



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגלת : שמרית ממך

תאריך הבחינה : 17.06.2008

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד ב' – סמסטר חורף תשס"ח 2008

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 25 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

ניקוד:	שאלה 1	_____ מתוך 10 נקודות	תרגילי בית
	שאלה 2	_____ מתוך 13 נקודות	הרצאות/תרגולים/בחינות קודמות
	שאלה 3	_____ מתוך 17 נקודות	יישום
	שאלה 4	_____ מתוך 10 נקודות	תיאוריה

סה"כ _____ מתוך 50 נקודות

בהצלחה!

שאלה 1 תרגילי בית (10 נקודות)

חלק 1. מודל נזלים

Tele-SHOP היא חברה העוסקת במכירות המתבצעות באמצעות מוקד שירות טלפוני. ניתן לתאר את הגעת השיחות למוקד השירות ע"י תהליך פואסון לא הומוגני בזמן עם פונקצית הקצב $\lambda(t)$. המוקד פועל בשעות 00:00-16:00. נסמן אינטרוול זמן זה ב- $[0, T]$.

ממוצע זמן שירות של שיחה הינו $\frac{1}{\mu}$ דקות וממוצע סבלנותו של לקוח (עד נטישה) הינו $\frac{1}{\theta}$.

הניחו כי עלות העסקת שרת הינה c ש"ל לדקה ועלות המתנה הינה h ש"ל לדקה. עוד הניחו כי הרווח מסיום שירות הינו r ש"ל והקנס על נטישת לקוח הינו s ש"ל.

נסמן ב- $Q(t)$ את מספר הלקוחות במערכת בזמן $0 \leq t \leq T$,

וב- $N(t)$ את מספר המוקדנים במערכת בזמן $0 \leq t \leq T$.

1.1.1 כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $Q(t)$, $0 \leq t \leq T$.

תשובה:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \lambda(t) - \mu(Q(t) \wedge N(t)) - \theta(Q(t) - N(t))^+$$

1.1.2 תארו בקיצור איך ניתן, בעזרת גיליון אלקטרוני בלבד, לפתור בקירוב (מדויק ככל הנדרש) את המשוואה הדיפרנציאלית בסעיף 1.1.1.

תשובה:

נתחיל עם $Q(0)$ נתון. לאחר מכן, עבור $t_n = t_{n-1} + \Delta$, $n = 1, 2, \dots$, נחשב,

$$Q(t_n) = Q(t_{n-1}) + \lambda(t_{n-1})\Delta - \mu(Q(t_{n-1}) \wedge N(t_{n-1}))\Delta - \theta(Q(t_{n-1}) - N(t_{n-1}))^+ \Delta$$

ונקבל את $Q(0), Q(\Delta), Q(2\Delta), \dots$. ככל ש- Δ קטן יותר, כך הקירוב מדויק יותר.

1.1.3 רשמו ביטוי לאחוז הנוטשים באינטרוול $[0, T]$.

תשובה:

$$P\{Ab\} = \frac{\int_0^T \theta(Q(t) - N(t))^+ dt}{\int_0^T \lambda(t) dt}$$

1.1.4 על מנת לקבוע את פונקצית האיוש $\{N(t), t \geq 0\}$ המשיגה רווח יומי מקסימלי של מוקד השירות, יש לפתור בעיית אופטימיזציה.

רשמו את פונקצית המטרה של בעיית האופטימיזציה ואת אילוצי הבעיה.

תשובה:

נסמן:

c – עלות מוקדן ליח' זמן, h – עלות המתנת לקוח ליח' זמן, r – רווח מסיום שירות, s – קנס על נטישת לקוח.

פונקצית המטרה:

$$C(N) = \int_0^T \left[r\mu(Q(t) \wedge N(t)) - (s\theta + h)(Q(t) - N(t))^+ - cN(t) \right] dt$$

המטרה, להביא למקסימום את $C(N)$ (על $N(t)$, $0 \leq t \leq T$), תחת האילוצים:

- $\frac{dQ(t)}{dt} = \lambda(t) - \mu(Q(t) \wedge N(t)) - \theta(Q(t) - N(t))^+$
- $N(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T$

הניחו כעת כי מספר השרתים קבוע במהלך יום העבודה. באמצעות בעיית האופטימזציה שכתבתם בשאלה 1.1.4 ובעזרת Excel solver, ניתן למצוא את N^* - מספר השרתים האופטימלי שמביא למקסימום רווח של המוקד.

1.1.5 כיצד ישתנה הערך N^* כאשר ערכו של הרווח מסוים שירות בודד, r , עולה? תארו, בדיוק רב ככל שתוכלו, את התנהגות N^* כאשר r גדל לאינסוף.

תשובה:

כאשר r גדל ועלויות המערכת נותרות קבועות, כדאי להעסיק יותר שרתים כדי למנוע נטיות מהמערכת.

כאשר r גדל לאינסוף, N^* מתכנס לערך סופי, כאשר

$N^* = \max R(t)$ ו- $R(t)$ הוא פתרון המשוואה הדיפרנציאלית $\frac{dR(t)}{dt} = \lambda(t) - \mu R(t)$, כלומר $R(t)$ הוא מספר

הלקוחות במערכת עם אינסוף מוקדנים = העומס המוצע על המערכת בזמן t .

הנתונים הבאים נאספו עבור כל שופט בבית הדין לעבודה בחיפה, על פני שנה מסויימת: מספר התיקים שהיו בטיפול בסוף כל חודש, ומספר התיקים שנסגרו בכל חודש.

אב בית הדין מעוניין להעריך את זמן השהייה הממוצע של תיק בבית הדין – עבור כל שופט בנפרד ובסה"כ.

יהי $i = 1, 2, \dots, 12$, אינדקס החודש בשנה הנתונה. נסמן ב- L_{ij} את מספר התיקים שהיו בטיפול בסוף חודש i אצל שופט j , וב- λ_{ij} את מספר התיקים שנסגרו בחודש i אצל שופט j . הניחו כי ישנם N שופטים. את תשובותיכם לשאלות הבאות, בטאו אך ורק בעזרת המדדים L_{ij} ו- λ_{ij} .

1.2.1 מהו ממוצע זמן השהייה הממוצע של תיק, W_j , בבית הדין עבור שופט השופט j ?

תשובה:

$$\left. \begin{aligned} \bar{L}_j &= \frac{\sum_{i=1}^{12} L_{ij}}{12} \\ \bar{\lambda}_j &= \frac{\sum_{i=1}^{12} \lambda_{ij}}{12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_j = \frac{\bar{L}_j}{\bar{\lambda}_j} = \frac{\sum_{i=1}^{12} L_{ij}}{\sum_{i=1}^{12} \lambda_{ij}}$$

1.2.2 מהו ממוצע זמן השהייה הממוצע של תיק, W , בבית הדין?

תשובה:

$$W = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{12} L_{ij}}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{12} \lambda_{ij}} = \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{\lambda} \cdot W_j$$

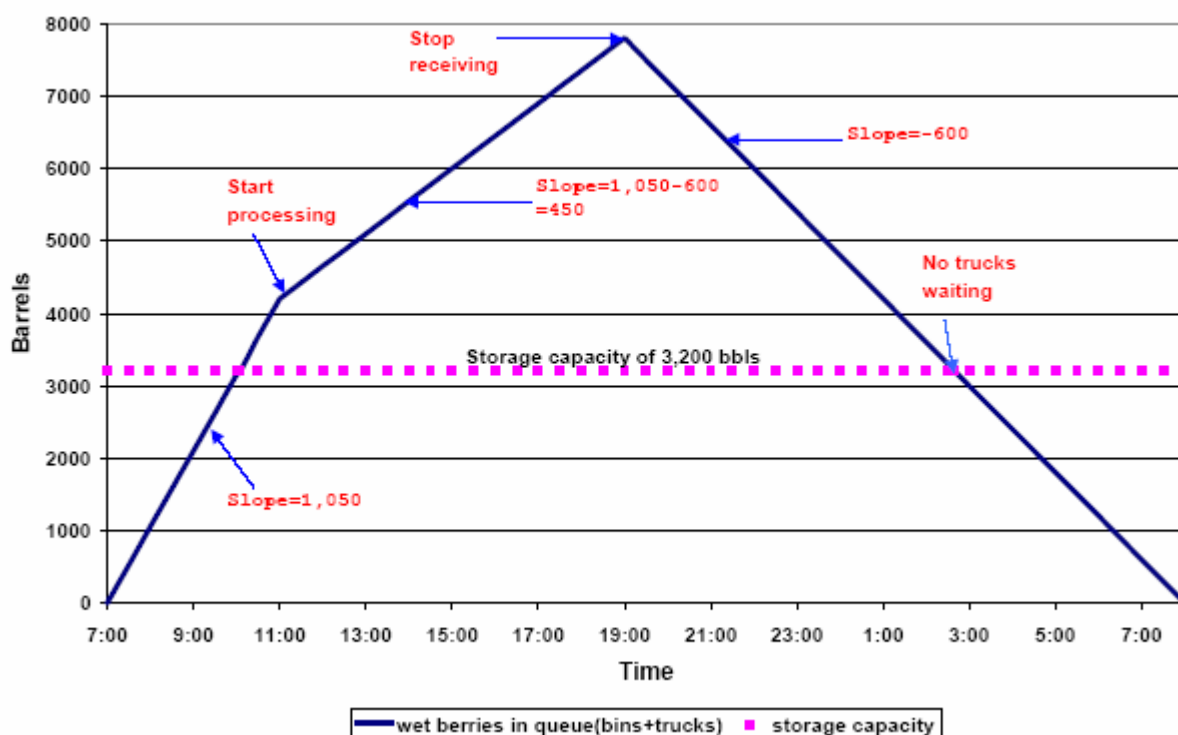
שאלה 2 הרצאות / תרגולים / בחינות קודמות (13 נקודות)

חלק 1. National Cranberry

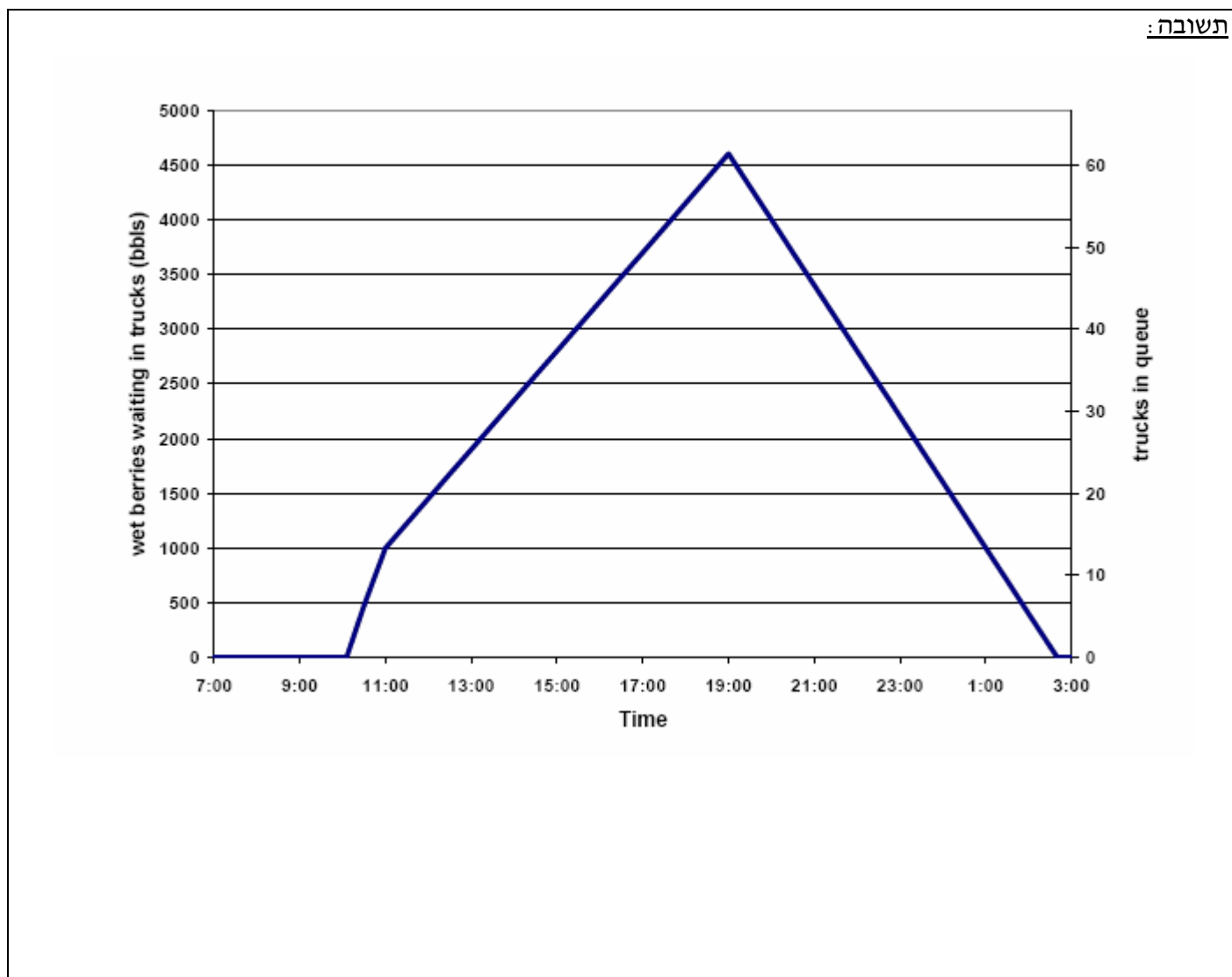
אל מפעל ייבוש ועיבוד חמוציות מגיעות ביום עבודה 18,000 חביות חמוציות, כאשר בכל חבית 100 פאונד חמוציות. 70% מהחמוציות רטובות ודורשות ייבוש טרם עיבודן. החביות מועברות מאזור הקטיף למפעל על ידי משאיות, כאשר על כל משאית בממוצע 75 חביות. בשאלה זו נתמקד ונעסוק בתור החמוציות הרטובות. בכניסה למפעל, החמוציות הרטובות מועברות מהמשאיות, למיכל שקיבולתו היא כקיבולת של 3200 חביות. במידה ומשאית מגיעה למפעל והמיכל מלא, היא ממתינה בתור המשאיות. משאיות מגיעות למפעל החל מ 07:00 בבוקר ועד 19:00 בערב. במפעל 3 מייבשים, כשקצב הייבוש על ידי כל מייבש הוא 200 חביות בשעה. תהליך ייבוש החמוציות מתחיל ב- 11:00 בבוקר ומסתיים כאשר ייבוש כל החמוציות הרטובות של אותו יום העבודה הושלם.

2.1.1 ציירו את דיאגרמת המלאי של חביות חמוציות רטובות במהלך יום עבודה.

תשובה:



2.1.2 ציירו את דיאגרמת תור המשאיות (מספר המשאיות בתור) במהלך יום עבודה.



2.1.3 חשבו את קצב מעבר המשאיות בתור. בתשובתכם התייחסו רק למשאיות שבפועל המתינו בתור. דהיינו, התייחסו רק לאינטרוול הזמן בו תור המשאיות אינו ריק.

תשובה:

$$\lambda = [0 \cdot 1 + 600 \cdot 15\frac{2}{3}] / [16\frac{2}{3} \cdot 75] = 7.52 \text{ trucks / hour}$$

2.1.4 חשבו את ממוצע אורך תור המשאיות עבור אינטרוול הזמן שבו התור אינו ריק.

תשובה:

$$\frac{Area_under_curve}{time_interval_length} = \frac{\frac{1}{75} (0.5 \cdot 1 \cdot 1000 + 0.5 \cdot (1000 + 4600) \cdot 8 + 0.5 \cdot 4600 \cdot 7 \frac{2}{3})}{16 \frac{2}{3}} = 32.4 \text{ trucks}$$

2.1.5 חשבו את ממוצע זמן המתנת המשאיות שהמתינו בתור.

תשובה:

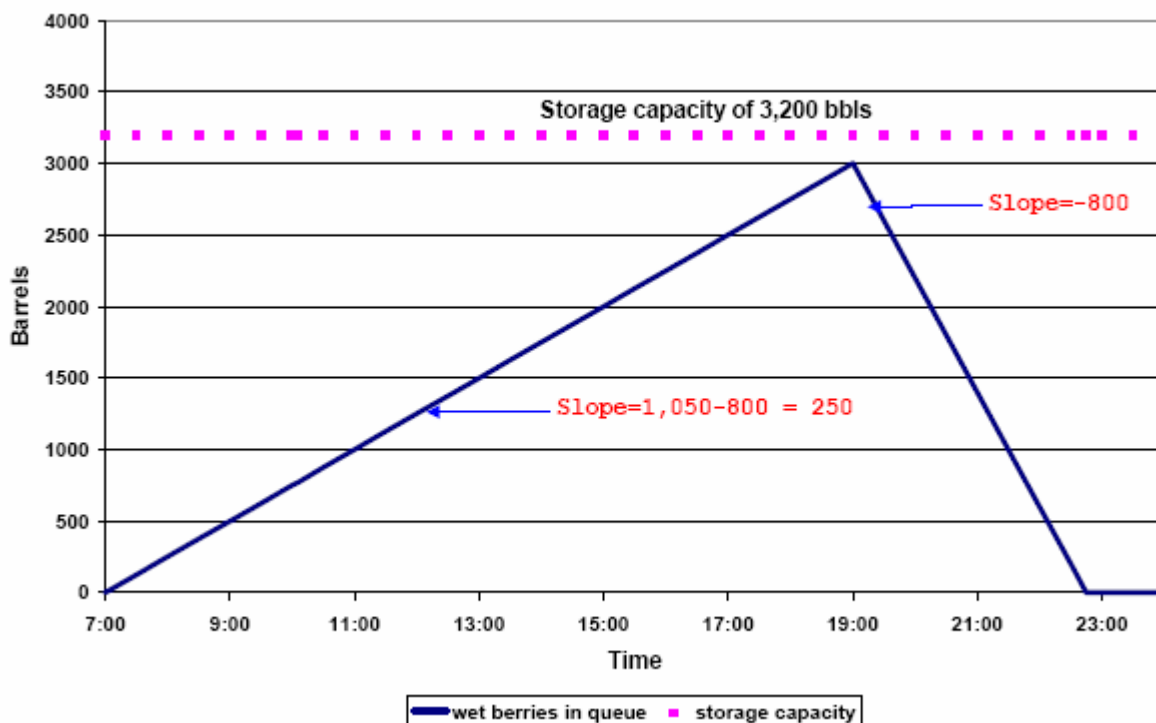
לפי חוק Little,

$$E(W_q | W_q > 0) = \frac{32.4}{7.5} = 4.3 \text{ hours}$$

הניחו כעת כי תהליך הייבוש מתחיל ב- 07:00 בבוקר וכי הוסיפו מייבש נוסף עם קצב ייבוש של 200 חביות בשעה.

2.1.6 תחת הנחות אלו, ציירו את דיאגרמת מלאי החמוציות הרטובות במהלך יום עבודה.

תשובה :



2.1.7 מה תוכלו לומר על תור המשאיות לאחר השינויים בתפעול המערכת? בתשובתכם התייחסו לשני מקרים : מערכת דטרמיניסטית ומערכת סטוכסטית.

תשובה :

כאשר נסתכל על המערכת כמערכת דטרמיניסטית – אין תור של משאיות. בעצם, ע"י השינויים התפעוליים שנעשו ביטלנו את התורים ברי החיזוי במערכת.
כאשר נסתכל על מודל של מערכת סטוכסטית, סביר כי ייווצר תור משאיות במהלך היום, אך זהו תור סטוכסטי שאינו בר חיזוי.

חלק 2. סבלנות

את חווית ההמתנה של לקוח במרכז טלפוני סיכמנו באופן הבא :

- הזמן שלקוח מצפה להמתין - E
- הזמן שלקוח מוכן להמתין - τ
- הזמן שלקוח נדרש להמתין - V
- הזמן שלקוח למעשה המתין - W
- הזמן שלקוח הרגיש שהמתין - F

2.2.1 מודל $Erlang-A$ דורש כקלט את הממוצע של רק אחד מחמשת הזמנים הנ"ל : מהו?

תשובה :

הזמן שלקוח מוכן להמתין.

2.2.2 מודל $Erlang-A$ נותן כפלט התפלגות של שניים מחמשת הזמנים הנ"ל : מהם?

תשובה :

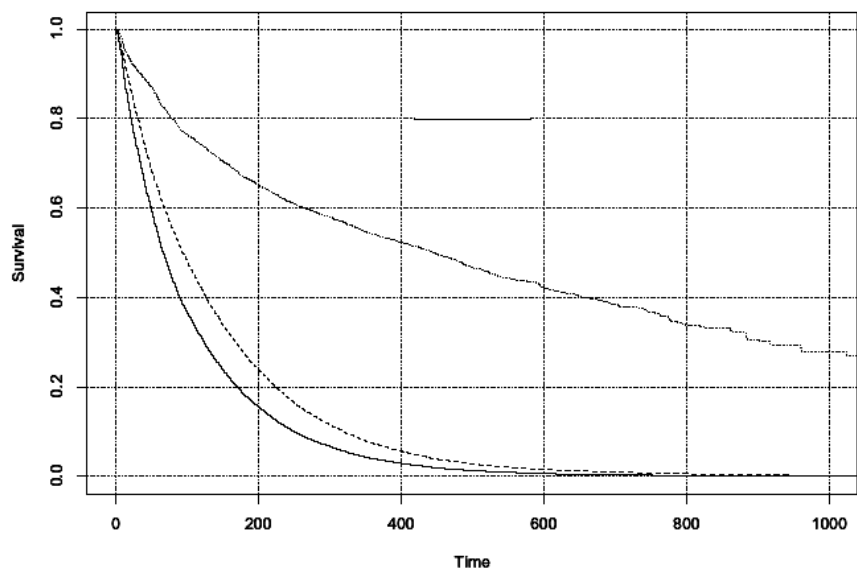
1. הזמן שלקוח נדרש להמתין.
2. הזמן שלקוח למעשה המתין.

2.2.3 כאשר לקוחות הם מנוסים ורציונליים, סביר להניח שחמשת הזמנים הנ"ל מיוצגים בעצם ע"י שלשת הזמנים מסעיפים 2.2.1 ו- 2.2.2. הסבירו בקצרה הנחה זו.

תשובה :

עבור לקוחות מנוסים : מצפה = נדרש.
עבור לקוחות רציונליים : למעשה = הרגיש.
ולכן אנו נותרים עם שלשת הזמנים הבאים : הזמן שלקוח מוכן להמתין, הזמן שלקוח נדרש להמתין והזמן שלקוח למעשה המתין.

הגרף הבא מתאר שלוש פונקציות שרידות (Survival Functions) אמפיריות של שלושת הזמנים מסעיפים 2.2.1 ו-2.2.2, כפי שנאמדו במוקד טלפוני.



2.2.4 לאיזה זמן מתאים הגרף התחתון? הסבירו בקצרה.

תשובה:

הזמן שלקוח למעשה המתין.

מכיוון ש- $W = \min(\tau, V)$, W קטן סטוכסטית גם מ- τ וגם מ- V , ולכן פונקציית השרידות שלו קטנה מזו של τ ושל V .

2.2.5 נתון שבמוקד הטלפוני שבו נמדדו פונקציות השרידות, הלקוחות מאוד סבלניים. לאיזה זמן מתאים אז הגרף העליון? הסבירו בקצרה.

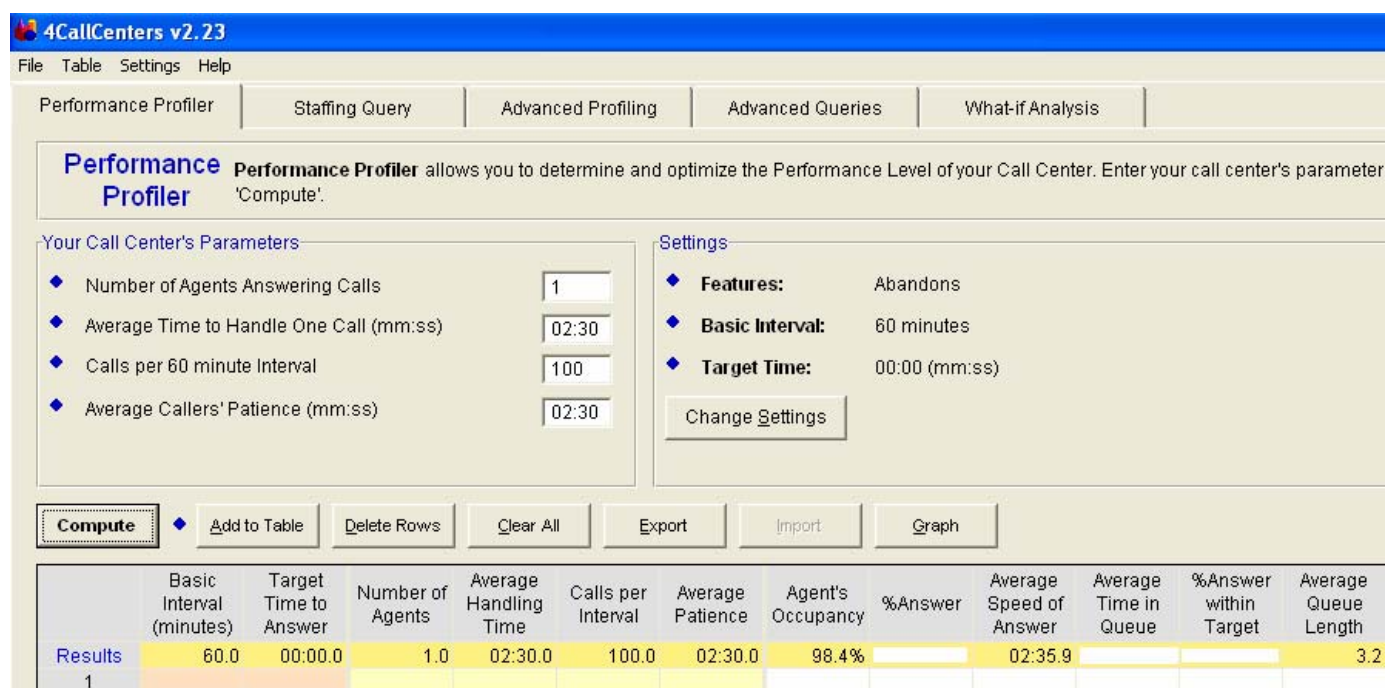
תשובה:

הזמן שלקוח מוכן להמתין.

סבלנות הלקוחות גבוהה, ולכן סביר להניח שהזמן שלקוח מוכן להמתין גדול סטוכסטית מהזמן שנדרש להמתין, ז"א פונקציית השרידות של τ מעל פונקציית השרידות של W ושל V .

חלק 1. Erlang-A

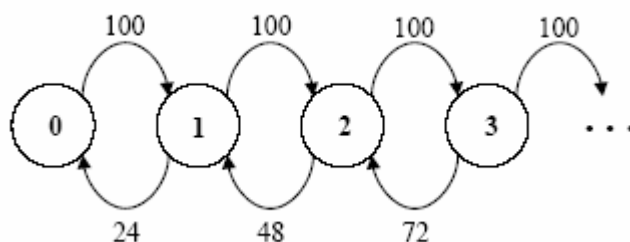
הטבלה הבאה הינה פלט מתוכנת 4CallCenters.



עבור המודל Erlang-A שתוצאות ניתוחו מוצגות בטבלה הנ"ל, נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t . אזי $L = \{L(t), t \geq 0\}$ הוא תהליך לידה ומוות.

3.1.1 ציירו את דיאגרמת קצבי המעבר של L .

תשובה:



3.1.2 לאיזו מערכת תורים נוספת מתאימה דיאגרמת קצבי המעבר שציירתם בשאלה הקודמת? רשמו את הסימון המקובל למודל המתמטי המתאים ואת ערכי הפרמטרים של המודל.

תשובה:

$$M | M | \infty$$

$$\lambda = 100 \frac{\text{customers}}{\text{hour}} ; \mu = 24 \frac{\text{customers}}{\text{hour}} ; N = \infty.$$

3.1.3 שחזרו את ערך תוחלת זמן ההמתנה בתור (בשניות) וחשבו את תוחלת זמן ההמתנה בתור (בשניות) של הלקוחות הממתינים. (ערכים אלו אינם מופיעים בטבלה.)

תשובה:

$$E(W_q)_{\text{Little}} = \frac{E(L_q)}{\lambda} = \frac{3.2}{100} = 0.032 \text{ hours} = 1.92 \text{ minutes} = 115.2 \text{ seconds}.$$

$$E(W_q | W_q > 0) = \frac{E(W_q)}{P(W_q > 0)} \stackrel{N=1 \text{ and PASTA}}{=} \frac{E(W_q)}{\text{Occupancy}} = \frac{0.032}{0.984} = 0.0325 \text{ hours} = 1.951 \text{ minutes} = 117.07 \text{ seconds}.$$

3.1.4 באיזה תחום תפעולי מתפקדת המערכת (ED, QD, QED)? כתבו את כלל האיוש המתאים לתחום תפעולי זה וחשבו את ערך הפרמטר (QOS grade) המאפיין את כלל האיוש.

תשובה:

ED – נצילות שרתים (=ההסתברות להמתין) קרובה ל- 100%, זמן המתנה בסדר גודל של משך שירות.

כלל האיוש: $0 < \gamma < 1$, $N = R(1 - \gamma)$.

בנתוני השאלה: $\gamma = 0.76 \Leftarrow 1 = \frac{100}{24} \cdot (1 - \gamma)$

3.1.5 שחזרו את ערך אחוז הלקוחות שקיבלו שירות (%Answer). (ערך זה אינו מופיע בטבלה).

תשובה:

ב- ED

$$P\{Ab\} = \gamma = 0.76$$

$$P\{Answer\} = 1 - P\{Ab\} = 0.24$$

3.1.6 בכיתה הוסבר שאמד לממוצע הסבלנות של לקוח ניתן על ידי

$$\text{סבלנות ממוצעת} = \frac{\text{סך הכל זמן ההמתנה (של משורתיים או נוטשים)}}{\text{מספר הנוטשים}}$$

הסבירו כיצד ניתן להסיק מהאמד הנ"ל את ההצגה:

$$\text{סבלנות ממוצעת} = \text{זמן ההמתנה של נוטשים} + \text{זמן ההמתנה של משורתיים} \times \text{אינדקס הסבלנות}$$

עבור הסברכם, הגדירו במדויק את אינדקס הסבלנות.

תשובה:

$$\frac{\text{No. of served}}{\text{No. of abandoned}} = \frac{\% \text{ served}}{\% \text{ abandoned}} \quad \text{הגדרת אינדקס סבלנות אמפירי:}$$

להבדיל מאינדקס תיאורטי, שעבורו ההגדרה המקורית היתה

$$\frac{\text{Willing to wait}}{\text{Expected to wait}} = \frac{\tau}{V} \quad \text{for experienced customers}$$

הסבר:

$$\text{סך הכל זמן ההמתנה (של משורתיים או נוטשים)} = \frac{\text{מספר הנוטשים}}$$

$$\frac{\text{זמן ההמתנה של נוטשים}}{\text{מספר הנוטשים}} + \frac{\text{מספר משורתיים}}{\text{מספר משורתיים}} \times \frac{\text{זמן ההמתנה של משורתיים}}{\text{מספר הנוטשים}} =$$

$$\frac{\text{זמן ההמתנה של נוטשים}}{\text{מספר הנוטשים}} + \frac{\text{מספר משורתיים}}{\text{מספר משורתיים}} \times \frac{\text{זמן ההמתנה של משורתיים}}{\text{מספר הנוטשים}} =$$

$$\text{סבלנות ממוצעת} = \text{זמן ההמתנה של נוטשים} + \text{זמן ההמתנה של משורתיים} \times \text{אינדקס הסבלנות}$$

3.1.7 עבור נתוני הטבלה שבתחילת השאלה, חשבו את ממוצע זמן ההמתנה של לקוחות שנטשו את המערכת.

$$P(\text{אוכלוסיה (יחסית) מאוד לא סבלנית} | \text{אינדקס הסבלנות}}) = \frac{0.24}{0.76} = 0.315$$

ולפי משוואה

$$\text{סבלנות ממוצעת} = \text{זמן ההמתנה של נוטשים} + \text{זמן ההמתנה של משורתים} \times \text{אינדקס הסבלנות}$$

נקבל

$$0.315 \times 155.9 + E(W_q | Ab) = 150$$

$$\Rightarrow E(W_q | Ab) = 100.77 \text{ sec}$$

$1 \frac{40}{60}$ דקות סבלנות, לעומת $2 \frac{30}{60}$ דקות שירות, מאפיין אוכלוסיה שהיא יחסית מאוד לא סבלנית.

4CallCenters v2.23
File Table Settings Help

Performance Profiler | Staffing Query | **Advanced Profiling** | Advanced Queries | What-if Analysis

Advanced Profiling The **Advanced Profiling** tool allows you to enter multiple values for each of the input parameters, and produces a of parameters.

Compute | Add to Table | Delete Rows | Clear All | Export | Import | Graph | Settings

Input Multi-Value	60	00:00	5	02:30	200	02:30	10			
	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Number of Trunks	%Abandon	%Block	Average Queue Length
Results										
1	60.0	00:00.0	5.0	02:30.0	200.0	02:30.0	10.0	28.3%	13.7%	2.4
2										

3.2.1 לאיזו מערכת תורים מתאימה הטבלה הנתונה? רשמו את הסימון המקובל למודל המתמטי המתאים ואת ערכי הפרמטרים של המודל.

תשובה:

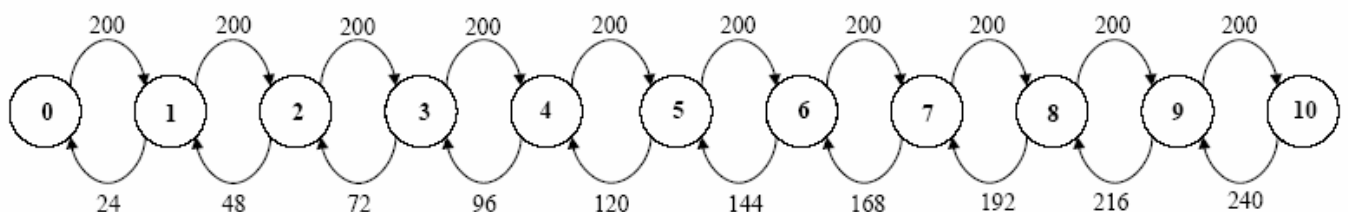
$$M | M | N | K + M$$

$$\lambda = 200 \frac{\text{customers}}{\text{hour}} ; \mu = 24 \frac{\text{customers}}{\text{hour}} ; N = 5 \text{ agents} ; K = 10 \text{ trunks} ; \theta = 24 \frac{\text{customers}}{\text{hour}}$$

עבור המודל שתוצאות ניתוחו מוצגות בטבלה הנ"ל, נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t . אזי $L = \{L(t), t \geq 0\}$ הוא תהליך לידה ומוות.

3.2.2 ציירו את דיאגרמת קצבי המעבר של L .

תשובה:



3.2.3 תארו מערכת תורים נוספת עבורה מתאימה דיאגרמת קצבי המעבר שציירתם בשאלה הקודמת: רשמו את המודל המתמטי המתאים ואת ערכי הפרמטרים של המודל.

תשובה:

$$M | M | N | K + M$$

$$\lambda = 200 \frac{\text{customers}}{\text{hour}} ; \mu = 24 \frac{\text{customers}}{\text{hour}} ; K = 10 \text{trunks} ; \theta = 24 \frac{\text{customers}}{\text{hour}} ;$$

$$N = 0, 1, 2, \dots, 10 \text{agents}$$

3.2.4 חשבו את נצילות השרתים, תוחלת זמן ההמתנה ומוצע מספר הלקוחות במערכת.

תשובה:

$$\rho = \frac{\lambda(1 - \%Abandon - \%Block)}{N\mu} = \frac{200(1 - 0.283 - 0.137)}{5 \cdot 24} = 0.9666$$

$$E(W_q) = \frac{E(L_q)}{\lambda(1 - \%Block)} = \frac{2.4}{200(1 - 0.137)} = 0.0139 \text{hours} = 0.834 \text{minutes} = 50.05 \text{seconds}$$

$$E(L_{sys}) = E(L_q) + N \cdot \rho = 2.4 + 5 \cdot 0.9666 = 7.23$$

3.2.5 כיצד תשפיע תוספת של שרת (סה"כ 6 שרתים) על אחוז הלקוחות הנחסמים? נמקו את תשובתכם.

תשובה:

אחוז הלקוחות הנחסמים **לא ישתנה**.

הסבר: מהתשובה של סעיף 3.2.3 – ההתפלגות הסטציונארית של מערכת השירות לאחר השינוי זהה לזו של המערכת המקורית, ולכן ההסתברות לחסימה זהה ($\pi_{10} =$ לפי PASTA).

חלק 3.

נתונה מערכת Erlang-A עם ממוצע זמן שירות של 3 דקות וממוצע סבלנות של 6 דקות. בגרף עקומות הצפף המופיע בעמוד הבא מתואר הקשר בין אחוז הלקוחות שנטשו את המערכת וקצב המופע, עבור מספר שרתים המשתנה בין 5 ל-12 בקפיצות של 1.

3.3.1 תארו, במדויק ככל שתוכלו, כיצד ניתן לייצר גרף זה בעזרת תוכנת ה-4CallCenter (לשם תזכורת הפונקציות של התוכנה, צרפנו להלן את העמוד הראשי שלה).

תשובה:

באופציית ה-Advanced Profiling ניתן להכניס ערכי פרמטרים מרובים:

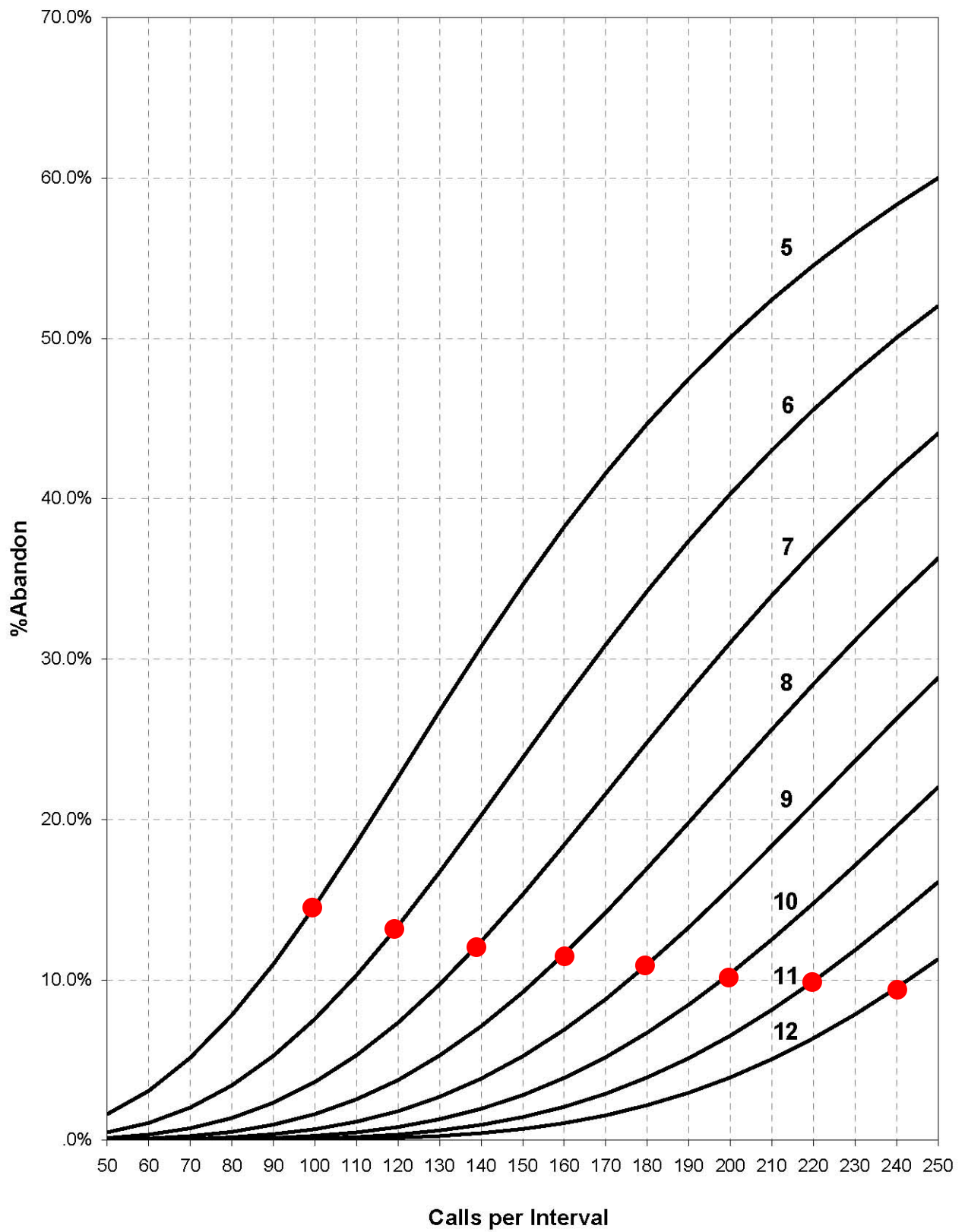
עבור קצבי מופע – 50 עד 250 בקפיצות של 10

עבור מספר שרתים – 5 עד 12 בקפיצות של 1.

נכניס את ממוצע משך השירות והסבלנות ונבצע חישוב.

באופציית יצירת גרף נבחר את מספר השרתים כפרמטר משתנה נוסף על קצב המופע.

%Abandon vs. Calls per Interval for various Number of Agents



3.3.2 ציירו על הגרף עקומה המתארת את היתרון לגודל כפי שהוא בא לידי ביטוי בגרף. הסבירו בקצרה מה מאפיין את הנקודות דרכן עוברת העקומה.

תשובה:

נחבר בין נקודות עבורן העומס המוצע פר שרת זהה. לדוגמא, ניתן לחבר בין נקודות בהן עומס מוצע פר שרת שווה ל-1. דהיינו, נקודות שעבורן מתקיים $\lambda / N = 20$ (נזכור כי $\mu = 20$).

3.3.3 היעזרו בגרף הנתון כדי להעריך יהיה אחוז הנוטשים במערכת Erlang-A עם קצב מופע של 480 לקוחות בשעה, ממוצע משך שירות של 3 דקות, ממוצע משך סבלנות של 6 דקות ו-24 שרתים. הסבירו את תשובתכם.

תשובה:

נשים לב כי $R = \frac{480}{20} = 24$ ולכן, מכלל השורש, $\beta = 0$. נבחר מהגרף הנתון את הנקודה $\lambda = 120, N = 6$, עבורה גם מתקיים כי $\beta = 0$ ו- $P\{Ab\} \approx 13.33\%$. לכן, עבור נתוני הבעיה מתקיים

$$P\{Ab\} = \frac{13.33}{\sqrt{4}} = 6.66\%$$

שאלה 4 תיאוריה (10 נקודות)

נתונה מערכת שירות Erlang-C עם הפרמטרים λ, μ, n . בכיתה סימנו את ההסתברות להמתין ב- $E_{2,n}$ (נוסחת

Erlang-C), וב- ρ את נצילות השרת, המוגדרת כרגיל ע"י $\rho = \frac{\lambda}{n\mu}$.

4.1 הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

$$1 \leq \frac{1 - E_{2,n}}{1 - \rho} \leq n$$

תשובה:

$$\begin{aligned} 1 - E_{2,n} &= P(\text{at least one server idle}) = P\left(\bigcup_{i=1}^n \{\text{server } i \text{ idle}\}\right) \\ &\begin{cases} \leq \sum_{i=1}^n P\{\text{server } i \text{ idle}\} = n(1 - \rho) & (\text{אי שוויון בול}) \\ \geq P\{\text{server } i \text{ idle}\} = 1 - \rho & (A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)) \end{cases} \end{aligned}$$

מ.ש.ל

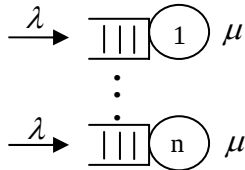
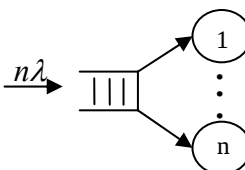
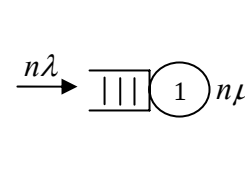
בשאלות הבאות מותר להשתמש באי השוויונים הנ"ל, גם אם לא הוכחתם אותם.

4.2 בשאלה זו נערוך השוואה בין מדדי ביצועים של שלוש המערכות הבאות :

מערכת 1: n תורי $M | M | 1$ הפועלים במקביל, כאשר קצב המופע לכל אחד מהתורים הוא λ וקצב השירות μ .

מערכת 2: מערכת $M | M | n$ עם קצב מופע $n\lambda$ וקצב שירות μ (איחוד תורי מערכת 1).

מערכת 3: מערכת $M | M | 1$ עם קצב מופע $n\lambda$ וקצב שירות $n\mu$ (שרת מהיר במקום n שרתים איטיים במערכת 2).

	$n \times M M 1$ λ, μ	$M M n$ $n\lambda, \mu$	$M M 1$ $n\lambda, n\mu$
			
Utilization	$\frac{\lambda}{\mu} = \rho$	$\frac{(n\lambda)}{(n)\mu} = \rho$	$\frac{(n\lambda)}{(n\mu)} = \rho$
$P\{W_q > 0\}$	ρ	$E_{2,n}$	ρ
$E[W_q W_q > 0]$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$	$\frac{1}{n\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$	$\frac{1}{n\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$
$E[W_q]$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{E_{2,n}}{n(1-\rho)}$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{n(1-\rho)}$
$E[S]$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{n\mu}$
$E[W_{sys}]$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$	$\frac{1}{\mu} \cdot \left[\frac{E_{2,n}}{n(1-\rho)} + 1 \right]$	$\frac{1}{n\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$

כאשר

- Utilization - נצילות שרת,
- $P\{W_q > 0\}$ - ההסתברות להמתנה,
- $E[W_q | W_q > 0]$ - תוחלת זמן המתנה בהינתן המתנה,
- $E[W_q]$ - תוחלת זמן המתנה,
- $E[S]$ - תוחלת משך שירות,
- $E[W_{sys}]$ - תוחלת זמן שהיה במערכת.

4.2.1 קבעו מה היחס המתאים בין ההסתברות להמתין, $P\{W_q > 0\}$, במערכת 1 ובמערכת 2. הוכיחו תשובתכם מתמטית והסבירו את התוצאה באופן אינטואיטיבי.

תשובה:

בחרו ביחס המתאים: $\geq$ א. $=$ ב. $\leq$ ג. לא ניתן לקבוע בוודאות ד.

לנוחיותכם, מוצג החלק מהטבלה עליו אתם נשאלים,

	$n \times M \mid M \mid 1$ λ, μ	$M \mid M \mid n$ $n\lambda, \mu$
$P\{W_q > 0\}$	ρ	$E_{2,n}$

הוכחה:

משאלה 4.1,

$$1 - E_{2,n} \geq 1 - \rho \Rightarrow \rho \geq E_{2,n}$$

הסבר אינטואיטיבי:

במערכת 2, כאשר מגיע מופע למערכת כאשר ישנו שרת פנוי, המופע ייכנס לשירות באופן מיידי, ללא המתנה. לעומת זאת, במערכת 1 יתכן מצב בו מופע המגיע למערכת, נכנס לתור בו השרת עסוק ולכן נאלץ להמתין, בעוד שישנו שרת פנוי בתור אחר.

4.2.2 קבעו מה היחס המתאים בין תוחלת זמן ההמתנה, $E[W_q]$, במערכת 2 ובמערכת 3. הוכיחו תשובתכם מתמטית.

להלן מוצג החלק מהטבלה עליו אתם נשאלים,

תשובה:

בחרו ביחס המתאים: **א.** $\geq$ **ב.** $=$ **ג.** $\leq$ **ד.** לא ניתן לקבוע בוודאות

לנוחיותכם, מוצג החלק מהטבלה עליו אתם נשאלים,

	$M M n$ $n\lambda, \mu$	$M M 1$ $n\lambda, n\mu$
$E[W_q]$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{E_{2,n}}{n(1-\rho)}$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{n(1-\rho)}$

הוכחה:

משאלה 4.2.1, $E_{2,n} \leq \rho$

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{E_{2,n}}{n(1-\rho)} \leq \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{n(1-\rho)}$$

4.2.3 השוו בין היחס שמצאתם בשאלה 4.2.2 לבין היחס הנתון בין תוחלות זמן השהיה, $E[W_{sys}]$, במערכת 2 ובמערכת

3. נסחו את התופעה שגיליתם והסבירו מהן הסיבות לה.

תשובה:

כאשר עוברים ממערכת בה יש שרת מהיר למערכת בה מספר שרתים איטיים, ממוצע זמן ההמתנה מתקצר וממוצע משך השהיה מתארך. אמנם זמן ההמתנה במערכת 3 גבוה יותר מזמן ההמתנה במערכת 2, אך ביחד עם זמן השירות הקצר יותר (במערכת 3), נקבל כי זמן השהיה הכולל במערכת 3 קצר יותר. אם נסתכל על דיאגרמות קצבי המעבר של שתי המערכות, נראה כי החל ממצב n תהליך העזיבה זהה בשתי המערכות, ועבור מצבים $1, 2, \dots, n-1$ קצבי העזיבה במערכת 3 גדולים יותר.