



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגלת : שמרית ממון

תאריך הבחינה : 30.10.2007

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד ב' - סמסטר אביב תשס"ז 2007

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש מחשבון.
- המבחן כולל 23 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

ניקוד: שאלה 1	_____ מתוך 10 נקודות	הרצאות/תרגולים
שאלה 2	_____ מתוך 10 נקודות	תרגילי בית
שאלה 3	_____ מתוך 17 נקודות	יישום
שאלה 4	_____ מתוך 8 נקודות	תיאוריה

סה"כ _____ מתוך 45 נקודות

בהצלחה!

שאלה 1 הרצאות/תרגולים (10 נקודות)

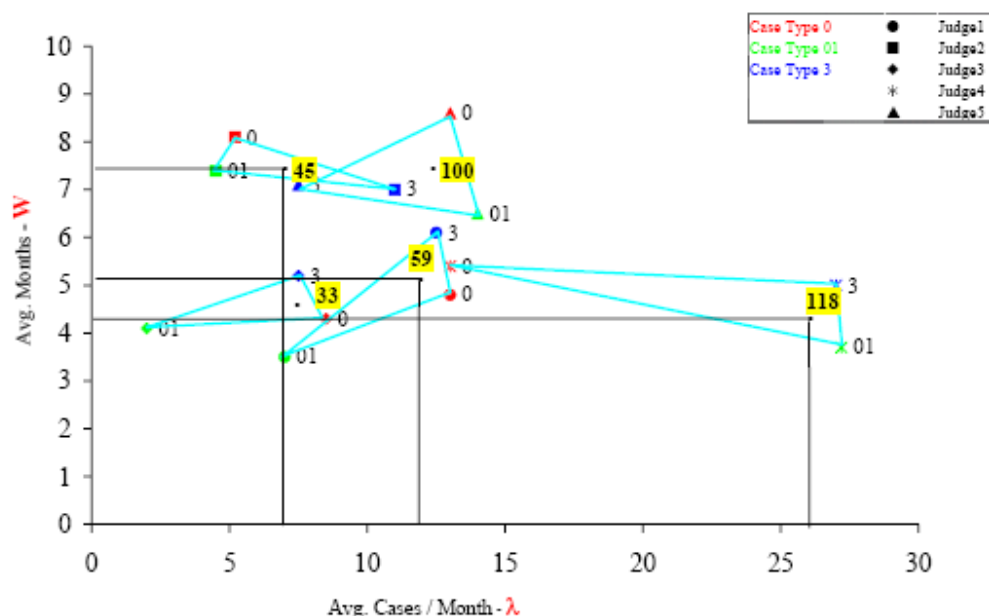
חלק 1.

בכל אחת משלוש השאלות הבאות, בחרו את התשובה הנכונה (אחת מארבע האפשרויות).

1.1.1

גרף 1

Judges: The Best/Worst (Operational) Performer



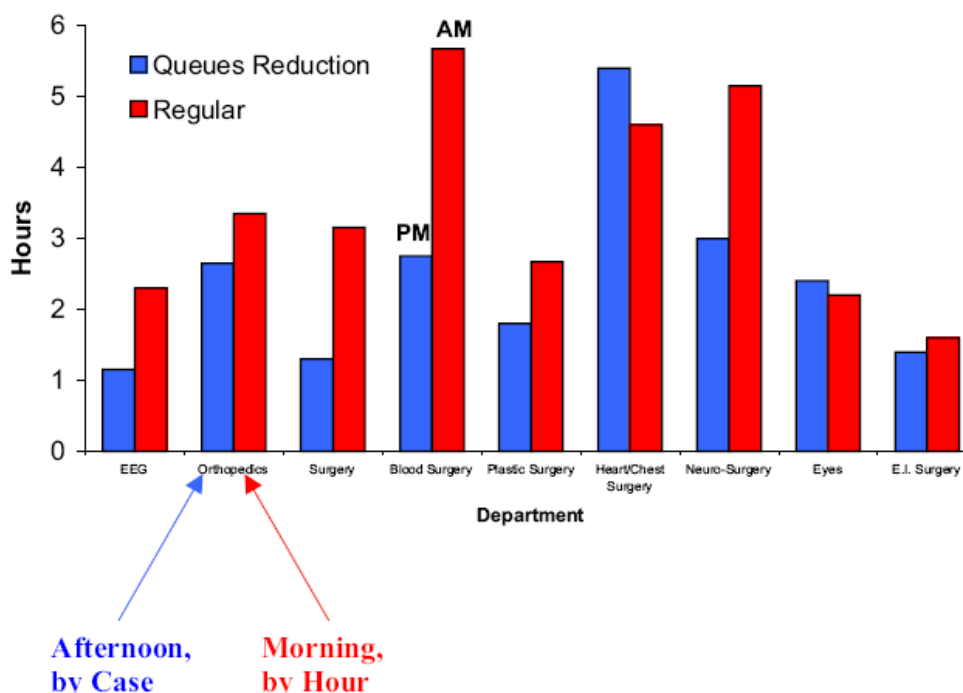
התרשים הנ"ל שהוצג בהרצאה מתאר את רמת הביצועים התפעוליים של חמישה שופטים בבית הדין לעבודה. בפרט, ניתן לנסות להשוות בין רמות הבצועים של שלושה שופטים על סמך שטחי שלושת מלבנים שאנו רואים בתרשים (השטחים שווים ל-59, 45 ו-118). מהי מהות הקשר בין שטח המלבן ורמת הביצועים של השופט?

1. שופט עם שטח המלבן גדול יותר הוא שופט עם רמת הבצועים הגבוהה יותר.
2. שופט עם שטח המלבן הגדול יותר הוא שופט עם רמת הבצועים נמוכה יותר.
3. לא נכון להשוות בין רמות הבצועים של שופטים על סמך שטחי המלבנים. לשופט עם רמת הבצועים גבוהה צריך להיות λ גבוה ו- W נמוך.
4. אף תשובה לא נכונה.

תשובה: 3

גרף 2

Operations Time - Morning vs. Afternoon:



גרף 2 שהוצג בהרצאה מתאר משכי ניתוחים בבית חולים מסוים בבוקר ואחרי הצהריים. אנו רואים שלכמה סוגי ניתוחים, זמני ניתוחים בבוקר הם הרבה יותר ארוכים מאח"צ. בחרו פסקה שמסכמת בצורה הסבירה ביותר את הסיבות לתופעה ואת השלכותיה הניהוליות.

1. התופעה היא בעייתית. בגלל מערכת תמריצים לא נכונה חולים מקבלים שירות ברמה נמוכה אח"צ, הבאה לידי ביטוי בניתוחים קצרים.
2. התופעה היא חיובית במקרה זה. מכיוון שאח"צ המנתחים מקבלים תשלום פר ניתוח, הם משאירים ניתוחים קלים יותר למשמרת אחרי הצהריים. כתוצאה מכך, המנתחים מקדישים לניתוחים הקשים יותר את שעות הבוקר, בהם הם ערניים יותר.
3. התופעה היא בעייתית. מכיוון שבבוקר המנתחים מקבלים תשלום פר שעה, הם מבצעים פחות מדי ניתוחים בבוקר שמביא לעומס יתר בשעות אח"צ.
4. התופעה היא חיובית במקרה זה. מערכת תמריצים מתוחכמת מאפשרת למזער הוצאות משכורת הרופאים וליעל את תהליכי ניהול בבית חולים.

למדנו בהרצאה שאת חווית ההמתנה של לקוח במרכז טלפוני ניתן לסכם באופן הבא :

- הזמן שלקוח מצפה להמתין - E
- הזמן שלקוח מוכן להמתין - τ
- הזמן שלקוח נדרש להמתין - V
- הזמן שלקוח למעשה המתין - W
- הזמן שלקוח הרגיש שהמתין - F

בחרו שוויון או אי שוויון שתמיד מתקיים לפי הגדרות שהוצגו בהרצאה.

1. $F \geq W$.

2. $W = \min(\tau, V)$.

3. $W = \max(\tau, V)$.

4. $W = E$.

תשובה: 2

חלק 2.

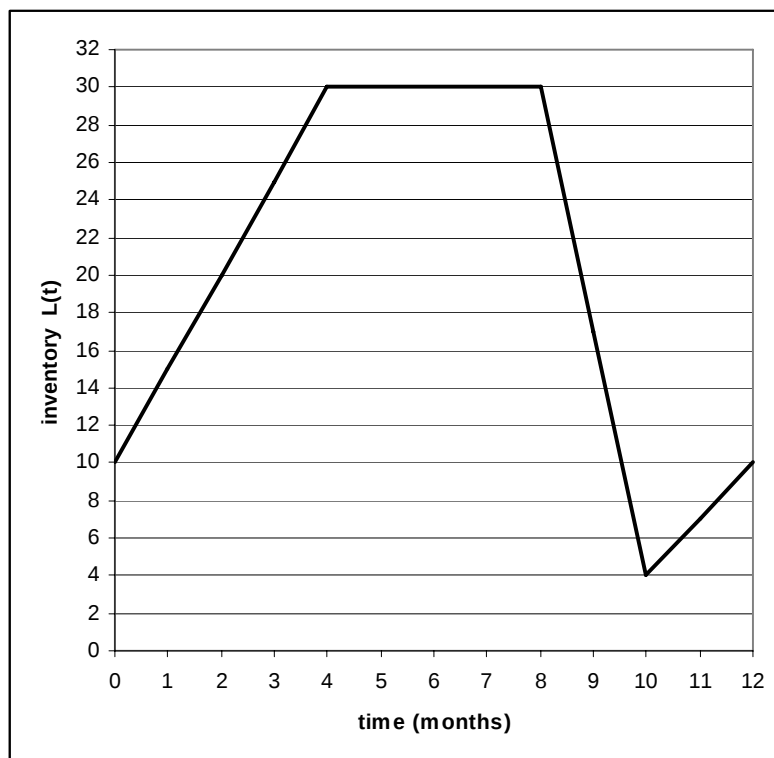
בשנה אופיינית סופרמרקט מקבל אספקת דגים בקצב קבוע ונתון של 25 טון דגים לחודש.
קצבי המכירה הממוצעים הם :

- 20 טון לחודש בחודשים ינואר - אפריל.
- 25 טון לחודש בחודשים מאי - אוגוסט.
- 38 טון לחודש בחודשים ספטמבר - אוקטובר.
- 22 טון לחודש בחודשים נובמבר - דצמבר.

נניח כי בתחילת השנה יש 10 טון דגים במקפיא וכי מדיניות ניהול המלאי היא FCFS (First Come First Served).

1.2.1 ציירו את דיאגרמת המלאי הממוצע $L(t)$ כפונקציה של הזמן.

תשובה:



1.2.2 מהי רמת המלאי הממוצעת על פני השנה?

תשובה:

$$20 \cdot \frac{4}{12} + 30 \cdot \frac{4}{12} + 17 \cdot \frac{2}{12} + 7 \cdot \frac{2}{12} = 20 \frac{2}{3}$$

1.2.3 מהו משך השהיה הממוצע של דג במקפוא? הסבירו תשובתכם, והצדיקו את ההנחות הנדרשות.

תשובה:

כמות הדגים במקפוא בסוף התקופה זהה לכמות שבתחילת התקופה ולכן ניתן להשתמש בחוק Little.

קצב הכניסה = קצב היציאה = 25 טון דגים, בנוסף $L = 20 \frac{2}{3}$ ולכן $W = \frac{20 \frac{2}{3}}{25} = 0.82 \text{ month} = 24.8 \text{ days}$.

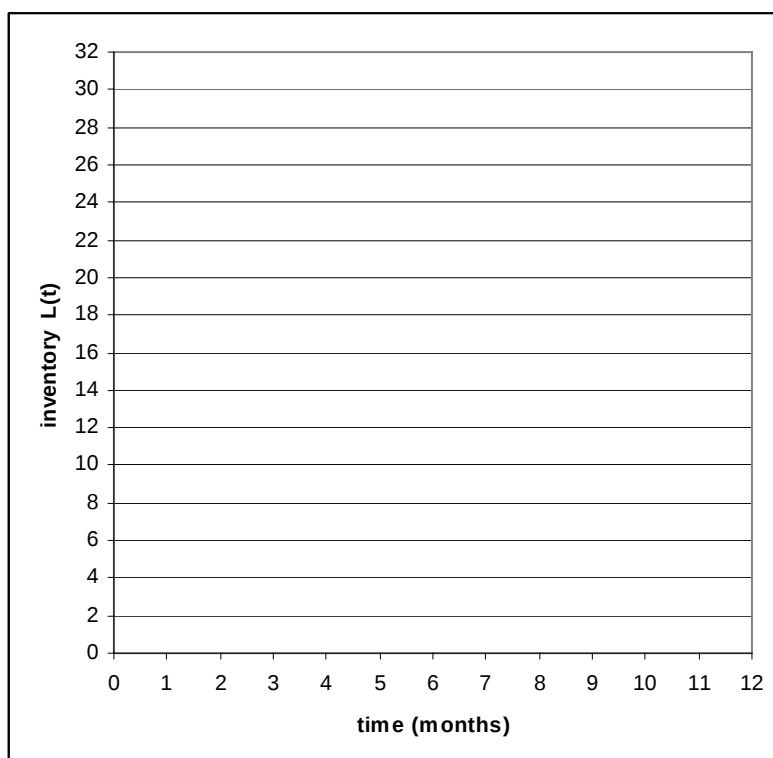
1.2.4 נניח כי חלה טעות בניהול מלאי הדגים בסופרמרקט כך שבפועל ניהול המלאי הוא לפי מדיניות LCFS (Last Come First Served). קבעו אלו מבין התשובות לשאלות 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3 ישתנו תחת המדיניות החדשה. הסבירו קביעתכם ופתרו מחדש את השאלות שפתרון השתנה.

תשובה:

שאלה 1.2.1: השתנה / לא השתנה

הסבר + פתרון חדש (במידת הצורך):

כמות הדגים במלאי לא משתנה עקב מדיניות ניהול המלאי.



שאלה 1.2.2 : השתנה / לא השתנה

הסבר + פתרון חדש (במידת הצורך) :

בהמשך לשאלה 1.2.1, גם רמת המלאי הממוצעת לא תשתנה.

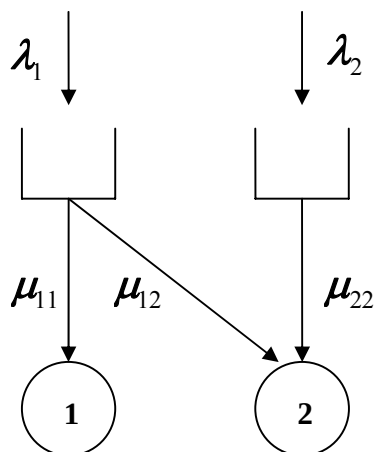
שאלה 1.2.3 : השתנה / לא השתנה

הסבר + פתרון חדש (במידת הצורך) :

מכיוון שרמת המלאי חיובית לאורך כל השנה, ישנם 4 טון דגים שאינם מוצאים כלל מהמלאי ולכן, זמן השהיה של 4 טון אלו הוא אינסופי וכך גם ממוצע זמן השהיה של דג במקפוא.

שאלה 2 תרגילי בית (10 נקודות)

נתון מודל של מערכת שירות בארכיטקטורת N, כמתואר בגרף הבא:



קצבי ההגעה לשני סוגי הלקוחות הם $\lambda_1 = 1.135$ ו- $\lambda_2 = 0.38$ לדקה. בכל תחנה יושב שרת יחיד. שרת 1 יכול לשרת רק לקוחות מסוג 1 עם קצב שירות $\mu_{11} = 1$. שרת 2 משרת לקוחות מסוג 2 בקצב $\mu_{22} = 1$, והוא יכול גם לעזור לשרת 1 ולשרת לקוחות מסוג 1 בקצב $\mu_{12} = 0.5$. קצבי השירות ניתנים ביחידות לדקה.

2.1 מהו אחוז הלקוחות המינימלי מסוג 1 שצריך שרת 1 לשרת על מנת להבטיח יציבות של המערכת?

תשובה:

$$\alpha \cdot \frac{\lambda_1}{\mu_{12}} + \frac{\lambda_2}{\mu_{22}} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.273$$

כלומר, שרת 1 צריך לשרת לפחות $1 - \alpha = 72.68\%$ מלקוחות מסוג 1.

2.2 הציעו מדיניות לתפעול המוקד, אשר תבטיח יציבות של המערכת.

תשובה:

עבור כל לקוח מסוג 1 המגיע למערכת נגזר מ"מ $U \sim \text{Uni}(0,1)$. אם $U < 0.7268$, הלקוח ישורת ע"י שרת 1, אחרת ישורת ע"י שרת 2.

2.3 הניחו כי לקוחות מסוג 1 הם לקוחות רגילים (Regular) ולקוחות מסוג 2 הם לקוחות VIP. בהינתן מידע זה, הציעו מדיניות סבירה לניהול המערכת הנ"ל? תארו בפירוט את המדיניות.

תשובה:

- אם לקוחות מסוג 2 הם לקוחות VIP, אזי נשלח כמה שיותר לקוחות מסוג 1 לשרת 1 וזאת באופן הבא:
- עם הגעת לקוח מסוג 1, נפנה אותו לשרת 1 אם הוא פנוי, אחרת יישלח לשרת 2. אם שני השרתים עסוקים, הלקוח יצטרף לתור.
 - עם סיום שירות אצל שרת 2, נבדוק האם ישנם לקוחות VIP בתור. אם כן, הראשון בתור ייכנס לשירות, ואם תור לקוחות ה- VIP ריק יכנס לשירות לקוח רגיל, וזאת במידה והתור של לקוחות מסוג 1 אינו ריק.

2.4 הניחו כעת כי המערכת פועלת לפי מדיניות שהיא *preemptive*, ז"א ניתן בכל רגע להוציא לקוח משירות ולהחזירו להמתנה בתור, אבל אסור "לזרוק" לקוחות מהמערכת. הניחו עוד כי בתחנה i עובדים במקביל N_i שרתים ($i=1,2$), **ובתחנה 2 ניתנת עדיפות** ללקוחות מסוג 2, שהם VIP. כמו כן, מדיניות ניתוב לקוחות מסוג 1 (Regular) לשירות היא כזו שאם בשתי התחנות ישנם שרתים פנויים לשירות לקוח מסוג 1, הוא נשלח לשירות **בתחנה 2**.

נגדיר:

$$X_1(t) = \text{סה"כ מספר לקוחות מסוג 1 במערכת (בשירות או בתור), בזמן } 0 \leq t.$$

$$X_2(t) = \text{סה"כ מספר לקוחות מסוג 2 במערכת (בשירות או בתור), בזמן } 0 \leq t.$$

כתבו משוואות דיפרנציאליות עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$.

תשובה:

$$\frac{dX_1}{dt} = \lambda_1 - \mu_{12} \left(X_1 \wedge (N_2 - X_2)^+ \right) - \mu_{11} \left[\left(X_1 - (N_2 - X_2)^+ \right)^+ \wedge N_1 \right]$$

$$\frac{dX_2}{dt} = \lambda_2 - \mu_{22} (X_2 \wedge N_2)$$

שאלה 3 יישום (17 נקודות)

חלק 1.

הטבלה הבאה הינה פלט מתוכנת 4CallCenters. מישכו של כל אינטרוול זמן הוא 60 דקות.

4CallCenters v2.23

FileTableSettingsHelp

Performance ProfilerStaffing QueryAdvanced ProfilingAdvanced QueriesWhat-if Analysis

Advanced Profiling

The **Advanced Profiling** tool allows you to enter multiple values for each of the input parameters, and produces a performance profile for each of parameters.

Compute◆Add to TableDelete RowsClear AllExportImportGraph◆Settings

Input Multi-Value	35	02:00	1000	List	40							
				▼								
	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Number of Trunks	Agent's Occupancy	Average Trunks Utilized	%Abandon	%Block	Average Speed of Answer	Average Time in Queue	Average Queue Length
Results												
1	35.0	02:00.0	1,000.0	00:01.0	40.0	86.2%	30.2	9.5%	.0%	00:00.0	00:00.1	.0
2	35.0	02:00.0	1,000.0	02:00.0	40.0	89.6%		2.2%		00:02.6	00:02.7	
3	35.0	02:00.0	1,000.0	59:59.0	40.0	90.1%	32.4	.1%	5.3%	00:03.3	00:03.3	.9

3.1.1 לאיזו מערכת תורים מתאימה הטבלה הנתונה? רשמו את המודל המתמטי המתאים ואת ערכי הפרמטרים של המודל. (אם פרמטר מקבל מספר ערכים, רשמו את כל האפשרויות).

תשובה:

$$M | M | N | K + M$$

$$\lambda = 1000 \frac{\text{customers}}{\text{hour}} ; \mu = 30 \frac{\text{customers}}{\text{hour}} ; N = 35 \text{ agents} ; K = 40 \text{ trunks} ; \theta = 3600 / 30 / 1 \frac{\text{customers}}{\text{hour}}$$

3.1.2 עבור האינטרוול השני, שחזרו את הערכים החסרים של אחוז הנחסמים, אורך התור הממוצע ו- Average Trunks Utilized. תארו בפירוט את חישוביכם.

תשובה:

$$\rho = \frac{\lambda(1 - \%Abandom - \%Block)}{N\mu} \Rightarrow \%Block = 1 - \%Abandom - \frac{\rho N\mu}{\lambda} = 0.0372$$

$$L_q = \lambda_{eff} \cdot ASA = \lambda(1 - \%Block) \cdot Average_Time_in_Queue = 1000(1 - 0.0372) \cdot \frac{2.7}{3600} = 0.722$$

$$AverageTrunksUtilized = L_q + N \cdot \rho = 0.722 + 35 \cdot 0.896 = 32.1$$

3.1.3 הניחו כעת כי עליכם לנתח מערכת מסוג $M | M | N | N$ (Erlang - B), כאשר קצב המופע למערכת הינו 1000 לקוחות לשעה, זמן שירות ממוצע הינו 2 דקות ובמערכת 35 שרתים. השתמשו בתוצאות המובאות בטבלה לעיל כדי לאמוד את אחוז הלקוחות הנחסמים (blocked). הסבירו את תשובתכם.

תשובה:

באינטרוול 1, סבלנות הלקוחות נמוכה (כלומר, לקוח שנאלץ להמתין ינטוש מיד את המערכת) ולכן המערכת תתפקד בדומה למערכת Erlang-B עם הפרמטרים הנתונים בשאלה. אחוז הנחסמים במודל Erlang-B זה יהיה כאחוז הנוטשים במערכת המקורית, כלומר אחוז הנחסמים הוא כ- 9.5%.

השאלות הבאות מתייחסות למוקד טלפוני המאופיין לפי המודל המוצג **באינטרוול השני** בטבלה שלעיל. שעת עבודה של מוקדן יחיד עולה 50 ₪, נטישה גורמת נזק של 100 ₪ וקבלת צליל תפוס ע"י לקוח גורמת לנזק של 75 ₪.

3.1.4 חשבו את העלות הממוצעת לשעה, עבור תפעול המערכת.

תשובה:

$$\begin{aligned} cost &= 50 * N + 100 * 1000 * P(Ab) + 75 * 1000 * P(Block) \\ &= 50 * 35 + 100 * 22 + 75 * 37 = 1750 + 2200 + 2775 = 6725 \end{aligned}$$

3.1.5 נניח כי הוחלט כעת לאייש את המוקד ע"י 5 מוקדנים נוספים, כלומר בסה"כ עובדים במוקד 40 מוקדנים. שאר הפרמטרים נותרו ללא שינוי. האם עלות התפעול של המערכת תעלה/תרד/לא תשתנה? נמקו בקצרה.

תשובה:

עלות תפעול המערכת **תרד**.

הסבר: כאשר במוקד 40 מוקדנים (כמספר הקווים), $P(Ab) = 0$ מכיוון שלקוח שמגיע מקבל שירות מייד או שנתקל בצליל תפוס. בנוסף, נשים לב כי $\mu = \theta$ ולכן ההסתברות לחסימה זהה לכל מספר של מוקדנים $40 \geq N$, ולכן $P(Block) = 3.72\%$.

ולכן, לאחר הוספת 5 שרתים $cost = 50 * 40 + 75 * 37 = 2000 + 2775 = 4775 < 6725$

בשאלות הבאות הניחו כי מספר הקווים במוקד הוא אינסופי וכי שאר הפרמטרים $(\lambda, \mu, \theta, N)$ נותרו ללא שינוי (דהיינו, כפי שהם מופיעים באינטרוול השני).

3.1.6 בכמה מוקדנים יש לאייש את המערכת על מנת להבטיח כי אחוז הממתינים יהיה בקירוב 50%?

תשובה:

זהו מודל Erlang-A שבו $\mu = \theta$, ולכן לפי פונקציית גרנט, על מנת להבטיח $P\{Wait > 0\} = 0.5$ נאייש את המוקד ב-

$$N = R = \left\lceil \frac{1000}{30} \right\rceil = 34 \quad \text{שרתים } (\beta = 0).$$

3.1.7 בעזרת תוכנת 4CallCenter נמצא כי על מנת להבטיח אחוז ממתינים של 30% בקירוב, יש לאייש את המערכת ב-31 שרתים וכי תחת רמת איוש זו ממוצע זמן ההמתנה בתור הוא 13 שניות. הניחו כעת כי מספר המופעים גדל פי 4. מהי רמת האיוש שתבטיח את אותו אחוז הממתינים? חשבו בקירוב את ממוצע זמן ההמתנה במקרה זה.

תשובה:

רמת האיוש:

$$\beta = \frac{N - R}{\sqrt{R}} = \frac{31 - 33.33}{\sqrt{33.33}} = -0.4$$

$$N_{new} = \left\lceil R_{new} + \beta \sqrt{R_{new}} \right\rceil = \left\lceil 4R - 0.4\sqrt{4R} \right\rceil = 128$$

ממוצע זמן ההמתנה: (QED)

$$E(W_q) = \frac{13}{\sqrt{4}} = 6.5 \text{ sec}$$

חלק 2.

השאלות הבאות נשאלות במסגרת מודל $Erlang-A (M / M / N + M)$.
את רמת השירות התפעולית ניתן לתאר, בפירוט, בעזרת פילוח הלקוחות באופן הבא:

1. לקוחות שקיבלו שירות **ברמה גבוהה** (שורתו מהר),
2. לקוחות שקיבלו שירות **ברמה נמוכה** (חיכו הרבה ונטשו),
3. לקוחות שקיבלו שירות **ברמה סבירה**,
4. לקוחות שרמת שירותם **אינה ברורה**.

נסמן ב- W_q את **זמן ההמתנה**, ב- Sr את המאורע – "**הלקוח שורת**", וב- Ab את המאורע "**הלקוח נטש**". כך למשל, $\{W_q < T_1; Sr\}$ מתאר את המאורע שלקוח שורת (לא נטש) לאחר שחיכה פחות מ- T_1 יחידות זמן.

3.2.1 תנו תיאור מדויק, בשפה של Ab, Sr, W_q , **לאחוז** ארבעת סוגי הלקוחות הנ"ל:

תשובה:

1. שירות ברמה גבוהה: $P(W_q \leq T; Sr)$

2. שירות ברמה סבירה: $P(W_q > T; Sr)$

3. שירות ברמה נמוכה: $P(W_q > \varepsilon; Ab)$

4. שירות ברמה לא ברורה: $P(W_q \leq \varepsilon; Ab)$

3.2.2 בעזרת המדדים מסעיף 3.2.1, כיצד מחשבים את אחוז הנוטשים?

תשובה:

$$P(Ab) = P(W_q > \varepsilon; Ab) + P(W_q \leq \varepsilon; Ab)$$

3.2.3 בטבלה שבעמוד הבא נתון פלט של תוכנת *4CallCenters*. בעזרת הפלט חשבו את ערכם המספרי של המדדים מסעיף 3.2.1:

תשובה:

1. שירות ברמה גבוהה: 62.6%
2. שירות ברמה סבירה: $84.1 - 62.6 = 21.5\%$
3. שירות ברמה נמוכה: $15.9 - 4.9 = 11\%$
4. שירות ברמה לא ברורה: 4.9%

4CallCenters v2.23

File Table Settings Help

Performance Profiler
Staffing Query
Advanced Profiling
Advanced Queries
What-if Analysis

Performance Profiler
Performance Profiler allows you to determine and optimize the Performance Level of your Call Center. Enter your call center's parameters below, then press 'Compute'.

Your Call Center's Parameters

Number of Agents Answering Calls15
Average Time to Handle One Call (mm:ss)02:30
Calls per 60 minute Interval400
Average Callers' Patience (mm:ss)02:00

Settings

Features:Abandons
Basic Interval:60 minutes
Target Time:00:30 (mm:ss)

Change Settings

Compute

Add to Table

Delete Rows

Clear All

Export

Import

Graph

	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Agent's Occupancy	%Answer	%Abandon	%Answer within Target	%Abandon within Target
Results											
1	60.0	00:00.0	15.0	02:30.0	400.0	02:00.0	93.4%	84.1%	15.9%	34.0%	.0%
2	60.0	00:10.0	15.0	02:30.0	400.0	02:00.0	93.4%	84.1%	15.9%	44.3%	4.9%
3	60.0	00:30.0	15.0	02:30.0	400.0	02:00.0	93.4%	84.1%	15.9%	62.6%	11.2%
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											

Settings

Parameters

Indicators

Ready

10/24/200711:33

start
Moed...
4CallC...
msn.C...
3_cou...
Servic...
Adob...
EN
11:33

חלק 3.

מוקד טלפוני פתוח למתן שירות במשך 10 שעות ביום. על-ידי תחזיות של תהליך ההגעות וקצבי השירות חושב, עבור כל שעה, האיוש האופטימלי המשיג רמת שירות שנקבעה מראש על-ידי מנהלת המוקד. נסמן את רמות האיוש האופטימליות ב- $N_1, \dots, N_{10}$.

בעיית מנהלת המוקד היא שלא ניתן להזמין מוקדנים רק לשעה מסוימת: כל מוקדן מוזמן **למשמרת** שאורכה 7 שעות, כולל **שעת הפסקה** לאחר 3 שעות עבודה. נסמן עלות מוקדן במשמרת ה- j - ית ב - C_j . על המנהלת לכסות את 10 שעות פעילות המוקד.

הינכם מתבקשים לעזור למנהלת לקבוע את רמת האיוש האופטימלית למשמרת תחת האילוצים הנ"ל, וכפי שנלמד בכיתה.

3.3.1 הגדירו מטריצה $A = [a_{ij}]$ המתארת את המשמרות האפשריות (ז"א הגדירו את אברי המטריצה a_{ij}).

תשובה:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if an agent working according to schedule } j \text{ is available during interval } i; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3.2 נסחו בעיית תכנות בשלמים, שפתרונה נותן איוש אופטימלי למשמרת עבור כל המשמרות האפשריות, וזאת במטרה להביא למינימום את עלויות האיוש של המוקד.

תשובה:

משתנה ההחלטה: X_j - מספר המוקדנים במשמרת ה- j .

$$\min \sum_{j=1}^4 C_j X_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} X_j \geq N_i \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$X_j \geq 0 \text{ integer}$$

שאלה 4 תיאוריה (8 נקודות)

חלק 1. אמידה מוטה.

נניח שזמנים בין-מופעים של אוטובוסים לתחנה הם בלתי-תלויים, שווי-התפלגות, ומתוארים על ידי משתנה מקרי (מ"מ) S . נניח שלמ"מ S יש תוחלת סופית $E(S)$ ושונות סופית $\sigma^2(S)$. בכתה הראינו שעבור נוסע המופיע באקראי לתחנה, הזמן S_e מרגע מופע הנוסע עד רגע מופע האוטובוס הבא הוא בעל תוחלת:

$$E(S_e) = \frac{1}{2}E(S) \cdot [1 + C^2(S)]$$

כאשר $C(S)$ הוא מקדם ההשתנות של המ"מ S . (בהקשרים של שירות, S_e נקרא גם "זמן שארית השירות").

4.1 הסבירו בקיצור את התופעה המתוארת על ידי הנוסחה ל- $E(S_e)$ (אותה כינינו "אמידה מוטה"), תוך שימוש במקרה פרטי (התפלגות מיוחדת) הממחיש אותה.

תשובה:

התופעה: דגימה של אינטרוול זמן ע"י בחירה של נקודת זמן בו, גורמת להטיה לטובת אינטרוולי זמן ארוכים.

לדוגמא: כאשר האינטרוולים הם זמנים בין מופעים של אוטובוסים, המתפלגים מעריכית (exp), נניח עם ממוצע $\frac{1}{\mu}$,

ממוצע S_e גם הוא $\frac{1}{\mu}$ (מיידית, על סמך חוסר זיכרון); שיקול נאיבי היה צופה כי הממוצע של S_e הוא רק $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu}$.

חלק 2. $M_t | G | \infty$

במערכת שירות $M_t | G | \infty$, המופע הוא פואסוני לא הומוגני בזמן עם קצב מופע $\{\lambda(t), t \geq 0\}$, ומשכי השירות S הם בלתי-תלויים, שווי התפלגות, ובלתי תלויים במופע. נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t ויהי $R(t)$ ממוצע מספרם: $R(t) = EL(t)$.

ניתן להראות ש- $R(t)$ נתון על ידי כל אחד משני הביטויים הבאים:

$$R(t) = E \left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du \right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

מטרת שני הסעיפים 4.2.1-4.2.2 להוכיח את הנוסחאות הנ"ל במקרה פרטי של משך שירות דטרמיניסטי.

4.2.1 נניח שמשך השירות S הוא **דטרמיניסטי** $S=D$: הוכיחו את השוויון בין שתי ההצגות של $R(t)$ למקרה זה, ז"א:

$$\int_{t-D}^t \lambda(u) du = D \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

כאשר S_e הוא זמן שארית השירות המתאים ל- S דטרמיניסטי D .

תשובה:

$S_e \stackrel{d}{=} U(0, D)$ מתפלג אחיד על $[0, D]$.

$$RHS = D \cdot E(\lambda(t - S_e)) = D \cdot \int_0^D \frac{1}{D} \cdot \lambda(t - x) dx = \int_0^D \lambda(t - x) dx \stackrel{u=t-x}{=} \int_{t-D}^t \lambda(u) du = LHS$$

4.2.2 הוכיחו שמתקיים:

$$R(t) = \int_{t-D}^t \lambda(u) du$$

$$\int_{t-D}^t \lambda(u) du = \int_0^t \lambda(u) du - \int_0^{t-D} \lambda(u) du \quad \text{רמז:}$$

תשובה:

נסמן $A(t)$ = מספר המופעים המצטבר עד זמן t . אזי $L(t) = A(t) - A(t-D)$, כי בזמן t נמצאים במערכת כל המופעים באינטרוול הזמן $(t-D, t]$.

בנוסף, $A(t) \stackrel{d}{=} \text{Poisson} \left(\int_0^t \lambda(u) du \right)$, ולכן

$$R(t) = E(L(t)) = \int_0^t \lambda(u) du - \int_0^{t-D} \lambda(u) du = \int_{t-D}^t \lambda(u) du.$$

חלק 3 . עומס מוצע.

בכתה הוסבר ש- $R(t)$ הנ"ל משמש כהגדרת **העומס המוצע (Offered Load)** למערכת שירות בזמן t , כאשר המופע אליה ומשכי השירות בה הם כמתואר בחלק 2 הנ"ל. (כזכור, $R(t)$ נמדד ב- Erlang).

4.3 הסבירו בקצרה מדוע אכן **ההגדרה מתאימה**. את הסברכם חלקו לשלושה חלקים:

4.3.1 **המקרה הפרטי** של מופע פואסוני **בקצב קבוע** ($\lambda(t) \equiv \lambda$): מהו $R(t)$ במקרה זה ומדוע הגדרתו מתאימה?

תשובה:

במקרה זה $R(t) = \lambda \cdot E(S) \equiv R$, אינו תלוי ב- t !

λ = מספר ממוצע של מופעים ליחידת זמן. כל מופע מביא עימו בממוצע $E(S)$ יחידות עבודה, הנמדדת ביחידות זמן-שירות. לכן R = כמות העבודה המגיעה למערכת ליחידת זמן, כאשר עבודה נמדדת ביחידות זמן שירות.

4.3.2 **דוגמא** של חדר מיון בבית חולים, שבו משך השהיה הממוצע **6 שעות**: מדוע ההגדרה מסעיף 4.3.1 איננה מתאימה למקרה שכזה?

תשובה:

כאשר S מקבל ערכים יחסית גדולים, כמות העבודה בזמן t במערכת כוללת עבודה שהגיעה זמן רב יחסית לפני t , ואם קצב המופע משתנה, כמו בחדר מיון, קצב מופע העבודה לפני זמן רב יכול להיות שונה בהרבה מקצב המופע בזמן t .

4.3.3 **המקרה הכללי**: מדוע הגדרת $R(t)$ בחלק 2 הנ"ל אכן מתאימה?

תשובה:

בהמשך ל- 4.3.2, $R(t)$ = כמות העבודה הנמצאת במערכת בזמן t ; עבודה נמדדת ביחידות זמן שירות, או לחילופין מספר יחידות זמן-שרת הנדרשות לטיפול. לכן $R(t) = E(L(t))$.

הביטוי $E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = R(t)$ ממחיש יפה את העובדה שכמות העבודה בזמן t כוללת עבודה שהגיעה לפני כן, בקצב תלוי זמן $\lambda(t)$.

4.4 הסבירו כיצד ניתן להרחיב את המקרה הדטרמיניסטי ב- 4.2.1 הנ"ל למקרה של S כללי, דהיינו כיצד מוכיחים שאכן:

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

רמז: ניתן לקרב כל משתנה מקרי, בדיוק רב כרצונכם, על ידי משתנה מקרי המקבל מספר **סופי** של ערכים (מ"מ דיסקרטי).

תשובה:

נניח $S = D_i$ w.p. p_i , מ"מ דיסקרטי.

על סמך עמידה מוטה, $\frac{p_i D_i}{E(S)}$ w.p. $S_e = U_i$, כאשר $U_i \stackrel{d}{=} U(0, D_i)$.
לכן,

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_i p_i \int_{t-D_i}^t \lambda(u) du = \sum_i \int_{t-D_i}^t \lambda_i(u) du \stackrel{4.2.1}{=} \sum_i D_i E(\lambda_i(t - U_i)) = \\ &= E(S) \sum_i \frac{p_i D_i}{E(S)} E(\lambda(t - U_i)) = E(S) E(\lambda(t - S_e)) = RHS \end{aligned}$$

4.5 ניתן להראות (על ידי שינוי משתני אינטגרציה בלבד) שמתקיים:

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = \int_{-\infty}^t \lambda(u) [1 - G(t - u)] du$$

כאשר $G(\cdot)$ היא פונקציית ההתפלגות של משך השירות S . שימו לב ליחס:

$$1 - G(t - u) = P\{S > t - u\}$$

היעזרו בעובדות אלו כדי לחזק את הסברכם בסעיף 4.3.3, ז"א תנו הסבר מדויק יותר לעובדה ש- $R(t)$ הוא אכן **ההגדרה המתאימה** לעומס המוצע (Offered Load) בזמן t .

תשובה:

1. $\lambda(u)$ = קצב המופע בזמן u . לכן $\lambda(u) du \approx$ ממוצע מספר המופעים במשך $(u, u + du)$.

2. $1 - G(t - u)$ = % המופעים בזמן u שעדיין נמצאים במערכת בזמן $t > u$.

3. $[\lambda(u) du] \cdot [1 - G(t - u)] \approx$ כמות העבודה במערכת בזמן t , שמקורה במופעים שהתרחשו במשך $(u, u + du)$.

4. $\int_{-\infty}^t \lambda(u) [1 - G(t - u)] du$ = כמות העבודה במערכת בזמן t , $t > 0$.