכת בה עלות זמן האוויר היא על חשבון המערכת עצמה. בהנחה שעלות זו קטנה מ-10 אגורות לדקה נקבע את העלות להיות 10 אגורות לדקה, כלומר 6 ש"ח לשעה.

עלות נטישה של 15 ש"ח לנטישה: נקבעו על סמך הערכה הכוללת בתוכה את מספר הלקוחות ש"איבדנו" כתוצאה מניתוקם והירידה בשביעות רצונם מהשירות המתקבל של אלו שנטשו.

עלות המתנה של מעל ל-3 דקות ללקוח: כדי לעמוד בדרישות החוק החדש, המערכת צריכה לשפוט עד כמה לקוח, אשר המתין שלוש דקות וחיכה שיחזרו אליו, פוגע באיכות השירות הניתנת.

עלות מוקדן של 40 ש"ח לשעה: מבחינת המערכת עלות המוקדן לא מסתכמת רק בשכרו אלא בהוצאות אחרות כגון עלות כוח האם המטפל בו תנאים סוציאליים וכו', הערכת כלל העלויות היא 40 ש"ח לשעת עבודה של מוקדן אחד.

3.3.5 מאחר ותהליך קביעת העלויות (המתנה, נטישה והמתנה יותר משלש דקות) מבוסס על הערכות בלבד, נדרשת בדיקה בה נבדוק האם העלויות אשר קבענו יהיו הערכה מספיק טובה למטרותנו (קביעת מספר השרתים האופטימאלי). הציעו דרך שבה תוכלו לבדוק את "טיב" ההערכות של העלויות.

תשובה:

מאחר והעלויות נקבעו כהערכה, נבדוק שהמודל לא רגיש לטעויות בהערכה. כלומר, במידה ושינוי לא גדול באחת העלויות יגרום לשינוי גדול במספר המוקדנים המומלץ, נלמד כי נדרש מאמץ נוסף להבטיח שהאמד שבידנו אכן מדויק. בפועל, נשנה את הערכים של העלויות על פני טווח סביר (לדוגמא, נבדוק עבור עלות המתנה מהטווח 2 ש"ח - 10 ש"ח) ונבדוק מה כעת תהיה המלצת האיוש, במידה והמספר יהיה קרוב להמלצה המקורית (המתאימה ל-2 ש"ח). נלמד שההערכות שלנו שימושיות דיו.

3.3.6 נניח כי אותם מוקדנים אשר עונים לשיחות, הם אלו אשר חוזרים ללקוחות אשר המתינו יותר משלש דקות. בנוסף, נניח כי משך ממוצע של שיחה בה מוקדן חוזר אל הלקוח היא 10 דקות. מהי כעת נצילות המוקדנים? עליכם לענות גם עבור האיוש האופטימאלי שמצאתם בסעיף 3.3.3 וגם עבור האיוש המקורי של המוקד (85 שרתים). מהי המשמעות של ההבדלים בין שתי התוצאות?

תשובה:

עבור האיוש המקורי:

עבור 85 מוקדנים, פרופורציית הזמן שהמוקדנים עסוקים בשיחות נכנסות היא $\rho_1 = 0.999$. בנוסף, 1.4% מהשיחות הנכנסות צריכות טיפול נוסף (אחרי שהשיחה "בילתה" בתור יותר משלש דקות צריך לחזור אליה). לכן קצב כניסת השיחות החוזרות הוא $\lambda_2 = 0.014 \cdot 1000 = 14$ כלומר 14 שיחות לשעה, משך שיחה ממוצעת הוא 10

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2 \cdot \frac{1}{6}}{n} = \frac{14 \cdot \frac{1}{6}}{85} \approx 0.027 \text{ ולכן הנצילות תהיה } \rho = \min\{\rho_1 + \rho_2, 1\} = \min\{1.026, 1\} = 1$$

עבור האיוש החדש:

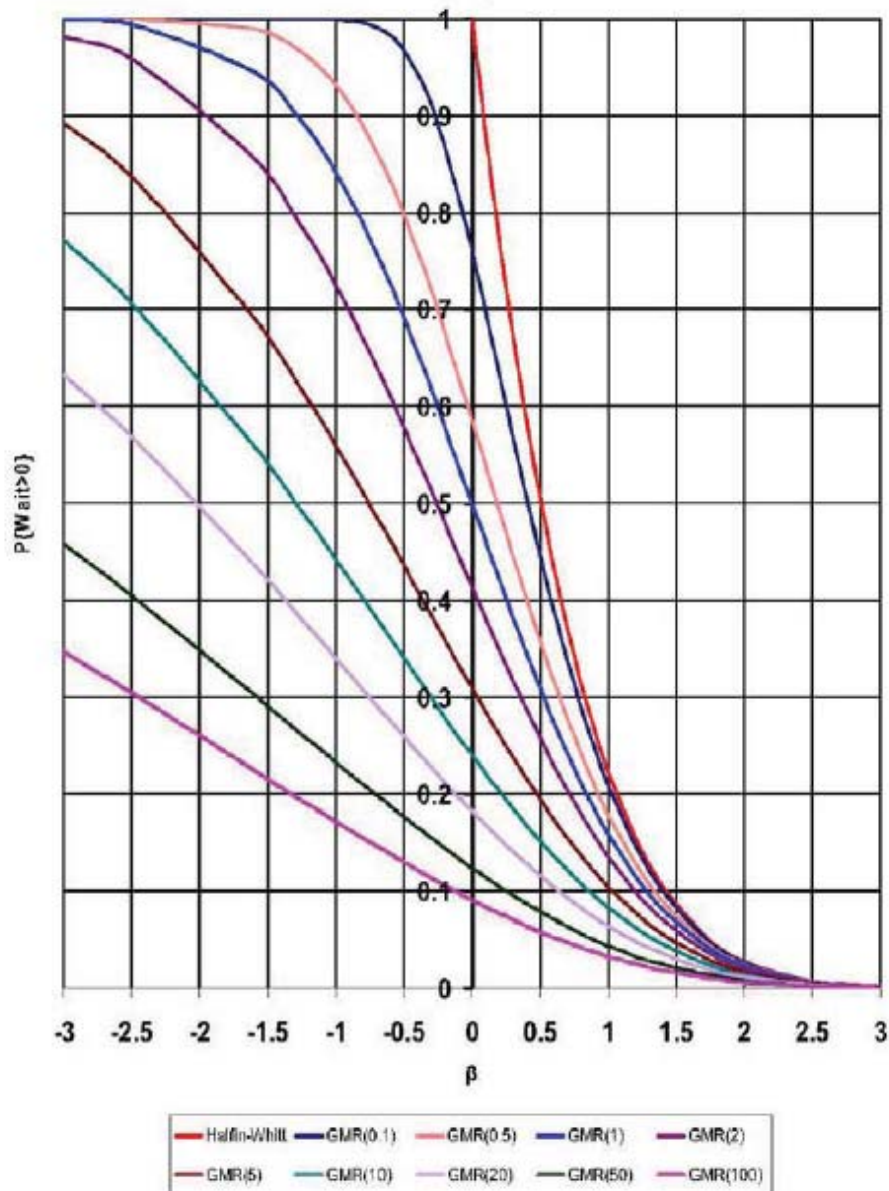
עבור 93 מוקדנים, פרופורציית הזמן שהמוקדנים עסוקים בשיחות נכנסות היא $\rho_1 = 0.991$. בנוסף 0.1% מהשיחות הנכנסות צריכות טיפול נוסף (אחרי שהשיחה "בילתה" בתור יותר משלש דקות צריך לחזור אליה). לכן קצב כניסת השיחות החוזרות הוא $\lambda_2 = 0.001 \cdot 1000 = 1$ כלומר שיחה לשעה, משך שיחה ממוצעת הוא 10 דקות ולכן

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2 \cdot \frac{1}{6}}{n} = \frac{1 \cdot \frac{1}{6}}{93} \approx 0.002 \text{ ולכן הנצילות תהיה } \rho = \rho_1 + \rho_2 = 0.993$$

המשמעות היא שעבור האיוש הנוכחי, המערכת תתפוצץ (נצילות שווה ל 1) לעומת האיוש שבחרנו (כאשר התייחסנו לחוק החדש) שקטנה מאחד ובנוסף לא משתנה הרבה מאחר ואין שיחות רבות אשר צריך לחזור אליהן.

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .

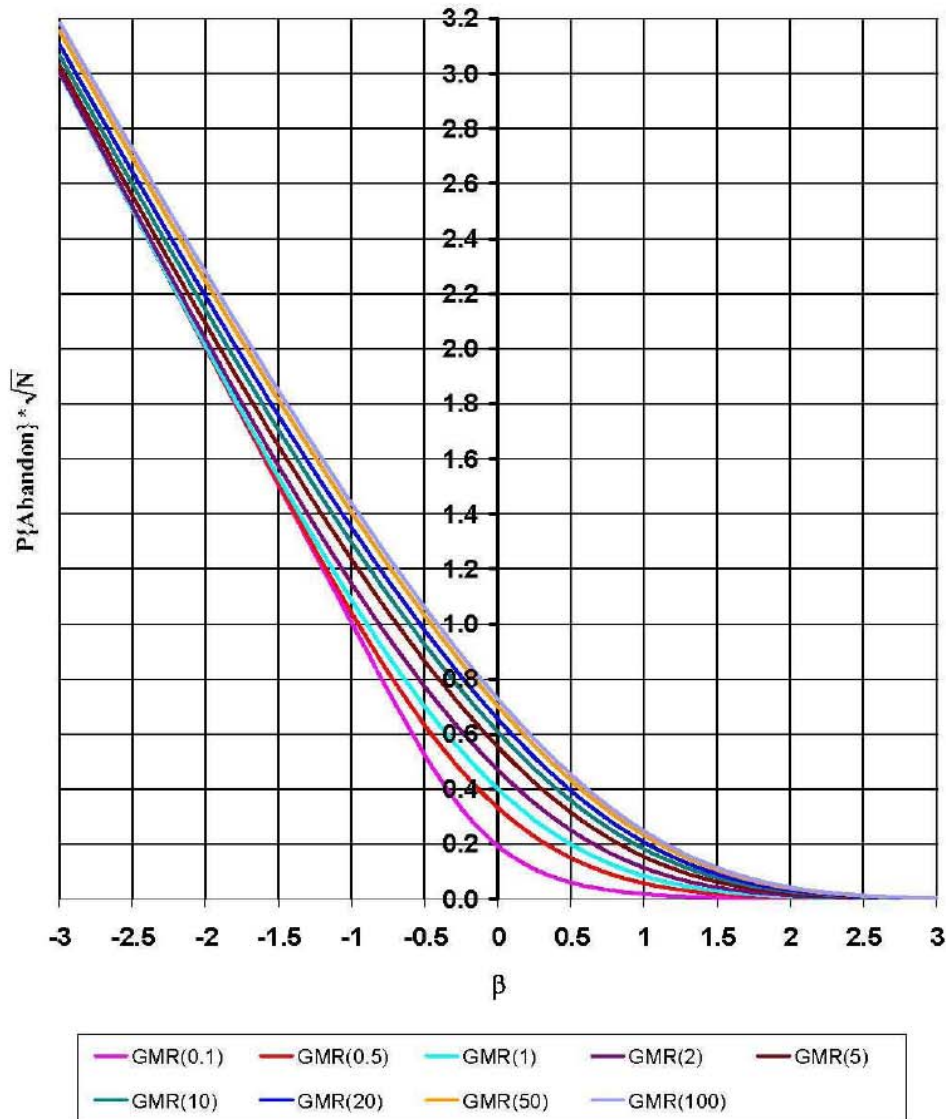


GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\theta/\mu = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

Note: **Erlang-C** = limit of **Erlang-A**, as patience $\uparrow$ indefinitely.

Erlang-A: % Abandonment

$\%Ab \times \sqrt{n}$ vs. β , for varying (im)patience (θ/μ):



Note the behavior like $-\beta/\sqrt{n}$, for (relatively) large negative β and over all (im)patience levels. For an explanation, think **ED**: $n = R + \beta\sqrt{R} = R - \gamma R$; hence $\gamma \approx -\beta/\sqrt{R} \approx -\beta/\sqrt{n}$, and γ is $P\{Ab\}$ in the ED-Regime.

שאלה 4 תיאוריה (10 נקודות)

4.1 בכיתה הוסבר שאמד לממוצע הסבלנות של לקוח ניתן על ידי

$$\text{סבלנות ממוצעת} = \frac{\text{סך הכל זמן ההמתנה (של משורתיים או נוטשיים)}}{\text{מספר הנוטשיים}}$$

הצגה (*)

הסבירו כיצד ניתן להסיק מהאמד הנ"ל את ההצגה:

$$\text{סבלנות ממוצעת} = \text{זמן ההמתנה של נוטשיים} + \text{זמן ההמתנה של משורתיים} \times \text{אינדקס הסבלנות}$$

עבור הסברכם, הגדירו במדויק את אינדקס הסבלנות.

תשובה:

$$\frac{\text{No. of served}}{\text{No. of abandoned}} = \frac{\% \text{ served}}{\% \text{ abandoned}} \quad \text{הגדרת אינדקס סבלנות אמפירי:}$$

להבדיל מאינדקס תיאורטי, שעבורו ההגדרה המקורית היתה

$$\frac{\text{Willing to wait}}{\text{Expected to wait}} = \frac{\tau}{V} \quad \text{for experienced customers}$$

הסבר:

$$= \frac{\text{סך הכל זמן ההמתנה (של משורתיים או נוטשיים)}}{\text{מספר הנוטשיים}}$$

$$= \frac{\text{זמן ההמתנה של נוטשיים}}{\text{מספר הנוטשיים}} + \frac{\text{מספר משורתיים}}{\text{מספר משורתיים}} \times \frac{\text{זמן ההמתנה של משורתיים}}{\text{מספר הנוטשיים}}$$

$$= \frac{\text{זמן ההמתנה של נוטשיים}}{\text{מספר הנוטשיים}} + \frac{\text{מספר משורתיים}}{\text{מספר משורתיים}} \times \frac{\text{זמן ההמתנה של משורתיים}}{\text{מספר הנוטשיים}}$$

$$\text{סבלנות ממוצעת} = \text{זמן ההמתנה של נוטשיים} + \text{זמן ההמתנה של משורתיים} \times \text{אינדקס הסבלנות}$$

4.2 הסבירו כיצד ניתן להסיק את ההצגה (*), כאשר משך הסבלנות מתפלג מעריכית?

על איזה בעיה סטטיסטית של אמידה מתגברים באופן זה?

רמז: השתמשו בקרוב גיאומטרי להתפלגות המעריכית.

תשובה:

השיטה מתגברת על בעיית אמידה על סמך נתונים קטומים.

הסבר: אם X מתפלג מעריכית, אזי כל עיגול של X מתפלג גאומטרי (למשל לחלק השלם, או לקרוב עד ספרה ראשונה (שנייה, שלישית, ...) אחרי הנקודה).

לכן, נקרב את הסבלנות המעריכית בעזרת התפלגות גאומטרית, ונוכיח הטענה עבור ההתפלגות הגאומטרית. ז"א, נניח

שההצגה (*) הוא אמד לממוצע $\frac{1}{p}$.

נניח כי הסבלנות היא מהתפלגות $Geo(p)$, כאשר בכל יחידת זמן (למשל שנייה), הממתין מטיל מטבע, כך שבסיכוי p

נוטש ובסיכוי $1-p$ מחכה שנייה נוספת. אזי אמד $\hat{p}$ ל p הוא:

$$\hat{p} = \frac{\text{מספר הצלחות}}{\text{מספר ניסיונות}}.$$

אבל מספר ניסיונות = סכה"כ שניות המתנה (של המשורתים והנוטשים)

מספר הצלחות = מספר הנטישות

ולכן הצבה נותנת את ההצגה (*), המייצגת את $\frac{1}{p}$ = ממוצע הזמן עד נטישה.

4.3 בכתה הוכח שעבור סבלנות מעריכית $\exp(\theta)$, מתקיים היחס $P(Ab) = \theta E(W_q)$.

הוכיחו יחס זה וקשרו אותו להצגה (*) מסעיף 4.1.

הוכחה

קצב נטישה $= \lambda P(Ab) = \theta E(L_q) = \theta E(W_q)$. צמצום λ בכל אגף נותן את $P(Ab) = \theta E(W_q)$.

לבסוף, אם נחלק ב (*) את המונה והמכנה במספר הלקוחות הנדון, נקבל:

$$E(W_q) \approx \frac{\text{מספר נוטשים}}{\text{מספר לקוחות}} = \text{מונה}$$

$$P(Ab) \approx \frac{\text{מספר נוטשים}}{\text{מספר לקוחות}} = \text{מכנה} \quad \text{כנדרש.}$$

4.4 נניח שנדרש לחשב מדדים תפעוליים עבור המודל $M / M / N + G$ (מופע פואסוני, שירות מעריכי, N שרתים וסבלנות כללית). אזי בתחום ה QED קיימים קרובים יחסית פשוטים למודל זה, בעזרת מודל Erlang-A. תארו קרובים אלו. כיצד ניתן לחשבם באופן פרקטי?

תשובה:

עבור $M / M / N + G$ בתחום ה QED נטען בכיתה שמתקיים:

$$P(Ab) \approx g(0)E(W_q)$$

כאשר $g(0)$ הוא ערך צפיפות הסבלנות בראשית (תוך ההנחה שמתקיים $g(0) > 0$). לכן את $g(0)$ אומדים כמו שנאמד את θ עבור סבלנות מהתפלגות $\exp(\theta)$ (ואכן $g(0) = \theta$ עבור התפלגות $\exp(\theta)$), ומחשבים את המדדים דרך נוסחאות Erlang-A הסטנדרטיות (עם $\theta = g(0)$).

4.5 Bumping מדיניות נפוצה במחלקות לטיפול נמרץ בבתי חולים, נקראת Bumping: כאשר מגיע מאושפז שדורש מיטה בטיפול נמרץ והמחלקה מלאה, מפנים מאושפז נוכח עבורו. נניח שמתעדים משכי אשפוז במחלקת טפול נמרץ על פני תקופה ארוכה, שכללה N מטופלים (N גדול דיו). נסמן ב $T_1, T_2, \dots, T_N$ את משכי האשפוז של מטופלים אלו. האם $\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_N}{N}$ מהווה אמד טוב לממוצע משך האשפוז בטיפול נמרץ? אם כן, הסבירו. אם לא, הסבירו והציגו תיקון ל $\bar{T}$ (תוך ציון ההנחות והנתונים בהם אתם משתמשים).

תשובה:

$\bar{T}$ אמד מוטה, כי עבור המטופלים שעוזבים את המחלקה עקב Bumping, נקבל משכי אשפוז מצונזרים (קצרים יותר) נסמן ב N_B את מספר המאושפזים במדגם שעזבו עקב Bumping. אזי התיקון ל $\bar{T}$, תחת הנחת של התפלגות

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_N}{N - N_B} \text{ הוא, למשך האשפוז בטיפול נמרץ,}$$

customer_id	priority	type	date	vru_entry	vru_exit	vru_time	q_start	q_exit	q_time	outcome	ser_start	ser_exit	ser_time	server
23703994	1	PS	990801	09:12:53	09:12:58	5	09:12:58	09:13:42	44	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
57918849	1	NE	990801	09:12:59	09:13:05	6	09:13:05	09:16:58	233	AGENT	09:16:57	09:22:22	325	NAAMA
0	0	NW	990801	09:13:37	09:13:46	9	09:13:46	09:14:36	50	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
42477224	2	PS	990801	09:13:46	09:13:52	6	09:13:52	09:14:18	26	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
1382043	2	PS	990801	09:14:05	09:14:11	6	09:14:11	09:14:52	41	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
58273764	2	PS	990801	09:14:45	09:14:51	6	09:14:51	09:19:31	280	AGENT	09:19:30	09:20:50	80	ANAT
38345369	1	PS	990801	09:14:48	09:14:53	5	09:14:53	09:20:56	363	AGENT	09:20:55	09:22:06	71	ANAT
58641638	2	PS	990801	09:15:28	09:15:34	6	09:15:34	09:19:35	241	AGENT	09:19:35	09:30:17	642	DORIT
14264295	2	PS	990801	09:15:31	09:15:37	6	09:15:37	09:19:40	243	AGENT	09:19:39	09:22:05	146	AVI
67710418	2	PS	990801	09:15:46	09:15:53	7	09:15:53	09:22:29	396	AGENT	09:22:27	09:23:34	67	NAAMA
50270297	2	PS	990801	09:16:07	09:16:12	5	09:16:12	09:16:12	0	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
3968047	2	PS	990801	09:16:38	09:16:43	5	09:16:43	09:22:40	357	AGENT	09:22:39	09:27:26	287	AVNI
0	0	IN	990801	09:16:46	09:17:03	17	00:00:00	00:00:00	0	AGENT	09:17:03	09:35:51	1128	YIFAT
22761092	1	PS	990801	09:16:51	09:16:57	6	09:16:57	09:17:28	31	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
43329655	2	PS	990801	09:16:53	09:16:59	6	09:16:59	09:22:10	311	AGENT	09:22:08	09:23:54	106	AVI
52586328	1	PS	990801	09:17:01	09:17:07	6	09:17:07	09:17:28	21	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
22761092	1	NE	990801	09:18:02	09:18:07	5	09:18:07	09:23:59	352	AGENT	09:23:57	09:28:40	283	AVI
0	0	NW	990801	09:18:08	09:18:17	9	09:18:17	09:19:41	84	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
3267788	2	PS	990801	09:18:27	09:18:33	6	09:18:33	09:23:40	307	AGENT	09:23:38	09:29:07	329	NAAMA
29566940	1	PS	990801	09:18:39	09:18:44	5	09:18:44	09:26:52	488	AGENT	09:26:51	09:33:06	375	AVI
25165374	1	PS	990801	09:19:01	09:19:07	6	09:19:07	09:20:11	64	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
55476253	2	NE	990801	09:19:47	09:19:53	6	09:19:53	09:30:16	623	AGENT	09:30:01	09:34:18	257	YITZ
1161660	2	PS	990801	09:19:56	09:20:03	7	09:20:03	09:26:45	402	AGENT	09:26:44	09:30:16	212	VICKY
0	0	NW	990801	09:20:06	09:20:15	9	09:20:15	09:26:39	384	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
58886011	2	PS	990801	09:20:18	09:20:23	5	09:20:23	09:21:32	69	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
54042171	2	NE	990801	09:21:02	09:21:08	6	09:21:08	09:29:14	486	AGENT	09:29:13	09:35:19	366	NAAMA
0	0	NW	990801	09:21:40	09:21:50	10	09:21:50	09:30:57	547	AGENT	09:30:56	09:34:33	217	STEREN
1460617	2	PS	990801	09:21:47	09:21:53	6	09:21:53	09:27:33	340	AGENT	09:27:33	09:29:52	139	AVNI
28934784	2	PS	990801	09:21:59	09:22:04	5	09:22:04	09:26:06	242	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
0	0	IN	990801	09:22:25	09:22:34	9	09:22:34	09:22:51	17	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
34531269	1	PS	990801	09:22:29	09:22:35	6	09:22:35	09:24:42	127	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
0	0	NW	990801	09:22:49	09:22:58	9	09:22:58	09:23:27	29	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
306948266	2	PS	990801	09:23:02	09:23:08	6	09:23:08	09:25:54	166	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
53394052	2	PS	990801	09:23:15	09:23:21	6	09:23:21	09:30:28	427	AGENT	09:30:27	09:34:22	235	AVNI

time	Arr_sys	Dep_sys	Arr_q	Dep_q	Arr_ser	Dep_ser
09:00	189	174	150	140	137	132
09:01	190	177	151	144	138	132
09:02	195	179	156	145	139	134
09:03	197	183	158	150	142	136
09:04	198	184	158	151	143	137
09:05	201	186	162	153	145	139
09:06	204	189	165	155	145	140
09:07	206	193	167	160	148	142
09:08	207	195	167	162	149	143
09:09	214	199	174	164	149	145
09:10	214	199	175	166	151	145
09:11	215	200	176	167	151	145
09:12	217	204	178	170	152	147
09:13	226	206	186	172	153	148
09:14	228	212	189	178	154	149
09:15	231	217	192	183	155	150
09:16	234	220	195	187	159	153
09:17	239	223	199	190	161	155
09:18	240	225	200	192	162	155
09:19	244	225	204	192	162	155
09:20	247	228	206	196	165	157
09:21	249	230	209	198	166	158
09:22	253	232	212	200	167	159
09:23	256	237	216	204	170	163
09:24	265	240	225	207	172	165
09:25	267	244	227	211	172	165
09:26	270	247	229	214	173	165
09:27	274	254	233	221	175	167
09:28	279	257	238	224	176	168
09:29	281	260	239	227	176	168
09:30	286	267	245	232	177	171
09:31	292	270	251	237	182	174
09:32	297	274	256	241	183	175
09:33	303	276	262	243	183	175
09:34	307	286	266	253	186	178
09:35	313	294	272	261	191	183
09:36	321	301	278	267	193	186
09:37	324	307	282	273	196	189
09:38	328	309	287	275	196	189
09:39	332	314	290	281	199	191
09:40	338	322	297	288	202	195
09:41	345	325	304	292	204	196
09:42	347	327	305	294	206	198
09:43	349	332	307	298	209	202
09:44	353	336	311	302	212	205
09:45	357	341	316	307	215	208
09:46	359	345	318	310	217	211
09:47	365	346	323	312	218	211
09:48	369	350	328	314	218	213
09:49	371	354	330	320	222	215
09:50	376	357	335	324	224	216
09:51	380	364	338	329	228	222
09:52	381	370	340	336	231	224
09:53	385	371	343	336	231	225