



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום

מתרגל : ד"ר סרגיי זלטין

תאריך הבחינה : 10.04.2007

כתבון

מס' תלמיד _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות - 096324

מועד ב' - סמסטר חורף תשס"ז 2007

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור, וללא מחשבון.
- המבחן כולל 25 עמודים, כולל עמוד זה.
- ניתן להשאיר תשובות מספריות ללא חישובן הסופי, או לעגל חישובים באופן שאינו פוגע מהותית בתשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

ניקוד: שאלה 1	_____ מתוך 10 נקודות	תרגילי בית
שאלה 2	_____ מתוך 10 נקודות	הרצאות/תרגולים
שאלה 3	_____ מתוך 15 נקודות	יישום
שאלה 4	_____ מתוך 8 נקודות	תיאוריה
שאלה 5	_____ מתוך 2 נקודות	תיאוריה

סה"כ _____ מתוך 45 נקודות

בהצלחה!

שאלה 1 תרגילי בית (10 נקודות)

חלק 1. נוסחת Little

נתונה מערכת המשרתת שני סוגים של לקוחות, סוג 1 וסוג 2. נסמן את ממוצעי זמני השהיה של שני הסוגים על ידי W_1 ו- W_2 בהתאמה. נסמן ב- W את ממוצע זמן השהיה הכללית במערכת. נניח שהמערכת נמצאת במצב יציב.

1.1.1 בסעיף זה נניח כי נתונים (ע"י מדידות או מנסיון) p_1 ו- p_2 : פרופורציות מספר המופעים של הלקוחות מסוג 1

וסוג 2. ז"א, $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}$, כאשר λ_i הוא קצב המופע למערכת של לקוחות מסוג i , $(i = 1, 2)$.

בטאו את W בעזרת p_1, p_2, W_1 ו- W_2

$$W = p_1 W_1 + p_2 W_2$$

תשובה:

דרך חישוב:

תוחלת מס' ת

1.1.2 בסעיף זה נניח כי נתונים לנו q_1 ו- q_2 : פרופורציות מספר הלקוחות הנמצאים במערכת, מסוג 1 וסוג 2.

ז"א, $q_i = \frac{L_i}{L_1 + L_2}$, כאשר L_i הוא ממוצע מספר הלקוחות במערכת מסוג i , $(i = 1, 2)$.

בטאו את W בעזרת q_1, q_2, W_1 ו- W_2

$$W = \frac{1}{q_1/W_1 + q_2/W_2}$$

תשובה:

דרך חישוב:

$$\begin{aligned} W &= \frac{L_1 + L_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{L_1 + L_2}{\frac{L_1}{W_1} + \frac{L_2}{W_2}} = \frac{L_1 + L_2}{\frac{q_1(L_1 + L_2)}{W_1} + \frac{q_2(L_1 + L_2)}{W_2}} = \\ &= \frac{1}{q_1/W_1 + q_2/W_2} \end{aligned}$$

1.1.3 האם ייתכן כי בחברה מסוימת פרופורציות הגברים והנשים במצב יציב הן 80% גברים ו-20% נשים, אך קצב ההצטרפות של נשים חדשות לחברה הוא גדול יותר מקצב הצטרפות גברים חדשים? הסבירו את תשובתכם, תוך דוגמה מספרית.

כן, הולדק השוויון - זה מן הדין

תשובה:

פירוק.

קצוות:

חשב:

$$L = 36,000, \quad L_m = 28,800, \quad L_w = 7,200$$

$$\lambda_m = 144$$

$$\lambda_w = 199.6$$

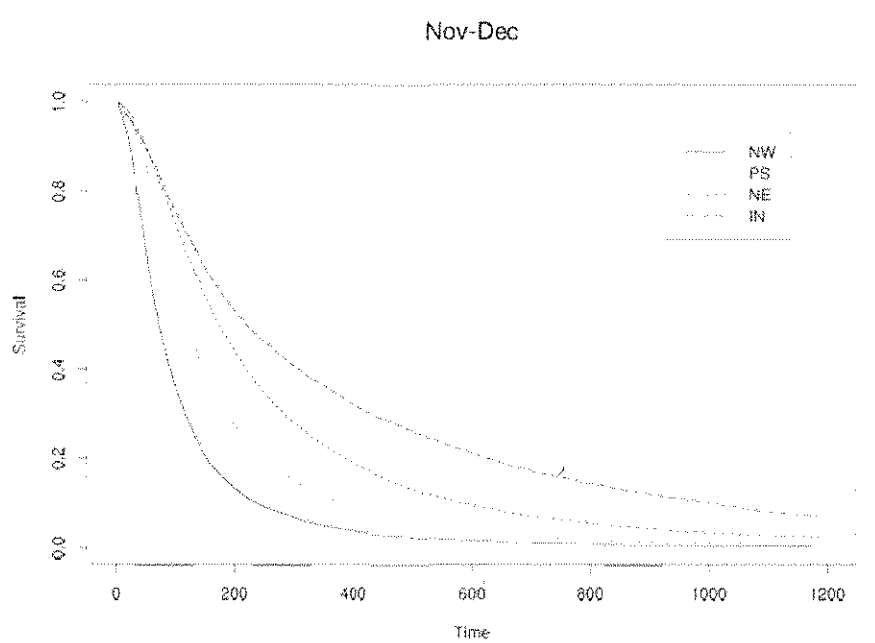
$$W_m = 200$$

$$W_w = 37$$

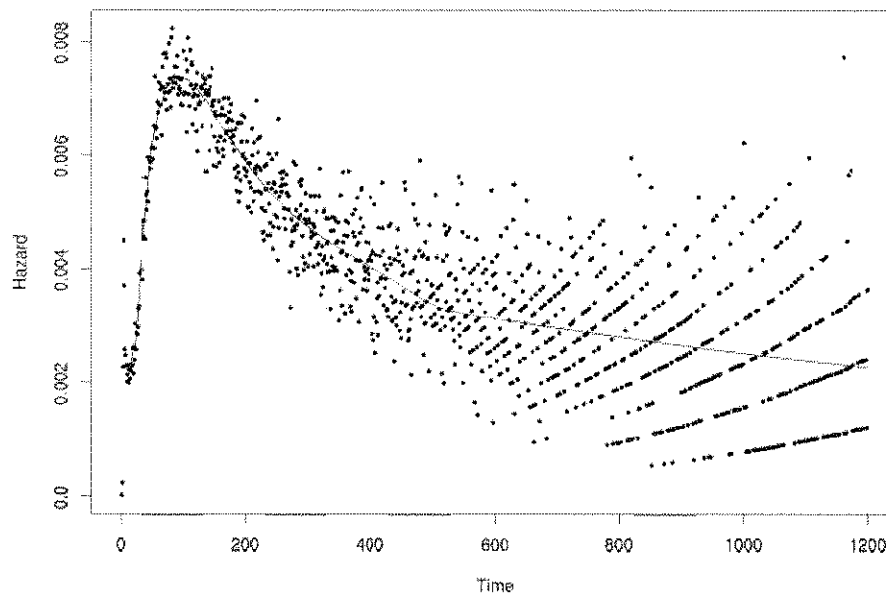
חלק 2. פונקציות שרידות ופונקציות סיכון של זמני שירות

שני הגרפים שלהלן מבוססים על נתוני מוקד שירות טלפוני של בנק ישראלי קטן. נותחו ארבע סוגי שירות עיקריים: PS, NW, NE, IN. גרף 1 מתאר פונקציות שרידות (survival functions) של ארבעת סוגי השירות. נקודות בגרף 2 הן אמדים לפונקצית הסיכון (hazard rate) של זמן השירות הכולל (כל סוגי השירות ביחד), ברזולוציה של שנייה אחת. בגרף 2 הוא אמד לפונקצית הסיכון אחרי החלקה.

גרף 1



גרף 2



1.2.1 איך הייתם אומדים את תוחלת זמן השירות של סוג שירות מסוים לו הייתה נתונה לכם רק פונקציית השרידות (survival) שלו $S(x), x \geq 0$?

תשובה:

נשתמש בנוסחה הזו:

$$E[S] = \int_0^{\infty} S(x) dx$$

1.2.2 איך הייתם אומדים את תוחלת זמן השירות של סוג שירות מסוים לו הייתה נתונה לכם רק פונקציית הסיכון (hazard rate) שלו $h(x), x \geq 0$?

תשובה:

נ"מ עקב פונקציות השרידות ממוקצ'ן

הסיכון:

$$S(x) = \exp\left\{-\int_0^x h(u) du\right\}$$

ואז כך נשתמש בנוסחה הזו

1.2.3 סדרו את ארבעת סוגי השירות לפי תוחלתם (מהקצרה ביותר לארוכה ביותר)

תשובה:

$$E(NW) < E(PS) < E(NE) < E(IN)$$

1.2.4 הסבירו את הצורה של "נקודות המסודרות על קו עולה", הבולטת בחלק הימני של גרף 2.

הערה:

האמידה של פונקצית הסיכון בגרף 2 נעשתה באופן הבא:

- נסמן ב A_k את מספר התצפיות עם זמן שירות ששווה ל- k שניות.
- נסמן ב η_k את מספר התצפיות עם זמן שירות שגדול או שווה מ- k שניות.
- האמידים לפונקצית הסיכון בשניה k (נקודות בגרף 2) חושבו ע"י $\widehat{h(k)} = A_k / \eta_k$.

חשב:

בנקודות מסודרות על קו עולה מתאימות

$\delta \quad A_k=1, A_k=2, \dots$

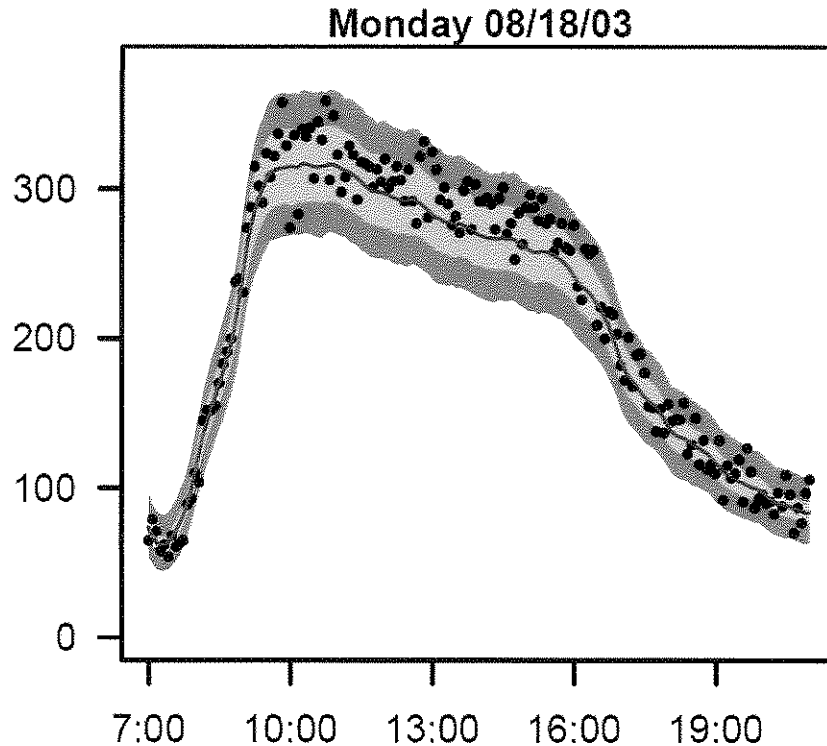
מספר $e^{-\eta_k}$ יורד כאשר במחן עולה,

קו"ק האם עולה ק.

(למשל, הן מתאם $A_k=1$).

שאלה 2 הרצאות/תרגולים (10 נקודות)

חלק 1. תהליך המופע למוקד שירות טלפוני. תחזית קצב המופע.



למעלה מתואר קצב המופע של לקוחות שפנו למוקד שירות טלפוני במהלך יום מסוים. **נקודות** בגרף מתארות את מספרי המופעים על פני אינטרוולים של חמש דקות. **תחזית** למספרי מופעים אלה שחושבה על סמך נתונים מימים קודמים מתוארת ע"י הקו.

נסמן ב- K את מספר האינטרוולים של חמש דקות במהלך יום עבודה. נסמן ב- N_k את מספר המופעים בפועל על פני אינטרוול k , $1 \leq k \leq K$, ונניח ש- N_k מתפלג לפי התפלגות פואסון עם פרמטר לא ידוע λ_k .

במהלך התחזית, ראשית מחשבים $\hat{\lambda}_k$, $1 \leq k \leq K$, אמדים לקצבי המופע, ושנית קובעים $\hat{N}_k$, תחזיות למספרי המופעים על סמך $\hat{\lambda}_k$.

בגרף אנו גם רואים שני סוגים של רווחי סמך. אנו נשתמש בשם **רווח סמך צר** עבור רווח הסמך הצר יותר (אפור בהיר) ובשם **רווח סמך רחב** עבור רווח הסמך הרחב יותר (אפור כהה).

אחד מרווחי הסמך האלה מתאים לקצבי המופע λ_k וחשני מתאים למספרי המופעים בפועל N_k .

2.1.1 איזה רווח סמך מתאים ל- λ_k ואיזה ל- N_k ? הסברו בקצרה.

רווח הסמך הצר מתאים ל- λ_k

רווח הסמך הרחב מתאים ל- N_k

הסבר קצר: $N_k \sim \text{Poisson}(\lambda_k)$, $\delta > 0$ פרמטר של λ_k וזר קטנה.

2.1.2 נניח שהפרמטרים λ_k ידועים בוודאות. איך ישתנו במקרה זה רווחי הסמך? סמנו ע"י עגול את התשובה הנכונה.

• רווחי הסמך לא ישתנו.

• רווחי הסמך הצרים והרחבים יהיו זהים זה לזה.

• רווח הסמך הצר יעלם ורווח הסמך הרחב יהיה צר יותר.

• רווח הסמך הצר יעלם ורווח הסמך הרחב לא ישתנה.

חלק 2. זמני שירות בבית חולים

הגרפים בעמודים 10-11 מתארים זמנים של ניתוחי יום ללא אשפוז (עמוד 10) לעומת ניתוחים המחייבים אשפוז (עמוד 11)

2.2.1 הגדירו מקדם השתנות (מסומן ב-CV, או C) של התפלגות.

$$CV(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)} = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)}$$

הגדרה:

2.2.2 הסבירו מדוע מקדם ההשתנות הוא מדד טבעי להשתנות סטוכסטית (ומתאים יותר מהשונות).
תנו דוגמא מספרית להסברכם. השתמשו בגרפים שלהלן כדי להדגים תשובתכם.

הסבר:

מקדם השתנות עוקב בהגיון יחס בין
סטיית תקן ותוחלת

דוגמא מספרית:

אם $E(X)=1,000$, $\sigma(X)=1$ השתנות קטנה מאוד.
אם $E(X)=1$, $\sigma(X)=1$ השתנות מעולה.

2.2.3 נניח כי עליכם לקרב את התפלגויות זמני הניתוחים על ידי אחת משתי ההתפלגויות הבאות:

Erlang או Hyper-Exponential.

איזו התפלגות מתאימה לניתוחי יום ואיזו לניתוחים המחייבים אשפוז?
נמקו תשובתכם במשפט יחיד.

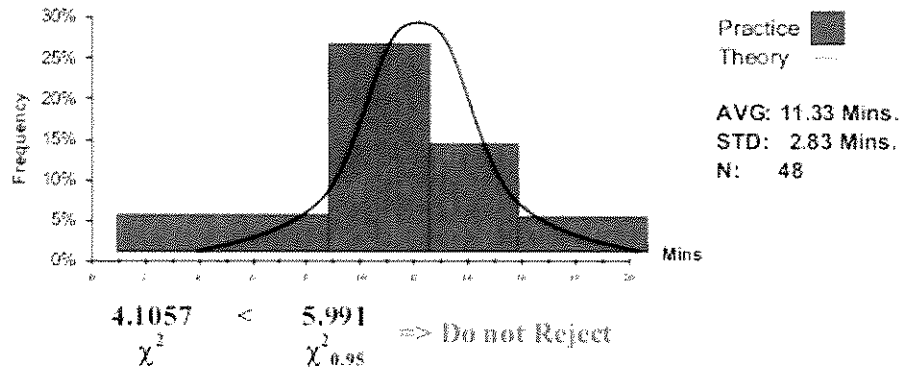
Erlang, $CV < 1$: ההתפלגות המתאימה היא:

Hyper Exp, $CV > 1$: ההתפלגות המתאימה היא:

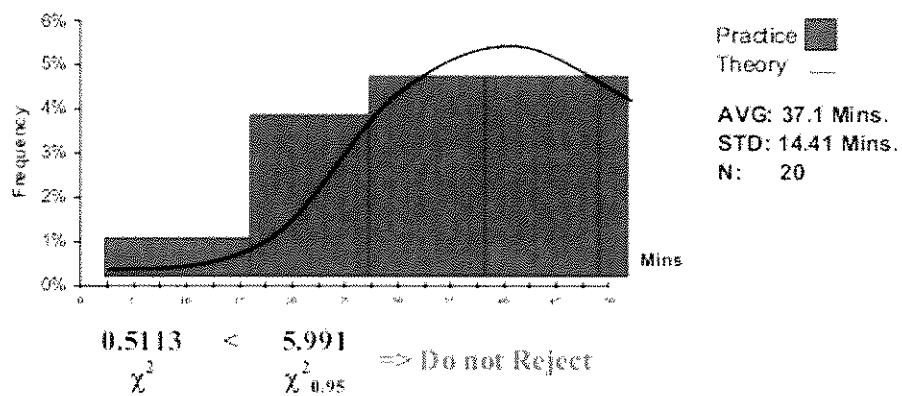
נימוק:

Ambulatory Operations Time Production of Health

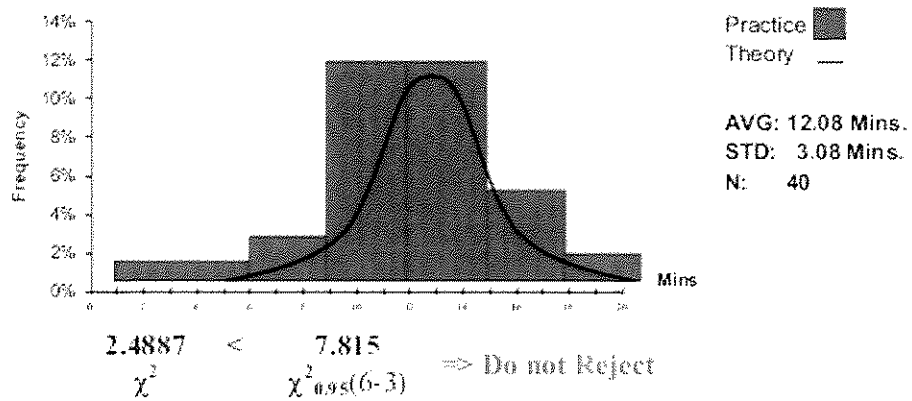
Cystoscopy:



TURT / TURP:



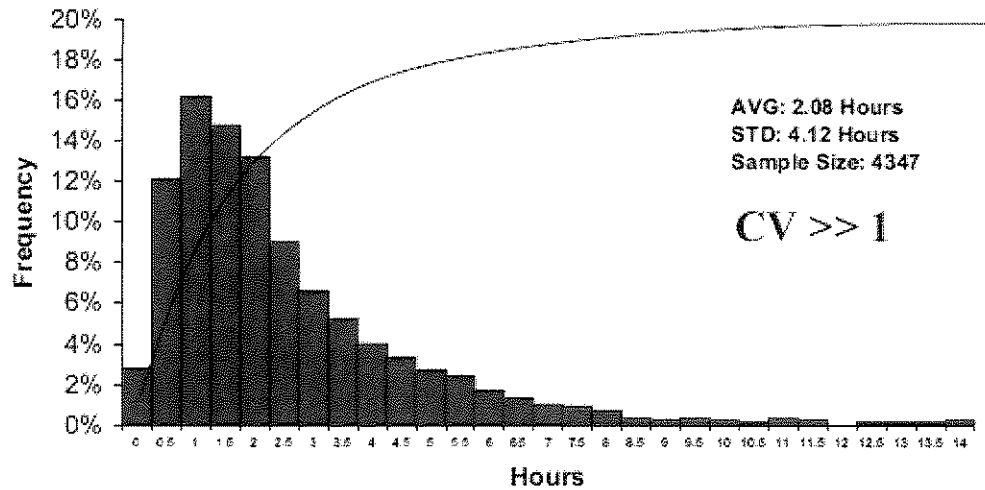
Curettage:



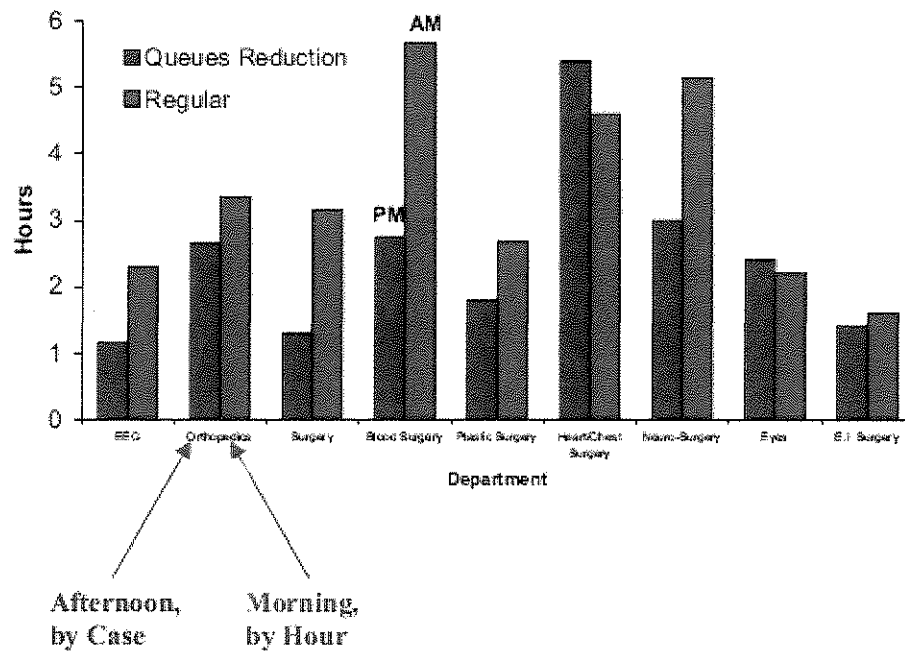
CV << 1

Operations Time In a Hospital

Operations Time Histogram:



Operations Time - Morning vs. Afternoon:



Ethical?

Even Doctors Can Manage!

חלק 3. זמני שירות וסבלנות

בגרפים 2 ו-3 שבעמוד 13 מתוארים קצבי מופע ומשכי שירות ממוצעים, כפונקציה של זמן ביום. (מדובר במוקד אותו ניתחתם בקורס.)

תנו שני הסברים אפשריים לסיבה שבסביבת השעות 10:00 ו-15:00 מתרחשת עליה ברורה גם בקצב המופע וגם במשך השירות הממוצע. כתמיכה בהסברכם השני, השתמשו בגרפים 4 ו-5 שבעמוד 14, כולל הסבר קצר של תוכן הגרפים.

הסבר 1:

ההסבר הפשוט הוא שמכיון שאם שעות
עמוסות עסקאות שמע"ע לשירות מגבגב'ק
זמן בתלונות ולכן משך שירות מתארך.

הסבר 2:

מהגרפ'ק 4 ו-5 עולה כי העקומות הסגול'ק
יותר קטן בעקומות שמן השירות שם יותר ארוך.
לכן, עקומות עם זמן שירות לאורך יותר קטן
שורד'ק וזמן שירות הממוצע מתארך.

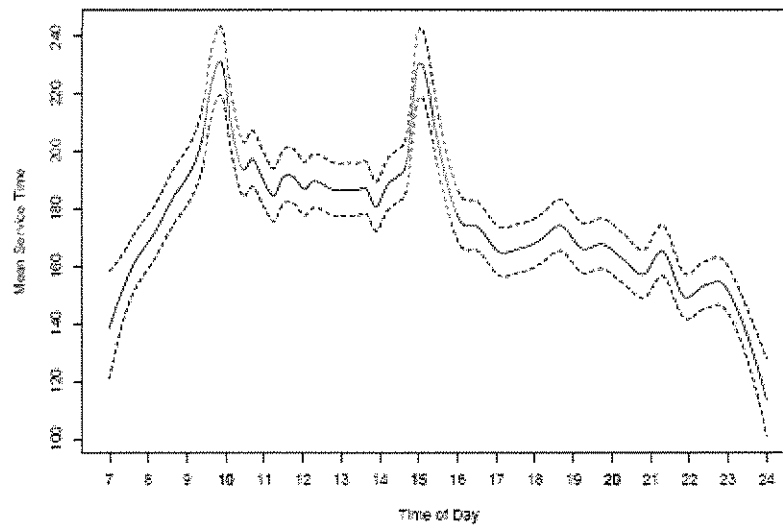
גרף 4 מראה:

את פונקציות השלי'קות של 4 סוג' שירות
שונים. מהגרף ניתן לראות כי עקומות נ"רות ערך
שם בעקומות עם עז'בות גבוהה קטן בע"י זמן שירות
ארוך יותר מעקומות חפ'ק ורע'ע'ק.

גרף 5 מראה:

פונקציות הס'כון של הסבלנות של עקומות
רע'ע'ק ועקומות בע"י עז'בות גבוהה. מכיון
שפונקציות הס'כון של עקומות רע'ע'ק גבוהה יותר
הסבלנות הממוצעת שלכם נמוכה יותר.

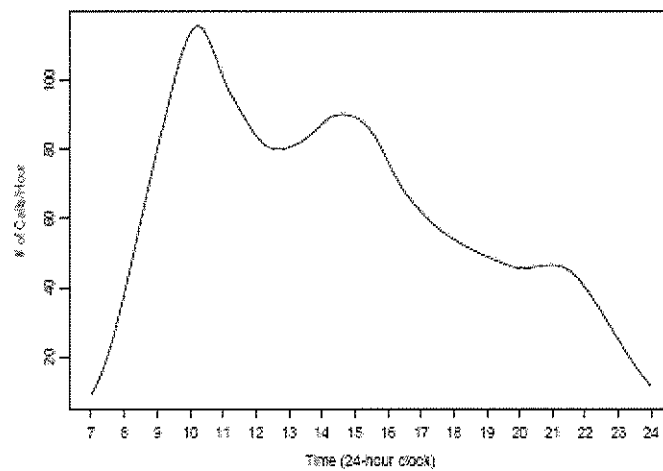
Figure 12: Mean Service Time (Regular) vs. Time-of-day (95% CI) ($n = 42613$)



Graph Number 2

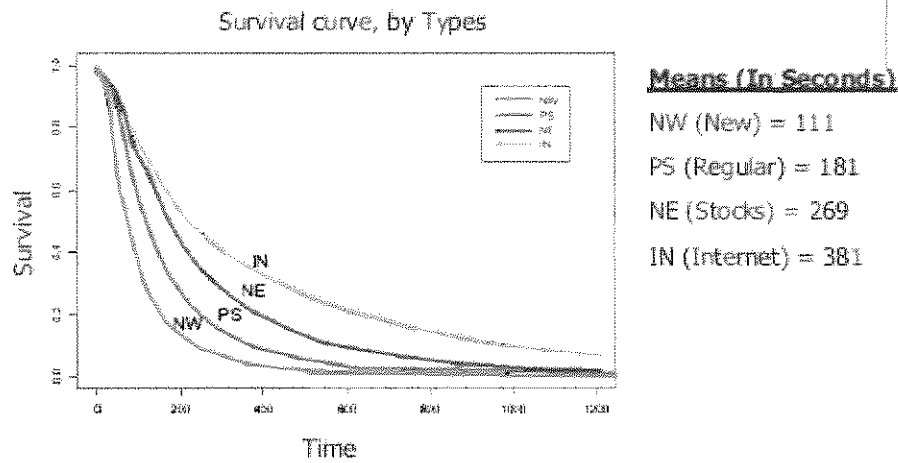
Arrivals: Inhomogeneous Poisson

Figure 1: Arrivals (to queue or service) – “Regular” Calls



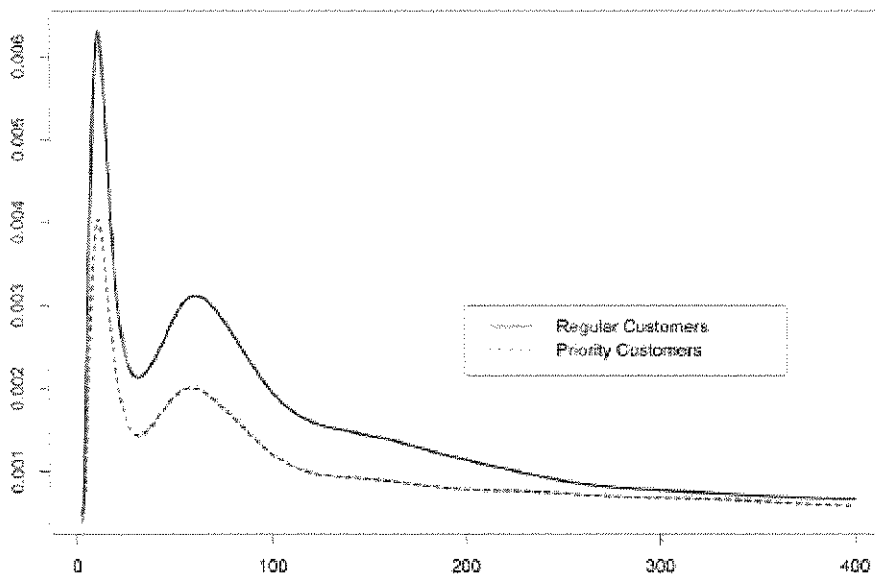
Graph Number 3

Service Time



Graph Number 4

Hazard Rate: Empirical (Im)Patience



6

Graph Number 5

שאלה 3 יישום (15 נקודות)

חלק 1. מערכת Erlang-C

הטבלה הבאה מהווה פלט מ-4CallCenters בו נמחקו כמה מדדים:

4CallCenters v2.23

File Table Settings Help

Performance Profiler | Staffing Query | **Advanced Profiling** | Advanced Queries | What-If Analysis

Advanced Profiling The Advanced Profiling tool allows you to enter multiple values for each of the input parameters, and produces a performance profile for each combination of parameters.

Compute * Add to Table Delete Rows Clear All Export Import Graph * Settings

Input Multi-Value	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Agents Occupancy	Average Speed of Answer	% Answer within Target	Average Queue Length
Results	60.0	00:00.0	105.0	03:00.0	2,000.0			48.4%	10.3
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									

Settings
Parameters
Indicators

Ready 01/04/2007 15:51

Start 4Call... Gazo... 0_A... Mo... Mo... 15:51

3.1.1 שחזרו את הערכים של נצילות השרתים ו-ASA (Average Speed of Answer).

תשובה:

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{2000}{105 \cdot 20} = \frac{100}{105} = 95.2\%$$

$$ASA = E[W_q] = \frac{E[L_q]}{\lambda} = \frac{10.3}{2000/3600} = 18.6 \text{ מ"ס}$$

Little מוס

3.1.2 באיזה תחום תפעולי המערכת מתפקדת (QD,ED,QED)? נמקו בקצרה.

תשובה:

QED
אחוזי תחום פ'ל'מ' 50% - δ

3.1.3 נניח שנתונים הפרמטרים של המערכת (105 שרתים, זמן שירות ממוצע של 3 דקות ו-2,000 שיחות בשעה) ואתם נדרשים לאמוד את אחוז הממתנים, וזאת ללא שימוש ב-CallCenters. חשבו את האמד והסבירו את חישובכם.

תשובה:

$$\text{Offered load } R = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2,000}{20} = 100$$

$$\beta = \frac{n-R}{\sqrt{R}} = \frac{105-100}{\sqrt{100}} = 0.5$$

פ'ל'מ' β=0.5 Erlang-c 2

δ - P{W_f > 0} = 50% פ'ל'מ' 48.4%
1788

הטבלה הבאה מהווה פלט מ-4CallCenters בו נמחקו אחוז הנענים ואחוז הנטישות:

Input Multi-Value	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per interval	Average Patience	Agent's Occupancy	%Answer	%Abandon	Average Speed of Answer	Average Time in Queue	Average Queue Length
Results	60.0	00:00.0	80.0	03:00.0	2,000.0	10:00.0	100%			02:12.8	02:00.0	66.7
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												

3.2.1 שחזרו את הערכים של אחוז הנענים ואחוז הנטישות.

תשובה: $L_s = n \cdot p = 80 \cdot 100\% = 80$ בגודל 2000 בגודל 2000

$\lambda_{eff} = L_s / E[s] = 80 / 0.05 = 1,600$

$P\{served\} = \frac{\lambda_{eff}}{\lambda} = \frac{1,600}{2,000} = 80\%$ $P\{AB\} = 20\%$

3.2.2 חשבו את מספר השיחות הממוצע במערכת (מספר כולל בתור ובשירות).

תשובה

$L = L_s + L_q = 80 + 66.7 = 146.7$

3.2.3 חשבו זמן ההמתנה הממוצע ללקוחות שנטשו ללא קבלת שירות.

תשובה

$$P\{AB\} \cdot E[W_{AB}] + P\{Served\} \cdot E[W_S] = E[W]$$

ASA ATQ

$$E[W_{AB}] = \frac{E[W] - P\{Served\} \cdot E[W_S]}{P\{AB\}}$$

100%

$$= \frac{2 - 0.8 \cdot (2 \cdot 12.8)}{0.2} = 1.12$$

3.2.4 באיזה תחום תפעולי המערכת מתפקדת (QD, ED, QED)? נמקו בקצרה.

תשובה

ED. הסתברות נטישה זמן המתנה
ללקוחות, נכילה שרתים 100%.

3.2.5 לחלן שני גרפים A ו-B שנוצרו בעזרת 4 CallCenters. בכל גרף, מתוארת תלות בין הסתברות הנטישה ופרמטר

אחד של מערכת Erlang-A. בכל גרף, הפרמטר האחד משתנה ושלושת הפרמטרים האחרים נשארים קבועים.

נזכיר שהפרמטרים של Erlang-A הם:

- קצב מופע (בשיחות בשעה).
- ממוצע של זמן שירות (בשניות).
- ממוצע של הסבלנות (בשניות).
- מספר שרתים.

ענו על 3 השאלות בעמוד הבא:

I. מי הם שני הפרמטרים המשתנים בגרף A ובגרף B? נמקו בקצרה.

ממוצע של הסבלנות ומספר השרתים. כאשר אני

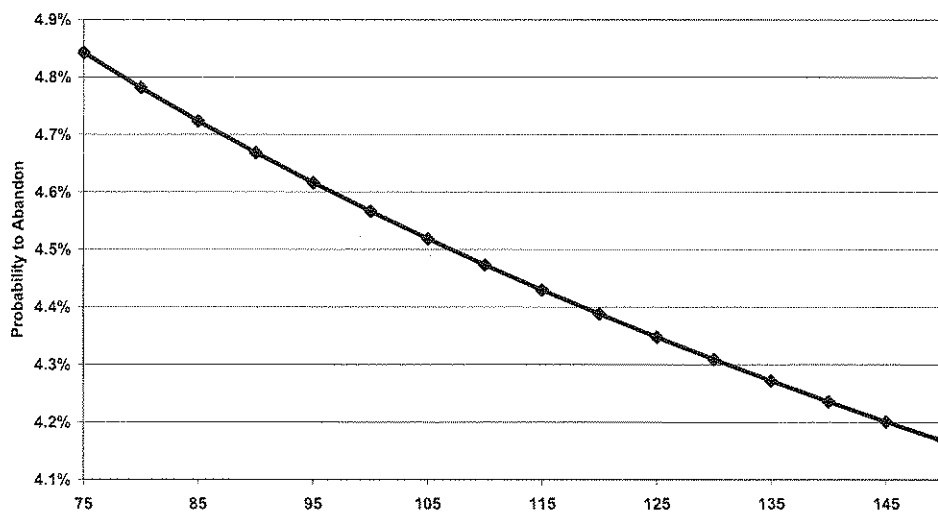
הפרבטיביק קאםה עושים, הסתברות הנשים יורדת.

II. איזה פרמטר משתנה בגרף A? ממוצע של הסבלנות. הסתברות נשים נשאר באותו
ממוק.

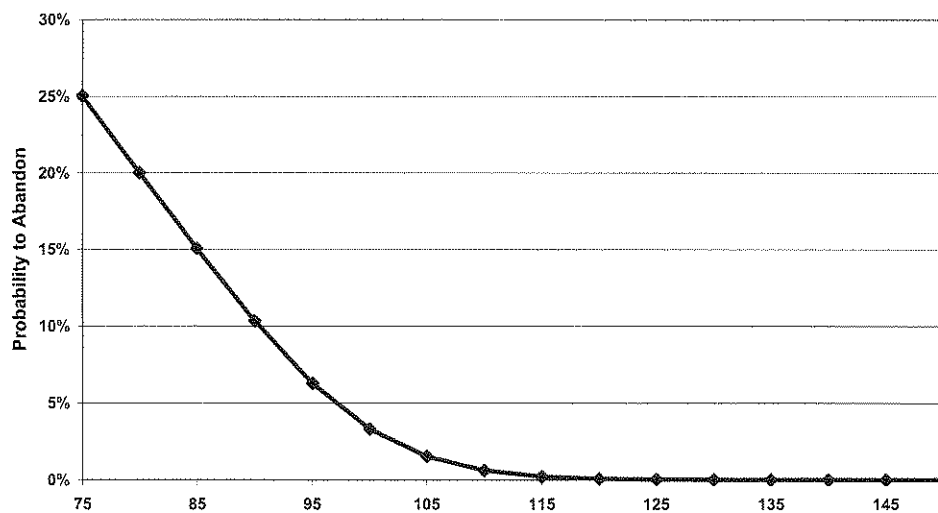
מספר שרתים. אנו עוברים ממוקן ED (n=75) ממוקן סט (n=150).

III. איזה פרמטר משתנה בגרף B?

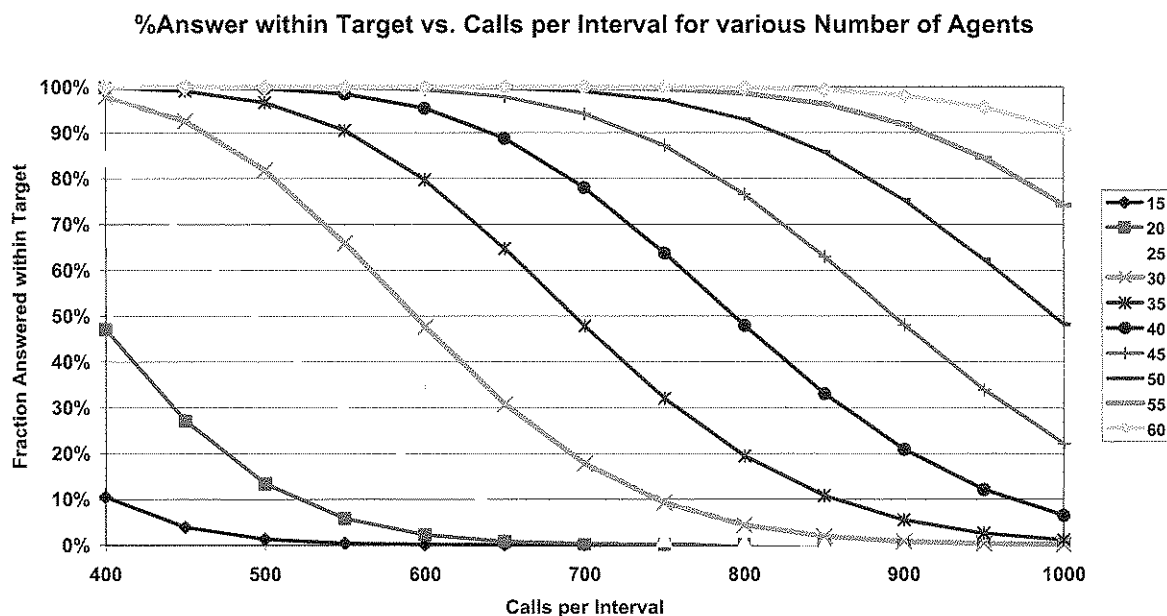
גרף A



גרף B



3.2.6 נתונה מערכת Erlang-A עם ממוצע זמן שירות של 3 דקות וממוצע סבלנות שגם הוא 3 דקות. בגרף שלהלן (עקומות צפף) מתואר קשר בין אחוז הלקוחות שנענו מייד וקצב המופע. בחרנו מספר שרתים שמשתנה בין 15 ל-60 בצעד של 5.



האם ניתן להסיק מהגרף דוגמה של תופעת יתרון לגודל: כאשר קצב המופע ומספר השרתים מוכפלים ביחד בפקטור מסוים שגדול מאחד (למשל, פי 2), עולה אחוז הנענים מייד. אם כן, תנו דוגמה. אם לא נמקו.

תשובה:

נ'תן דהסיק דוגמה פוקכה ליתרון לגודל ("חסרון לגודל"): כאשר קצב המופע ומספר השרתים מוכפלים ביחד בפקטור מסוים שגדול מאחד, יורד אחוז הנענים מייד. אם כן, תנו דוגמה. אם לא נמקו.

$$\lambda = 400, n = 25 \Rightarrow P\{W_q \geq 0\} \approx 83\%$$

$$\lambda = 800, n = 50 \Rightarrow P\{W_q \geq 0\} \approx 93\%$$

האם ניתן להסיק מהגרף דוגמה של תופעת הפוכה ליתרון לגודל ("חסרון לגודל"): כאשר קצב המופע ומספר השרתים מוכפלים ביחד בפקטור מסוים שגדול מאחד, יורד אחוז הנענים מייד. אם כן, תנו דוגמה. אם לא נמקו.

תשובה:

נ'תן דהסיק דוגמה פוקכה ליתרון לגודל ("חסרון לגודל"): כאשר קצב המופע ומספר השרתים מוכפלים ביחד בפקטור מסוים שגדול מאחד, יורד אחוז הנענים מייד. אם כן, תנו דוגמה. אם לא נמקו.

$$\lambda = 500, n = 20 \Rightarrow P\{W_q \geq 0\} \approx 13\%$$

$$\lambda = 1000, n = 40 \Rightarrow P\{W_q \geq 0\} \approx 7\%$$

חלק 3. מדדים תפעוליים של רמת השירות.

הטבלה הבאה מהווה פלט מ-4CallCenters:

4CallCenters v2.23

File Table Settings Help

Performance Profiler | Staffing Query | Advanced Profiling | Advanced Queries | What-if Analysis

Performance Profiler allows you to determine and optimize the Performance Level of your Call Center. Enter your call center's parameters below, then press 'Compute'.

Your Call Center's Parameters:

- Number of Agents Answering Calls: 10
- Average Time to Handle One Call (mm:ss): 02:00
- Calls per 60 minute Interval: 300
- Average Callers' Patience (mm:ss): 02:00

Settings:

- Features: Abandons
- Basic Interval: 60 minutes
- Target Time: 00:30 (mm:ss)

Change Settings

Compute * Add to Table Delete Rows Clear All Export Import Graph

	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	%Answer	%Abandon	%Answer within Target	%Abandon within Target
Results	60.0	00:30.0	10.0	02:00.0	300.0	02:00.0	87.5%	12.5%	71.1%	8.8%
1	60.0	00:10.0	10.0	02:00.0	300.0	02:00.0	87.5%	12.5%	55.7%	3.9%
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										

Settings
Parameters
Indicators

Ready 09/04/2007 17:54

Start Exams Exams HWS ie - Tera T... Moed_5_2... Mail :: INB... 4CallCent...

3.3 בעזרת הפלט שלעיל חשבו את המדדים הבאים :

1. אחוז הלקוחות שקיבלו שירות **ברמה טובה** (שורתו מהר);
2. אחוז הלקוחות שקיבלו שירות **ברמה נמוכה** (חיכו הרבה ונטשו);
3. אחוז הלקוחות שקיבלו שירות **ברמה סבירה**;
4. אחוז הלקוחות שרמת שירותם **אינה ברורה**.

תשובה:

1. שורתו ברמה גבוהה: $P\{W_q \leq 30 \text{ sec, Served}\} = 71.1\%$

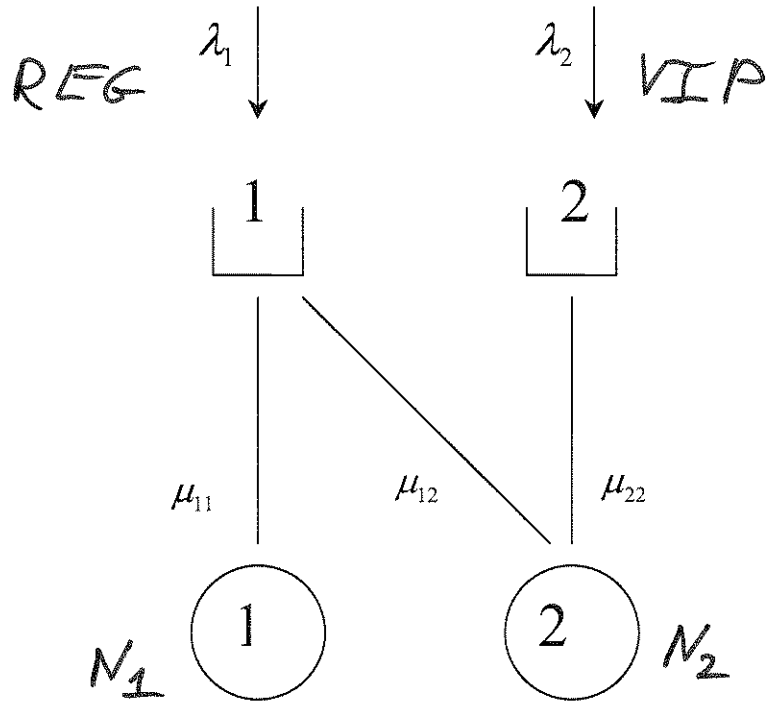
2. שורתו ברמה נמוכה: $P\{W_q > 10 \text{ sec; Abandoned}\} = 17.5 - 3.9 = 8.6\%$

3. שורתו ברמה סבירה: $P\{W_q > 30 \text{ sec, Served}\} = 87.5 - 71.1 = 16.4\%$

4. שורתו ברמה לא ברורה: $P\{W_q \leq 10 \text{ sec, Abandoned}\} = 3.9\%$

שאלה 4 תאוריה (8 נקודות)

נתון מודל של מערכת שירות בארכיטקטורת N, המתוארת בגרף הבא:



הפרמטרים של מודל המערכת נתונים ע"י $(i, j = 1, 2)$:

- ♦ λ_1 - קצב מופע לקוחות מסוג 1, עליכם נניח שהם לקוחות רגילים.
- ♦ λ_2 - קצב מופע לקוחות מסוג 2, עליכם נניח שהם לקוחות VIP.
- ♦ μ_{ij} - קצב שירות לקוחות מסוג i בתחנה j .
- ♦ N_j - מספר השרתים בתחנה j .

נבנה מודל נוזלים למערכת זו, באופן הבא:

$$X_i(t) = \text{סה"כ מספר הלקוחות מסוג } i \text{ במערכת (בשירות או בתור), בזמן } 0 \leq t.$$

נניח כי המערכת פועלת לפי מדיניות שהיא *preemptive*, ז"א ניתן בכל רגע להוציא לקוח משירות ולהחזירו להמתנה בתור. ללקוחות VIP יש עדיפות על הלקוחות הרגילים: לקוח רגיל לא יכול לקבל שירות בתחנה 2, כאשר לקוח VIP ממתין בתור. נניח שאם שתי התחנות זמינות לשרת לקוחות רגילים, הם נשלחים לתחנה 1 (גם מהתור וגם, אם מתחייב, משירות בתחנה 2). לבסוף, נניח שאין במערכת נטיות.

4.1 נניח כי $X_1(0) = 0$ ו- $X_2(0) = 0$. כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $X_1(t), X_2(t)$, $0 \leq t$.

תשובה:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = \lambda_1 - M_{11}(X_1 \wedge N_1) - M_{12} \cdot [(X_1 - N_1)_+ \wedge (N_2 - X_2)_+]$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = \lambda_2 - M_{22}(X_2 \wedge N_2)$$

4.2 תחת המדיניות המתואר לעיל, הציגו תנאי יציבות של מודל הנוזלים בעזרת λ_i, μ_{ij}, N_i . (ו"א, מה התנאים על הפרמטרים עבורם מודל הנוזלים לא יתפוצץ).

תשובה:

$$\begin{cases} M_{11} N_1 + M_{12} \cdot (N_2 - \frac{\lambda_2}{M_{22}})^+ \geq \lambda_1 \\ M_{22} N_2 \geq \lambda_2 \end{cases}$$

4.3 נניח שמתקיימים תנאי היציבות מסעיף 4.2. נניח שבנוסף מתקיים $\lambda_1 > \mu_{11} N_1$. חשבו ביטויים לגבולות של $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$ כאשר $t \rightarrow \infty$.

תשובה:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} \rightarrow 0, \frac{dX_2(t)}{dt} \rightarrow 0 \quad \text{ב'ג' ב'ג' ב'ג'}$$

$$\lambda_2 - M_{22}(X_2 \wedge N_2) = 0 \quad \text{ב'ג' ב'ג' ב'ג'}$$

$$\lambda_1 \geq \mu_{11} N_1 \text{ ולכן } (X_1 \wedge N_1) = N_1$$

$$(X_1 - N_1)_+ \wedge (N_2 - X_2)_+ = X_1 - N_1 \quad \text{ב'ג' ב'ג' ב'ג'}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - M_{11} N_1 - M_{12} (X_1 - N_1) = 0 \\ \lambda_2 - M_{22} \overline{X_2} = 0 \end{cases}$$

$$X_2(t) \rightarrow \overline{X_2} = \frac{\lambda_2}{M_{22}} \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$X_1(t) \rightarrow \overline{X_1} = \frac{\lambda_1 + (M_{12} - M_{11}) N_1}{M_{12}} \quad (t \rightarrow \infty)$$

שאלה 5 תאוריה (2 נקודות)

במערכת שירות $M_t | G | \infty$, המופע הוא פואסוני לא הומוגני בזמן עם קצב מופע $\{\lambda(t), t \geq 0\}$, ומשכי השירות S הם בלתי-תלויים, שווי התפלגות, ובלתי תלויים במופע.

נניח שמשך השירות S מקבל מספר סופי של ערכים, דהיינו

$$S = D_i \text{ wp } p_i, \quad i = 1, \dots, I$$

הוכיחו שמתקיים במקרה זה:

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

בנוסחה הנ"ל, S_e הוא "זמן שארית השירות", כפי שהוסבר בשיעור על "אמידה מוטה" (biased sampling).

למשל, אם S מתפלג דטרמיניסטי D , אזי S_e מתפלג אחיד $U(0, D)$.

הערה: מכיוון שניתן לקרב כל משתנה מקרי S בעזרת משתנה מקרי המקבל מספר סופי של ערכים, ההוכחה הנ"ל

בעצם מוכיחה את הזהות לכל זמן שירות S (על ידי קירוב ולקיחת גבולות).

הוכחה: ה'נ' $S = D_i \text{ wp } p_i$, N מקר פוסון.

שם נמוך: $S_e = U_i \text{ wp } \frac{p_i D_i}{E[S]}$, כאשר $U_i \sim U(0, D_i)$ (נ"ל א"ק)

$$E\left[\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right] = \sum_i p_i \int_{t-D_i}^t \lambda(u) du = \sum_i \int_{t-D_i}^t \lambda_i(u) du$$

$\lambda_i = \lambda \cdot p_i$

$$= \sum_i D_i \cdot E[\lambda_i(t - U_i)] = E(S) \cdot \sum_i \frac{p_i D_i}{E[S]} E[\lambda(t - U_i)]$$

$$= E(S) \cdot E[\lambda(t - S_e)]$$

↓
שם S_e נ"ל

$$\left[\text{כאן נ"ל} \text{ מתקין } \lambda(t) \text{ נ"ל} \right]$$