



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגלת : שמרית ממון

תאריך הבחינה : 17.06.2008

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד ב' – סמסטר חורף תשס"ח 2008

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 25 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

ניקוד: שאלה 1	_____ מתוך 10 נקודות	תרגילי בית
שאלה 2	_____ מתוך 13 נקודות	הרצאות\תרגולים\בחינות קודמות
שאלה 3	_____ מתוך 17 נקודות	יישום
שאלה 4	_____ מתוך 10 נקודות	תיאוריה

סה"כ _____ מתוך 50 נקודות

בהצלחה!

שאלה 1 תרגילי בית (10 נקודות)

חלק 1. מודל נוזלים

Tele-SHOP היא חברה העוסקת במכירות המתבצעות באמצעות מוקד שירות טלפוני. ניתן לתאר את הגעת השיחות למוקד השירות ע"י תהליך פואסון לא הומוגני בזמן עם פונקציה הקצב $\lambda(t)$. המוקד פועל בשעות 00:00-16:00. נסמן אינטרוול זמן זה ב- $[0, T]$.

ממוצע זמן שירות של שיחה הינו $\frac{1}{\mu}$ דקות וממוצע סבלנותו של לקוח (עד נטישה) הינו $\frac{1}{\theta}$.

הניחו כי עלות העסקת שרת הינה c ש"ל לדקה ועלות המתנה הינה h ש"ל לדקה. עוד הניחו כי הרווח מסיום שירות הינו r ש"ל והקנס על נטישת לקוח הינו s ש"ל.

נסמן ב- $Q(t)$ את מספר הלקוחות במערכת בזמן $0 \leq t \leq T$,
וב- $N(t)$ את מספר המוקדנים במערכת בזמן $0 \leq t \leq T$.

1.1.1 כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $Q(t)$, $0 \leq t \leq T$.

תשובה:

$$\frac{dQ(t)}{dt} =$$

1.1.2 תארו בקיצור איך ניתן, בעזרת גיליון אלקטרוני בלבד, לפתור בקירוב (מדויק ככל הנדרש) את המשוואה הדיפרנציאלית בסעיף 1.1.1.

תשובה:

1.1.3 רשמו ביטוי לאחוז הנוטשים באינטרוול $[0, T]$.

תשובה:

$$P\{Ab\} =$$

1.1.4 על מנת לקבוע את פונקצית האיוש $\{N(t), t \geq 0\}$ המשיגה רווח יומי מקסימלי של מוקד השירות, יש לפתור בעיית אופטימיזציה.

רשמו את פונקצית המטרה של בעיית האופטימיזציה ואת אילוצי הבעיה.

תשובה:

פונקצית המטרה:

אילוצי הבעיה:

הניחו כעת כי מספר השרתים קבוע במהלך יום העבודה. באמצעות בעיית האופטימזציה שכתבתם בשאלה 1.1.4 ובעזרת Excel solver, ניתן למצוא את N^* - מספר השרתים האופטימלי שמביא למקסימום רווח של המוקד.

1.1.5 כיצד ישתנה הערך N^* כאשר ערכו של הרווח מסיום שירות בודד, r , עולה? תארו, בדיוק רב ככל שתוכלו, את התנהגות N^* כאשר r גדל לאינסוף.

תשובה:

חלק 2. חוק Little

הנתונים הבאים נאספו עבור כל שופט בבית הדין לעבודה בחיפה, על פני שנה מסויימת: מספר התיקים שהיו בטיפול בסוף כל חודש, ומספר התיקים שנסגרו בכל חודש.

אב בית הדין מעוניין להעריך את זמן השהייה הממוצע של תיק בבית הדין – עבור כל שופט בנפרד ובסה"כ.

יהי $i = 1, 2, \dots, 12$, אינדקס החודש בשנה הנתונה. נסמן ב- L_{ij} את מספר התיקים שהיו בטיפול בסוף חודש i אצל שופט

j , וב- λ_{ij} את מספר התיקים שנסגרו בחודש i אצל שופט j . הניחו כי ישנם N שופטים.

את תשובותיכם לשאלות הבאות, בטאו אך ורק בעזרת המדדים L_{ij} ו- λ_{ij} .

1.2.1 מהו ממוצע זמן השהייה הממוצע של תיק, W_j , בבית הדין עבור שופט השופט j ?

תשובה:

$$W_j =$$

1.2.2 מהו ממוצע זמן השהייה הממוצע של תיק, W , בבית הדין?

תשובה:

$$W =$$

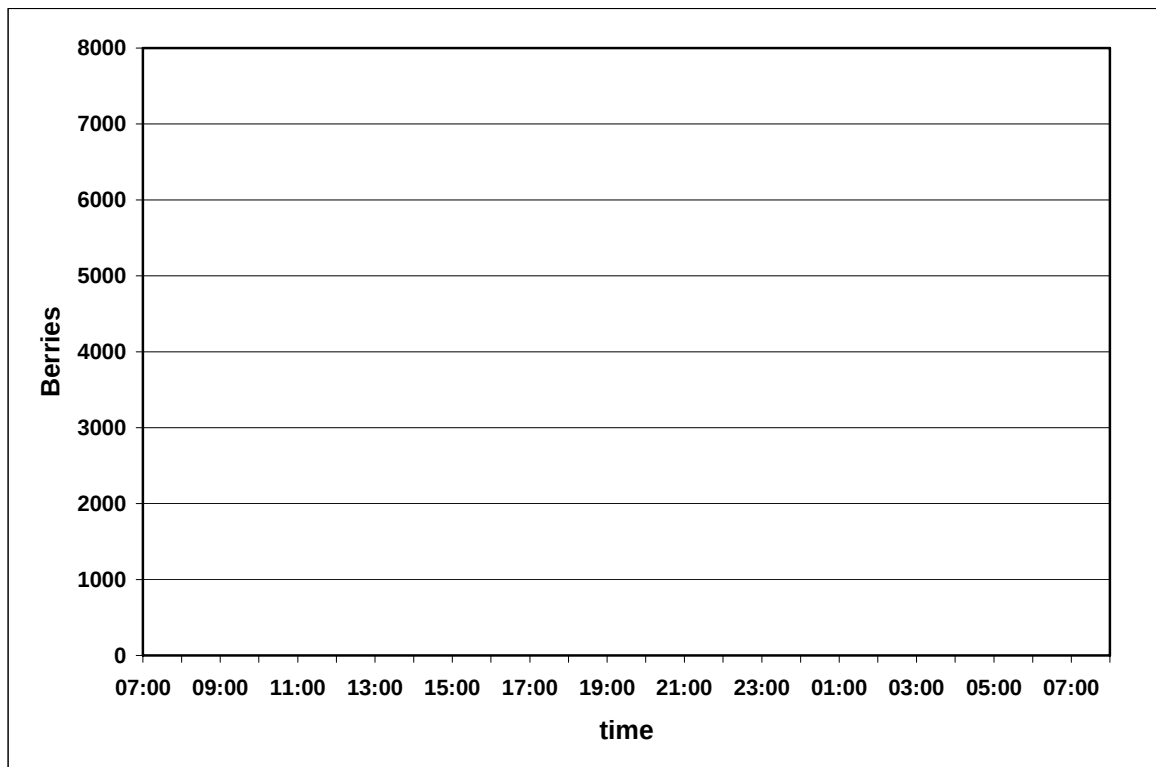
שאלה 2 הרצאות / תרגולים / בחינות קודמות (13 נקודות)

חלק 1. National Cranberry

אל מפעל ייבוש ועיבוד חמוציות מגיעות ביום עבודה 18,000 חביות חמוציות, כאשר בכל חבית 100 פאונד חמוציות. 70% מהחמוציות רטובות ודורשות ייבוש טרם עיבודן. החביות מועברות מאזור הקטיף למפעל על ידי משאיות, כאשר על כל משאית בממוצע 75 חביות. בשאלה זו נתמקד ונעסוק בתור החמוציות הרטובות. בכניסה למפעל, החמוציות הרטובות מועברות מהמשאיות, למיכל שקיבולתו היא כקיבולת של 3200 חביות. במידה ומשאית מגיעה למפעל והמיכל מלא, היא ממתינה בתור המשאיות. משאיות מגיעות למפעל החל מ 07:00 בבוקר ועד 19:00 בערב. במפעל 3 מייבשים, כשקצב הייבוש על ידי כל מייבש הוא 200 חביות בשעה. תהליך ייבוש החמוציות מתחיל ב- 11:00 בבוקר ומסתיים כאשר ייבוש כל החמוציות הרטובות של אותו יום העבודה הושלם.

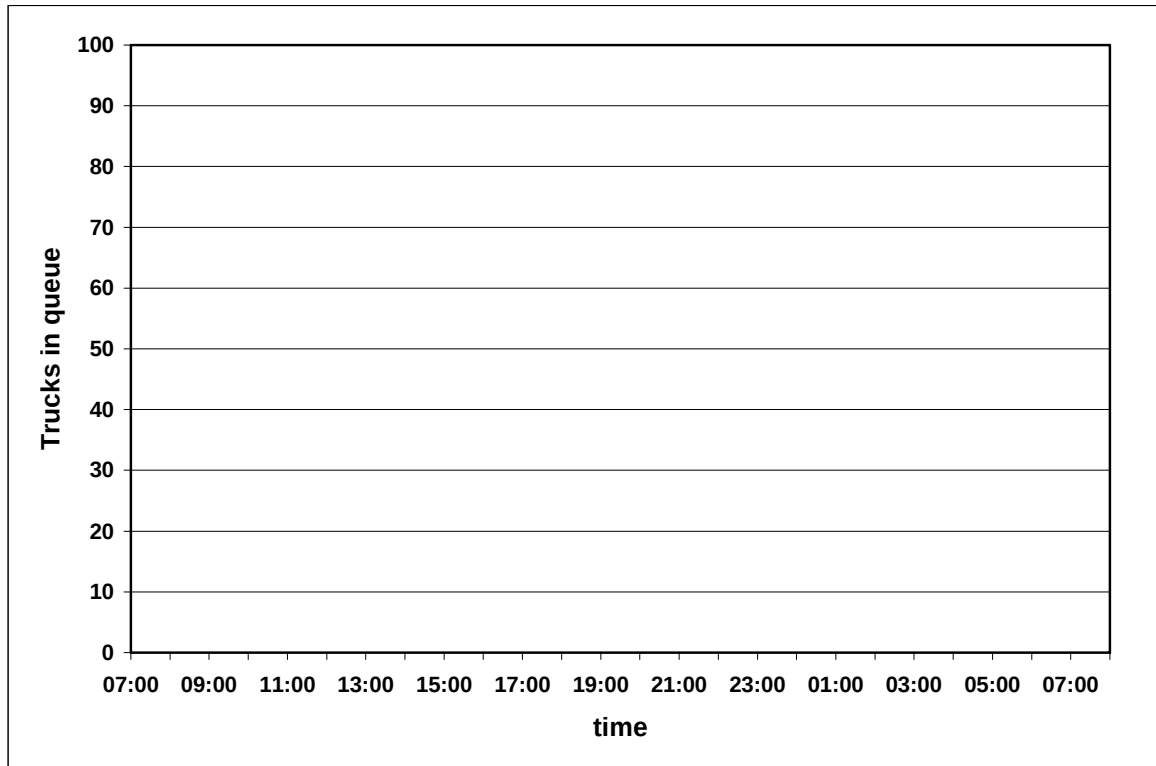
2.1.1 ציירו את דיאגרמת המלאי של חביות חמוציות רטובות במהלך יום עבודה.

תשובה:



2.1.2 ציירו את דיאגרמת תור המשאיות (מספר המשאיות בתור) במהלך יום עבודה.

תשובה:



2.1.3 חשבו את קצב מעבר המשאיות בתור. בתשובתכם התייחסו רק למשאיות שבפועל המתינו בתור. דהיינו, התייחסו רק לאינטרוול הזמן בו תור המשאיות אינו ריק.

תשובה:

2.1.4 חשבו את ממוצע אורך תור המשאיות עבור אינטרוול הזמן שבו התור אינו ריק.

תשובה:

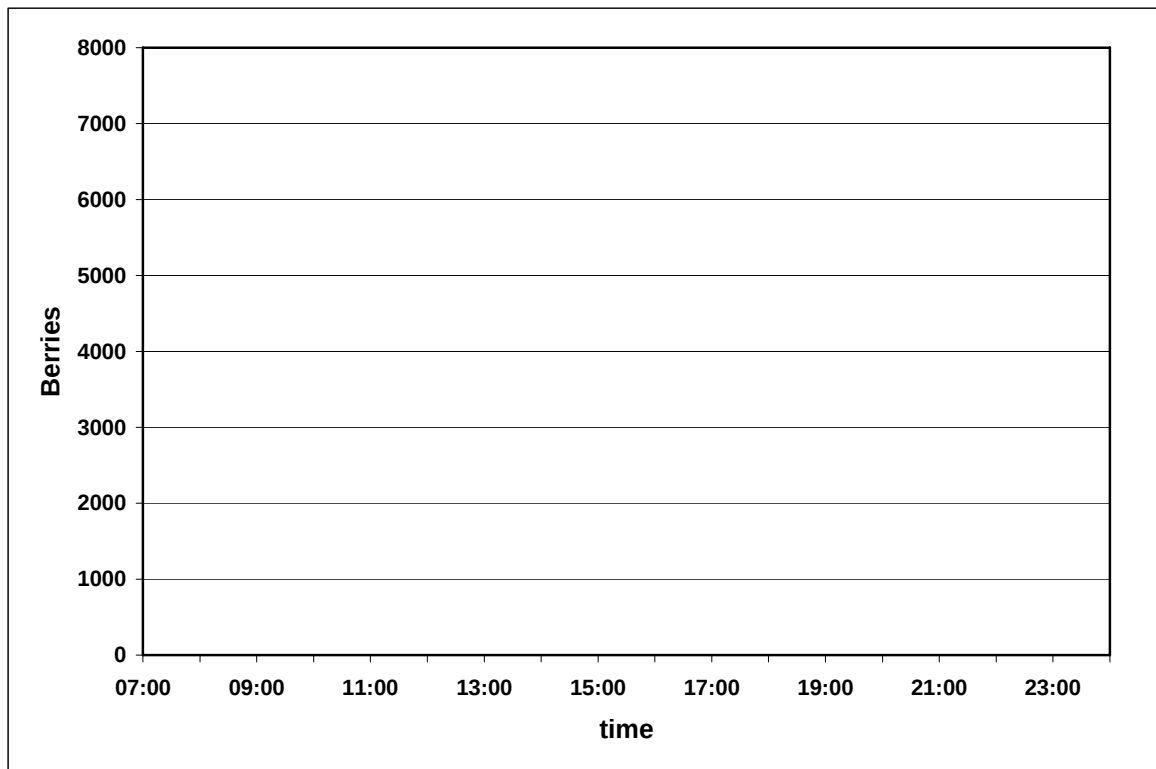
2.1.5 חשבו את ממוצע זמן המתנת המשאיות שהמתינו בתור.

תשובה:

הניחו כעת כי תהליך הייבוש מתחיל ב- 07:00 בבוקר וכי הוסיפו מייבש נוסף עם קצב ייבוש של 200 חביות בשעה.

2.1.6 תחת הנחות אלו, ציירו את דיאגרמת מלאי החמוציות הרטובות במהלך יום עבודה.

תשובה:



2.1.7 מה תוכלו לומר על תור המשאיות לאחר השינויים בתפעול המערכת? בתשובתכם התייחסו לשני מקרים : מערכת דטרמיניסטית ומערכת סטוכסטית.

תשובה:

חלק 2. סבלנות

את חווית ההמתנה של לקוח במרכז טלפוני סיכמנו באופן הבא:

- הזמן שלקוח מצפה להמתין - E
- הזמן שלקוח מוכן להמתין - τ
- הזמן שלקוח נדרש להמתין - V
- הזמן שלקוח למעשה המתין - W
- הזמן שלקוח הרגיש שהמתין - F

2.2.1 מודל $Erlang-A$ דורש כקלט את הממוצע של רק אחד מחמשת הזמנים הנ"ל: מהו?

תשובה:

2.2.2 מודל $Erlang-A$ נותן כפלט התפלגות של שניים מחמשת הזמנים הנ"ל. מהם?

תשובה:

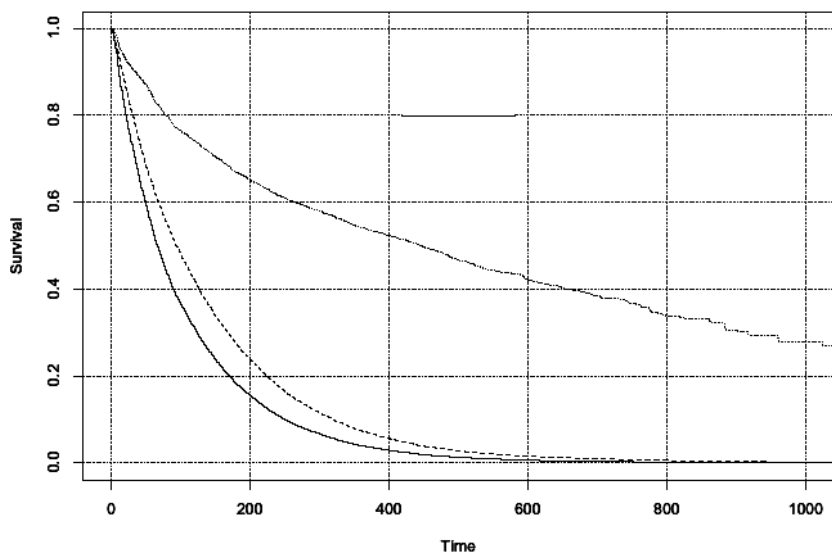
1.

2.

2.2.3 כאשר לקוחות הם מנוסים ורציונליים, סביר להניח שחמשת הזמנים הנ"ל מיוצגים בעצם ע"י שלשת הזמנים מסעיפים 2.2.1 ו- 2.2.2. הסבירו בקצרה הנחה זו.

תשובה:

הגרף הבא מתאר שלוש פונקציות שרידות (Survival Functions) אמפיריות של שלושת הזמנים מסעיפים 2.2.1 ו-2.2.2, כפי שנאמדו במוקד טלפוני.



2.2.4 לאיזה זמן מתאים הגרף התחתון? הסבירו בקצרה.

תשובה:

2.2.5 נתון שבמוקד הטלפוני שבו נמדדו פונקציות השרידות, הלקוחות מאוד סבלניים. לאיזה זמן מתאים אז הגרף העליון? הסבירו בקצרה.

תשובה:

שאלה 3 יישום (17 נקודות)

חלק 1. Erlang-A

הטבלה הבאה הינה פלט מתוכנת 4CallCenters.

4CallCenters v2.23

File Table Settings Help

Performance Profiler | Staffing Query | Advanced Profiling | Advanced Queries | What-if Analysis

Performance Profiler Performance Profiler allows you to determine and optimize the Performance Level of your Call Center. Enter your call center's parameter 'Compute'.

Your Call Center's Parameters

- Number of Agents Answering Calls: 1
- Average Time to Handle One Call (mm:ss): 02:30
- Calls per 60 minute Interval: 100
- Average Callers' Patience (mm:ss): 02:30

Settings

- Features: Abandons
- Basic Interval: 60 minutes
- Target Time: 00:00 (mm:ss)

Change Settings

Compute | Add to Table | Delete Rows | Clear All | Export | Import | Graph

	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Agent's Occupancy	%Answer	Average Speed of Answer	Average Time in Queue	%Answer within Target	Average Queue Length
Results 1	60.0	00:00.0	1.0	02:30.0	100.0	02:30.0	98.4%		02:35.9			3.2

עבור המודל Erlang-A שתוצאות ניתוחו מוצגות בטבלה הנ"ל, נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t . אזי $L = \{L(t), t \geq 0\}$ הוא תהליך לידה ומוות.

3.1.1 ציירו את דיאגרמת קצבי המעבר של L .

תשובה:

3.1.2 לאיזו מערכת תורים נוספת מתאימה דיאגרמת קצבי המעבר שציירתם בשאלה הקודמת? רשמו את הסימון המקובל למודל המתמטי המתאים ואת ערכי הפרמטרים של המודל.

תשובה:

3.1.3 שחזרו את ערך תוחלת זמן ההמתנה בתור (בשניות) וחשבו את תוחלת זמן ההמתנה בתור (בשניות) של הלקוחות הממתינים. (ערכים אלו אינם מופיעים בטבלה).

תשובה:

$$E(W_q) =$$

$$E(W_q | W_q > 0) =$$

3.1.4 באיזה תחום תפעולי מתפקדת המערכת (QED, QD, ED)? כתבו את כלל האיוש המתאים לתחום תפעולי זה וחשבו את ערך הפרמטר (QOS grade) המאפיין את כלל האיוש.

תשובה:

3.1.5 שחזרו את ערך אחוז הלקוחות שקיבלו שירות (%Answer). (ערך זה אינו מופיע בטבלה).

תשובה:

3.1.6 בכיתה הוסבר שאמד לממוצע הסבלנות של לקוח ניתן על ידי

$$\text{סבלנות ממוצעת} = \frac{\text{סך הכל זמן ההמתנה (של משורתיים או נוטשיים)}}{\text{מספר הנוטשיים}}$$

הסבירו כיצד ניתן להסיק מהאמד הנ"ל את ההצגה:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{ממוצע} & & \text{ממוצע} & & \\ & & \text{זמן ההמתנה} & + & \text{זמן ההמתנה} & & \\ \text{אינדקס} & \times & \text{של משורתיים} & & \text{של נוטשיים} & = & \text{סבלנות ממוצעת} \\ \text{הסבלנות} & & & & & & \end{array}$$

עבור הסברכם, הגדירו במדויק את אינדקס הסבלנות.

תשובה:

הגדרת אינדקס סבלנות אמפירי:

הסבר:

3.1.7 עבור נתוני הטבלה שבתחילת השאלה, חשבו את ממוצע זמן ההמתנה של לקוחות שנטשו את המערכת.

תשובה:

חלק 2.

הטבלה הבאה הינה פלט מתוכנת 4CallCenters.

4CallCenters v2.23

FileTableSettingsHelp

Performance Profiler

Staffing Query

Advanced Profiling

Advanced Queries

What-if Analysis

Advanced Profiling

The **Advanced Profiling** tool allows you to enter multiple values for each of the input parameters, and produces a of parameters.

Compute

◆

Add to Table

Delete Rows

Clear All

Export

Import

Graph

◆

Settings

Input	60	00:00	5	02:30	200	02:30	10			
Multi-Value										
	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Number of Trunks	%Abandon	%Block	Average Queue Length
Results										
1	60.0	00:00.0	5.0	02:30.0	200.0	02:30.0	10.0	28.3%	13.7%	2.4
2										

3.2.1 לאיזו מערכת תורים מתאימה הטבלה הנתונה? רשמו את הסימון המקובל למודל המתמטי המתאים ואת ערכי הפרמטרים של המודל.

תשובה:

עבור המודל שתוצאות ניתוחו מוצגות בטבלה הנ"ל, נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t . אזי $L = \{L(t), t \geq 0\}$ הוא תהליך לידה ומוות.

3.2.2 ציירו את דיאגרמת קצבי המעבר של L .

תשובה:

3.2.3 תארו מערכת תורים נוספת עבורה מתאימה דיאגרמת קצבי המעבר שציירתם בשאלה הקודמת: רשמו את המודל המתמטי המתאים ואת ערכי הפרמטרים של המודל.

תשובה:

3.2.4 חשבו את נצילות השרתים, תוחלת זמן ההמתנה וממוצע מספר הלקוחות במערכת.

תשובה:

$$\rho =$$

$$E(W_q) =$$

$$E(L_{sys}) =$$

3.2.5 כיצד תשפיע תוספת של שרת (סה"כ 6 שרתים) על אחוז הלקוחות הנחסמים? נמקו את תשובתכם.

תשובה:

חלק 3.

נתונה מערכת Erlang-A עם ממוצע זמן שירות של 3 דקות וממוצע סבלנות של 6 דקות. בגרף עקומות הצפף המופיע בעמוד הבא מתואר הקשר בין אחוז הלקוחות שנטשו את המערכת וקצב המופע, עבור מספר שרתים המשתנה בין 5 ל-12 בקפיצות של 1.

3.3.1 תאור, במדויק ככל שתוכלו, כיצד ניתן לייצר גרף זה בעזרת תוכנת ה-4CallCenter (לשם תזכורת הפונקציות של התוכנה, צרפנו להלן את העמוד הראשי שלה).

4CallCenters v2.23

File Table Settings Help

Performance Profiler | Staffing Query | Advanced Profiling | Advanced Queries | What-if Analysis

Performance Profiler allows you to determine and optimize the Performance Level of your Call Center. Enter your call center's parameters below, then click 'Compute'.

Your Call Center's Parameters

- Number of Agents Answering Calls: 10
- Average Time to Handle One Call (mm:ss): 01:00
- Calls per 60 minute Interval: 100

Settings

- Features: None Selected
- Basic Interval: 60 minutes
- Target Time: 00:10 (mm:ss)

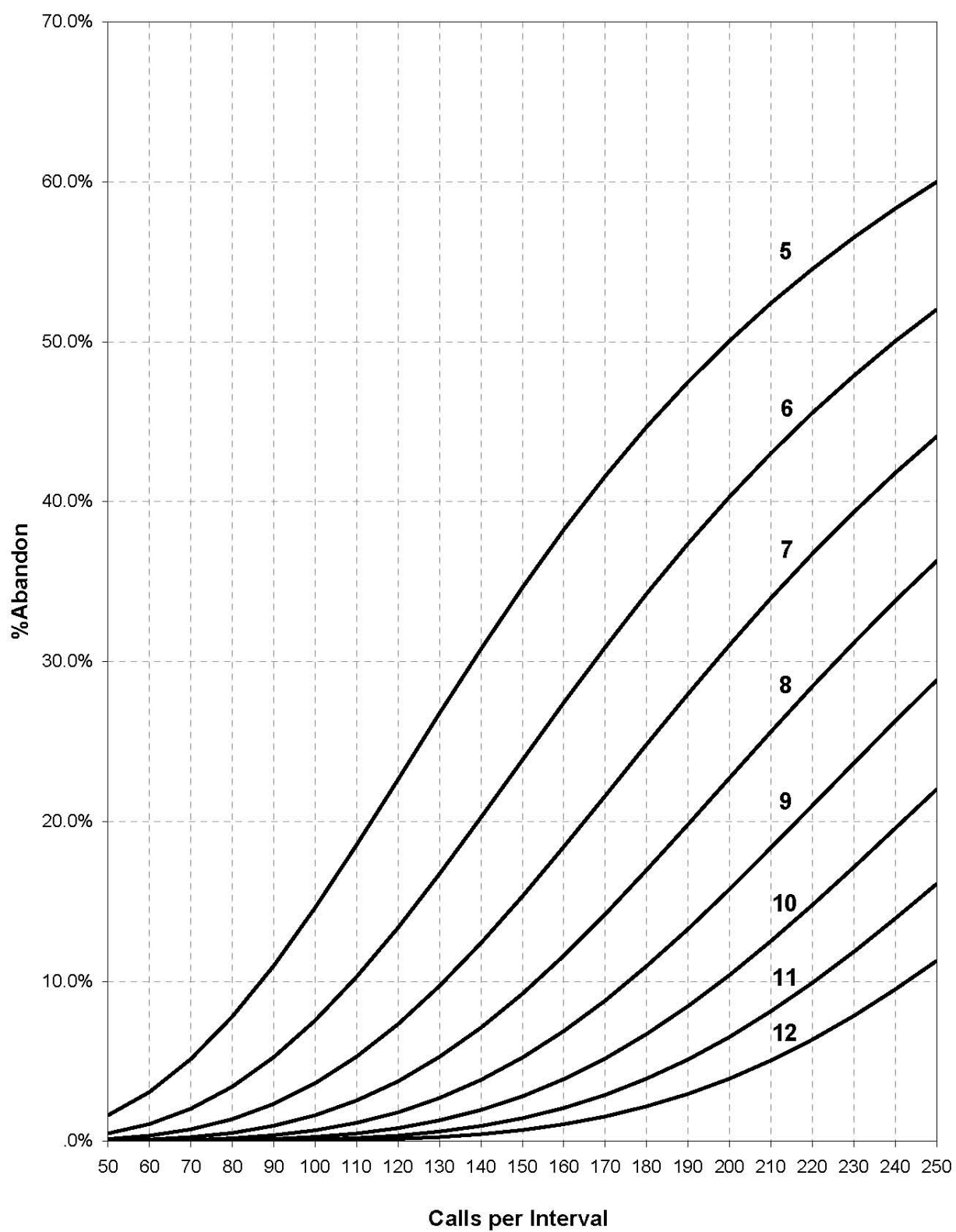
Change Settings

Compute | Add to Table | Delete Rows | Clear All | Export | Import | Graph

	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Agent's Occupancy	Average Speed of Answer	% Answer within Target	Average Queue Length
Results									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									

תשובה:

% Abandon vs. Calls per Interval for various Number of Agents



3.3.2 ציירו על הגרף עקומה המתארת את היתרון לגודל כפי שהוא בא לידי ביטוי בגרף. הסבירו בקצרה מה מאפיין את הנקודות דרכן עוברת העקומה.

תשובה:

3.3.3 היעזרו בגרף הנתון כדי להעריך יהיה אחוז הנוטשים במערכת Erlang-A עם קצב מופע של 480 לקוחות בשעה, ממוצע משך שירות של 3 דקות, ממוצע משך סבלנות של 6 דקות ו-24 שרתים. הסבירו את תשובתכם.

תשובה:

שאלה 4 תיאוריה (10 נקודות)

נתונה מערכת שירות Erlang-C עם הפרמטרים λ, μ, n . בכיתה סימנו את ההסתברות להמתין ב- $E_{2,n}$ (נוסחת

Erlang-C), וב- ρ את נצילות השרת, המוגדרת כרגיל ע"י $\rho = \frac{\lambda}{n\mu}$.

4.1 הוכיחו את אי-השוויונים הבאים :

$$1 \leq \frac{1 - E_{2,n}}{1 - \rho} \leq n$$

תשובה :

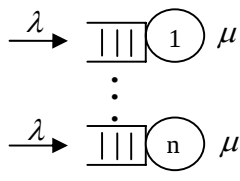
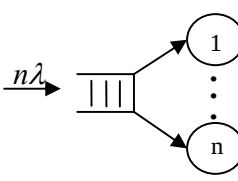
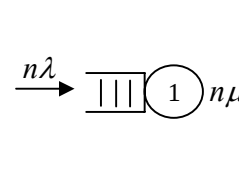
בשאלות הבאות מותר להשתמש באי השוויונים הנ"ל, גם אם לא הוכחתם אותם.

4.2 בשאלה זו נערוך השוואה בין מדדי ביצועים של שלוש המערכות הבאות:

מערכת 1: תורי $M | M | 1$ הפועלים במקביל, כאשר קצב המופע לכל אחד מהתורים הוא λ וקצב השירות μ .

מערכת 2: מערכת $M | M | n$ עם קצב מופע $n\lambda$ וקצב שירות μ (איחוד תורי מערכת 1).

מערכת 3: מערכת $M | M | 1$ עם קצב מופע $n\lambda$ וקצב שירות $n\mu$ (שרת מהיר במקום n שרתים איטיים במערכת 2).

	$n \times M M 1$ λ, μ	$M M n$ $n\lambda, \mu$	$M M 1$ $n\lambda, n\mu$
			
Utilization	$\frac{\lambda}{\mu} = \rho$	$\frac{(n\lambda)}{(n)\mu} = \rho$	$\frac{(n\lambda)}{(n\mu)} = \rho$
$P\{W_q > 0\}$	ρ	$E_{2,n}$	ρ
$E[W_q W_q > 0]$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$	$\frac{1}{n\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$	$\frac{1}{n\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$
$E[W_q]$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{E_{2,n}}{n(1-\rho)}$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{n(1-\rho)}$
$E[S]$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{n\mu}$
$E[W_{sys}]$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$	$\frac{1}{\mu} \cdot \left[\frac{E_{2,n}}{n(1-\rho)} + 1 \right]$	$\frac{1}{n\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$

כאשר

- Utilization - נצילות שרת,
- $P\{W_q > 0\}$ - ההסתברות להמתנה,
- $E[W_q | W_q > 0]$ - תוחלת זמן המתנה בהינתן המתנה,
- $E[W_q]$ - תוחלת זמן המתנה,
- $E[S]$ - תוחלת משך שירות,
- $E[W_{sys}]$ - תוחלת זמן שהיה במערכת.

4.2.1 קבעו מה היחס המתאים בין ההסתברות להמתין, $P\{W_q > 0\}$, במערכת 1 ובמערכת 2. הוכיחו תשובתכם מתמטית והסבירו את התוצאה באופן אינטואיטיבי.

תשובה:

בחרו ביחס המתאים: א. $\geq$ ב. $=$ ג. $\leq$ ד. לא ניתן לקבוע בוודאות

לנוחיותכם, מוצג החלק מהטבלה עליו אתם נשאלים,

	$n \times M \mid M \mid 1$ λ, μ	$M \mid M \mid n$ $n\lambda, \mu$
$P\{W_q > 0\}$	ρ	$E_{2,n}$

הוכחה:

הסבר אינטואיטיבי:

4.2.2 קבעו מה היחס המתאים בין תוחלת זמן ההמתנה, $E[W_q]$, במערכת 2 ובמערכת 3. הוכיחו תשובתכם מתמטית.

תשובה:

בחרו ביחס המתאים: א. $\geq$ ב. $=$ ג. $\leq$ ד. לא ניתן לקבוע בוודאות

לנוחיותכם, מוצג החלק מהטבלה עליו אתם נשאלים,

	$M M n$ $n\lambda, \mu$	$M M 1$ $n\lambda, n\mu$
$E[W_q]$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{E_{2,n}}{n(1-\rho)}$	$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{n(1-\rho)}$

הוכחה:

4.2.3 השוו בין היחס שמצאתם בשאלה 4.2.2 לבין היחס הנתון בין תוחלות זמן השהיה, $E[W_{sys}]$, במערכת 2 ובמערכת 3. נסחו את התופעה שגיליתם והסבירו מהן הסיבות לה.

תשובה: