



מרצה : ד"ר גלית יום-טוב

מתרגל : נועה זיכלינסקי

תאריך הבחינה : 11.2.2016

מס' סטודנט _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד א' – סמסטר חורף 2016

- המבחן נמשך **שלוש** שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- **המבחן בחומר סגור.**
- **מותר להשתמש במחשבון מדעי רגיל.**
- המבחן כולל **29** עמודים, כולל עמוד זה.
- **כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.**
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת **הסברים או הוכחות רק אם** התבקשתם במפורש לעשות זאת.

שאלה 1	_____ מתוך 25 נקודות	תרגילי בית
שאלה 2	_____ מתוך 25 נקודות	בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים
שאלה 3	_____ מתוך 35 נקודות	יישום
שאלה 4	_____ מתוך 15 נקודות	תיאוריה

סה"כ _____ מתוך **100** נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 - תרגילי בית (25 נקודות).

חלק 1 – SEESat ומודל נוזלים עם עדיפויות

למרכז שרות US Bank פונים לקוחות מכמה סוגים, ביניהם לקוחות המוגדרים Business (1) ו- Platinum (2). לקוחות Platinum נחשבים לקוחות VIP המקבלים עדיפות בנגישות לשרות. השרות עצמו, הניתן לשני סוגי הלקוחות, זהה, ואותם מוקדנים יכולים לתת שרות לשני סוגי הלקוחות. למרות זאת הוגדרו שתי קבוצות נציגי שירות נפרדים: "מוקדני Business" ו"מוקדני Platinum", שכל אחת מהן נותנת שרות לקבוצת הלקוחות שלה. הפרמטרים של המערכת נתונים ע"י:

♦ λ_1 (λ_2) - קצבי מופע לקוחות מסוג 1 (2),

♦ μ_1 (μ_2) - קצבי שירות לקוחות מסוג 1 (2),

♦ N_1 (N_2) - מספר המוקדנים בקבוצת שירות 1 (2).

מנהל השיווק החליט להשתמש בתוכנת SEESat על מנת לבחון את רמת השירות הניתנת לשני סוגי לקוחות אלו. הוא טוען שבחודש יולי 2001 רמת השירות לא היתה טובה וזאת על סמך הגרפים הבאים:

Figure 1: Average waiting time for Business and Platinum calls (July-01)

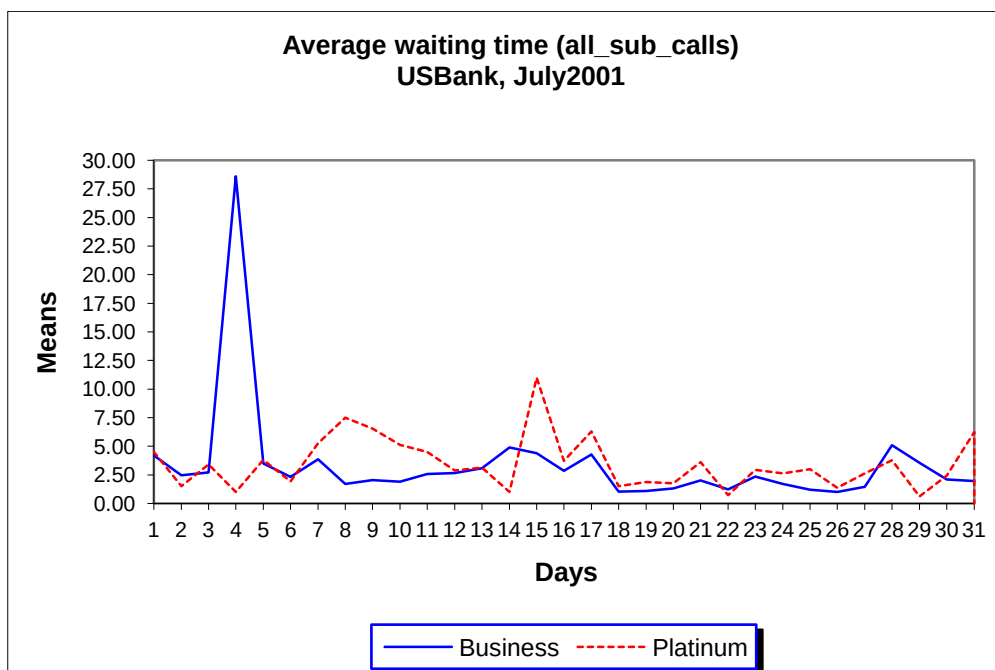
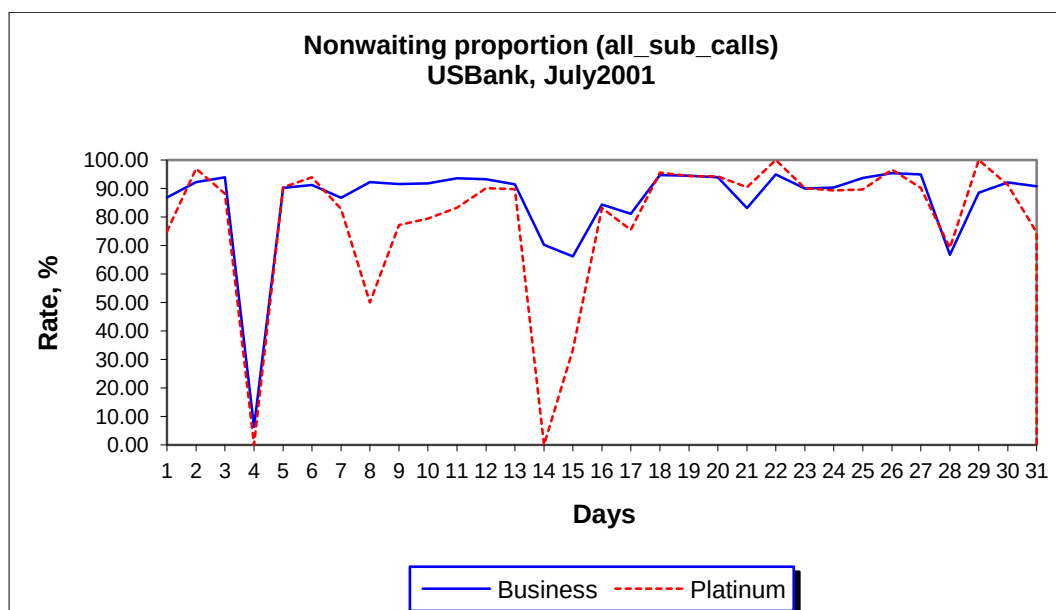


Figure 2: % immediately answered for Business and Platinum calls (July-01)



1.1.1. (2 נקודות) הסבירו את טענתו של מנהל השיווק, תוך שימוש בגרפים הנ"ל.

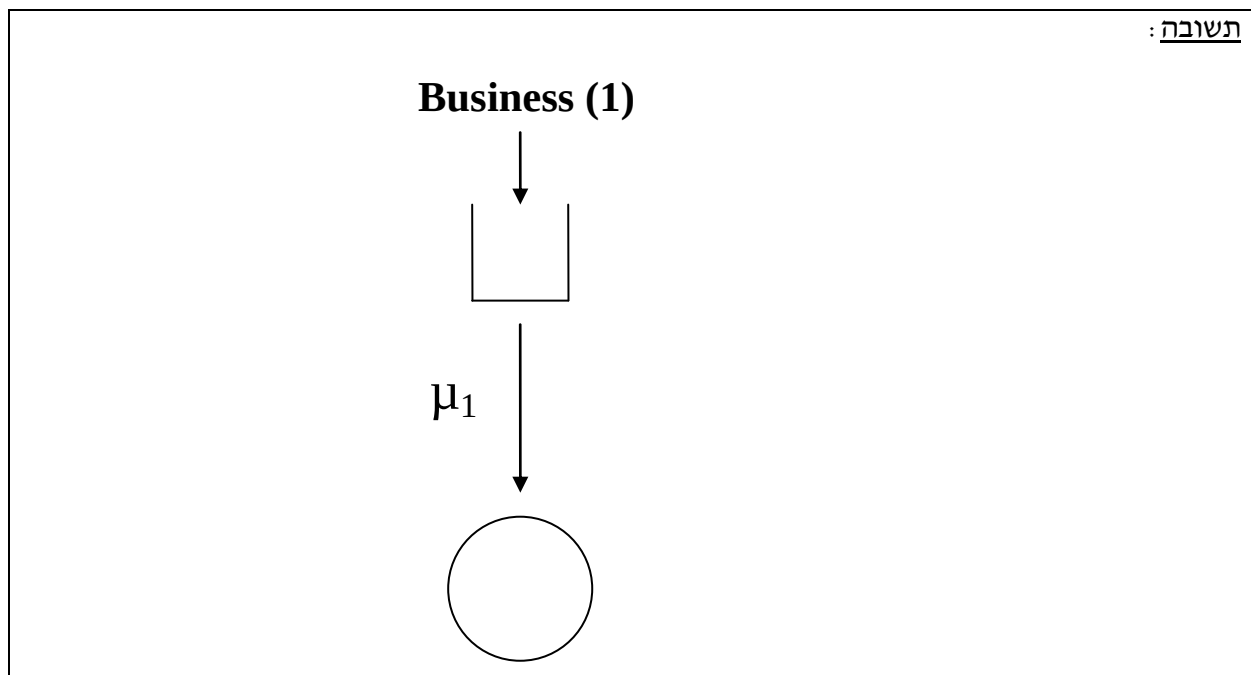
תשובה:

1.1.2. (2 נקודות) הציעו לפחות 2 פתרונות אפשריים לבעיה, ללא תוספת כוח אדם.

תשובה:

- כדי לשפר את רמת השירות ללקוחות Platinum, מציע מנהל השיווק להוסיף מוקדנים לקבוצת מוקדני ה-Platinum. כדי להבטיח את יעילות מוקדני ה-Platinum, הוא מציע בנוסף גם לאפשר להם לתת שירות ללקוחות ה-Business. לשם כך הוא הגדיר את מדיניות השירות הבאה:
- א. קבוצת מוקדני ה-Business נותנת שירות רק ללקוחות Business.
 - ב. קבוצת מוקדני ה-Platinum נותנת שירות לכולם, תוך מתן עדיפות ללקוחות Platinum.
 - ג. אם לקוח Business מגיע ויש מוקדנים פנויים בשתי הקבוצות, הוא יועבר למוקדני ה-Business.
 - ד. המערכת פועלת לפי מדיניות שהיא *preemptive*, ז"א ניתן בכל רגע להפסיק שירות של לקוח ולהחזירו להמתנה בתור מהסוג שלו, אבל אסור "לזרוק" לקוחות מהמערכת.
 - ה. המדיניות הינה *work conserving*, ז"א לא ייתכן מצב שבו יש שרתים פנויים ובעת ובעונה אחת יש גם לקוחות הממתינים בתור.

1.1.3. (2 נקודות) תארו את הארכיטקטורה של המערכת המוצעת בעזרת סכמה המתארת את זרימת הלקוחות במערכת, תחת ההנחה שאין נטיות. (השלימו את התרשים).



לצורך בנית מודל נוזלים למערכת הנ"ל, נגדיר את המשתנים הבאים:

$X_1(t)$ = סה"כ מספר הלקוחות מסוג 1 במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

$X_2(t)$ = סה"כ מספר הלקוחות מסוג 2 במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

1.1.4. (4 נקודות) כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$.

תשובה:

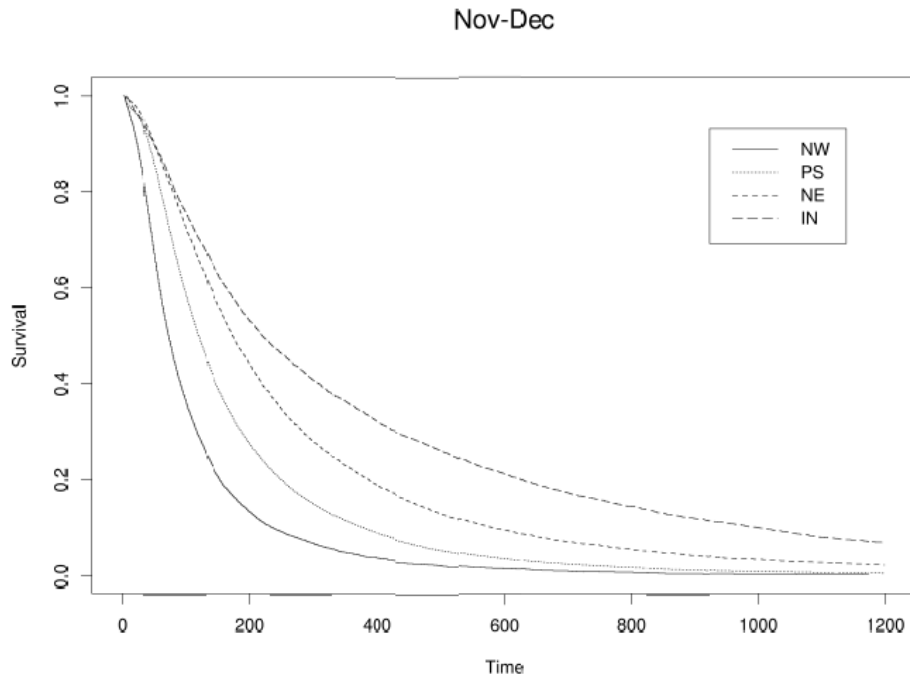
1.1.5. (4 נקודות) תארו בקיצור כיצד ניתן, בעזרת גיליון אלקטרוני בלבד, לפתור בקירוב (מדויק ככל הנדרש) את המשוואה הדיפרנציאלית מהסעיף הקודם.

תשובה:

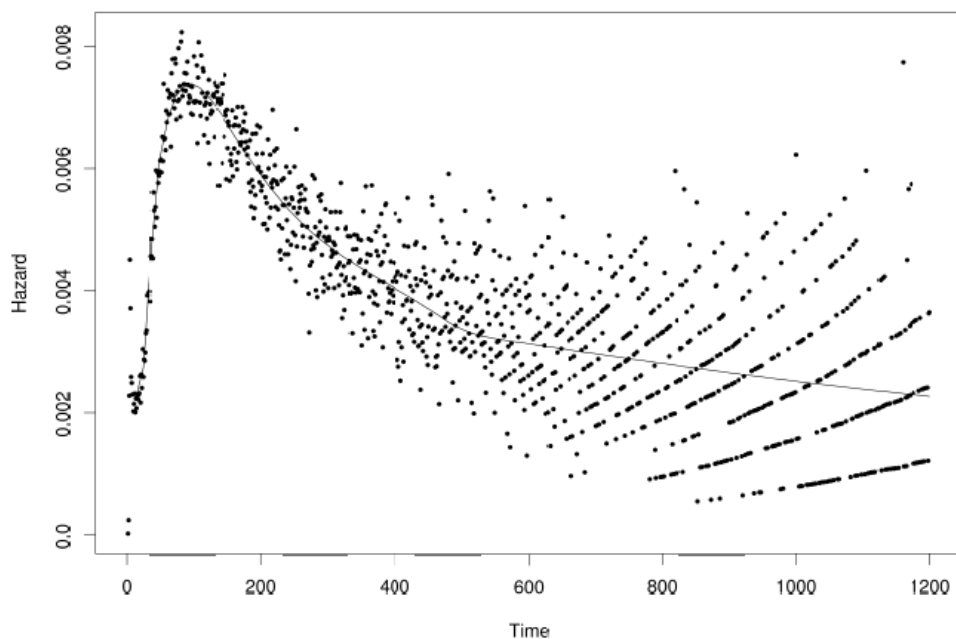
חלק 2 – פונקציות שרידות ופונקציות סיכון של זמני שירות

שני הגרפים שלהלן מבוססים על נתוני מוקד שירות טלפוני של בנק ישראלי קטן. נותחו ארבעה סוגי שירות עיקריים: NW, NE, IN, PS. גרף 1 מתאר פונקציות שרידות (survival functions) של ארבעת סוגי השירות. נקודות בגרף 2 הן אמדים לפונקצית הסיכון (hazard rate) של זמן השירות הכולל (כל סוגי השירות ביחד), ברזולוציה של שנייה אחת. הקו בגרף 2 הוא אמד לפונקצית הסיכון אחרי החלקה.

גרף 1



גרף 2



1.2.1. (3 נקודות) כיצד הייתם אומדים את תוחלת זמן השירות של סוג שירות מסוים, לו הייתה נתונה לכם רק פונקציית השרידות (survival) שלו $S(x), x \geq 0$?

תשובה:

1.2.2. (3 נקודות) כיצד הייתם אומדים את תוחלת זמן השירות של סוג שירות מסוים, לו הייתה נתונה לכם רק פונקציית הסיכון (hazard rate) שלו $h(x), x \geq 0$?

תשובה:

1.2.3. (2 נקודות) סדרו את ארבעת סוגי השירות לפי תוחלתם (מהקצרה ביותר לארוכה ביותר)

תשובה:

1.2.4. (3 נקודות) הסבירו את הצורה של "נקודות המסודרות על קו עולה", הבולטת בחלק הימני של גרף 2.

תערה:

האמידה של פונקצית הסיכון בגרף 2 נעשתה באופן הבא:

- נסמן ב A_k את מספר התצפיות עם זמן שירות שווה ל- k שניות.
- נסמן ב η_k את מספר התצפיות עם זמן שירות שגדול או שווה מ- k שניות.
- האמדים לפונקצית הסיכון בשניה k (נקודות בגרף 2) חושבו ע"י $\hat{h}(k) = A_k / \eta_k$.

תשובה:

שאלה 2 – בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים (25 נקודות).

להלן דו"ח ACD של מוקד טלפוני אותו ניתחנו בכיתה (בעמודה מופיע ה-*offeredload*, המסומן ב-R).

Charlotte – Center

Time	Recvd	Answ	Abn %	ASA	AHT	Occ %	On Prod%	On Prod FTE	R
0	20,577	19,860	3.5%	30	307	95.1%	85.4%	222.7	
8:00	332	308	7.2%	27	302	87.1%	79.5%	59.3	55.70
8:30	653	615	5.8%	58	293	96.1%	81.1%	104.1	106.29
9:00	866	796	8.1%	63	308	97.1%	84.7%	140.4	148.18
9:30	1,152	1,138	1.2%	218	303	90.8%	81.6%	211.1	193.92
10:00	1,330	1,286	3.3%	22	307	98.4%	84.3%	223.1	226.84
10:30	1,364	1,338	1.9%	33	296	99.0%	84.1%	222.5	224.30
11:00	1,380	1,280	7.2%	34	306	98.2%	84.0%	222.0	234.60
11:30	1,272	1,247	2.0%	44	298	94.6%	82.8%	218.0	210.59
12:00	1,179	1,177	0.2%	1	306	91.6%	88.6%	218.3	200.43
12:30	1,174	1,160	1.2%	10	302	95.5%	93.6%	203.8	196.97
13:00	1,018	999	1.9%	9	314	95.4%	91.2%	182.9	177.58
13:30	1,061	961	9.4%	67	306	100.0%	88.9%	163.4	180.37
14:00	1,173	1,082	7.8%	78	313	99.5%	85.7%	188.9	203.97
14:30	1,212	1,179	2.7%	23	304	96.6%	86.0%	206.1	204.69
15:00	1,137	1,122	1.3%	15	320	96.9%	83.5%	205.8	202.13
15:30	1,169	1,137	2.7%	17	311	97.1%	84.6%	202.2	201.98
16:00	1,107	1,059	4.3%	46	315	99.2%	79.4%	187.1	193.73
16:30	914	892	2.4%	22	307	95.2%	81.8%	160.0	155.89
17:00	615	615	0.0%	2	328	83.0%	93.6%	135.0	112.07
17:30	420	420	0.0%	0	328	73.8%	95.4%	103.5	76.53
18:00	49	49	0.0%	14	180	84.2%	89.1%	5.8	4.90

2.1. (3 נקודות) נתמקד בשלושה חצאי השעות 13:30-14:00, 14:30-15:00 ו- 17:00-17:30. התאימו אל כל אחד מהם את המדיניות התפעולית המתאימה מבין: **ED**, **QED** ו- **QD** ונמקו בקצרה אך במדויק ככל שתוכלו.

תשובה:		
אינטרוול	מדיניות	נימוק קצר
13:30–14:00		
14:30–15:00		
17:00–17:30		

2.2. (3 נקודות) עבור כל אחד מחצאי השעות מהסעיף הקודם כתוב את כלל האיוש המתאים וחשב את פרמטר רמת השירות המתאים.

תשובה:		
אינטרוול	כלל האיוש	פרמטר רמת השירות
13:30–14:00		
14:30–15:00		
17:00–17:30		

2.3. (2 נקודות) בשורה הראשונה של דו"ח ה-ACD מסוכמים מדדי המוקד היומיים. למשל,

♦ 20,577 מופעים ליום, או $\frac{20,577}{21} \approx 980$, ז"א כ- $\lambda = 980$ מופעים בממוצע לחצי שעה,

♦ 307 שניות משך שירות ממוצע, או כ- $E(S) = 5$ דקות,

♦ 222.7 מוקדנים בממוצע, או כ- $n = 220$ מוקדנים.

♦ 95.1% נצילות ממוצעת, או כ-95% נצילות.

בשורה ראשונה זו ישנה טעות. מהי טעות זו? הסבירו בקצרה.

רמז: כדי לאתר את הטעות שימו לב לחישוב הפשוט הבא:

$$\frac{\lambda \cdot E(S)}{n} = \frac{980 \cdot 5}{220} \approx 74\%$$

כיצד מתיישב חישוב פשוט זה עם הנתון של 95.1% נצילות יומית? הסבירו בקצרה.

תשובה:

הטעות היא:

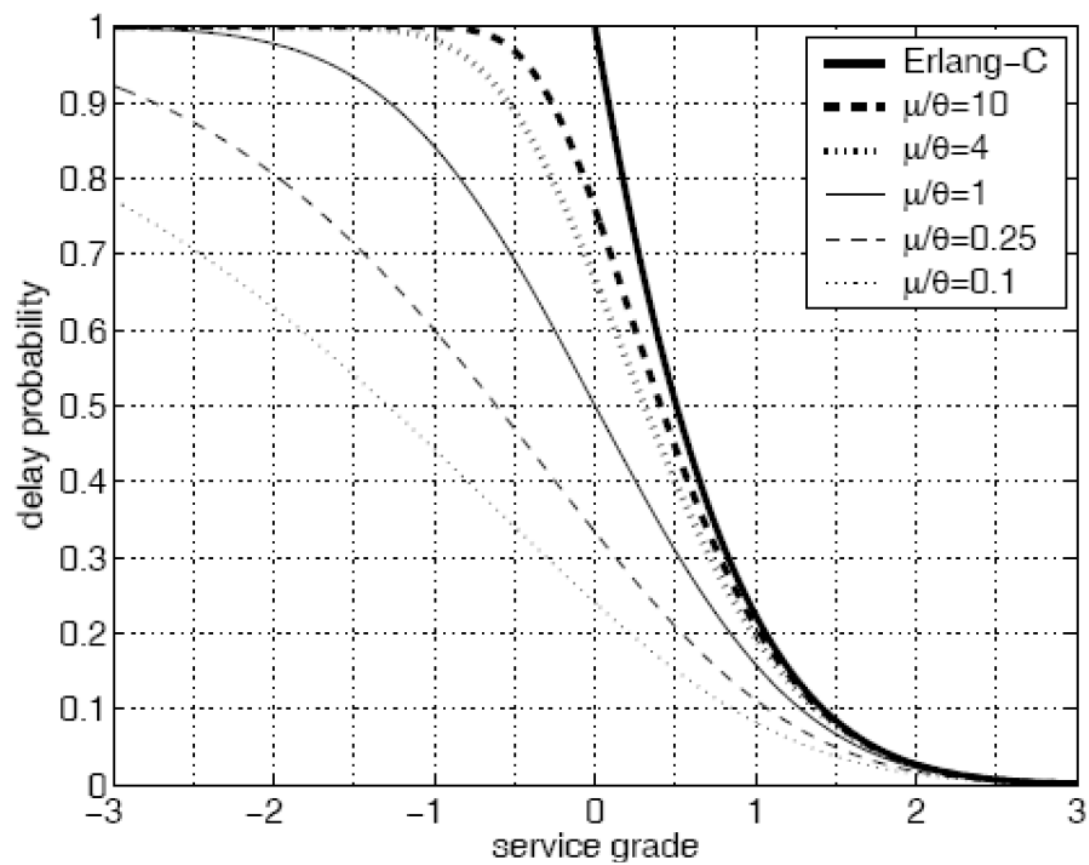
הסבר:

2.4. (6 נקודות) עבור כל אחת מהאינטרוולים בסעיף 2.1 נניח כי מספר המופעים היה גדל פי 4 וגם מספר המוקדנים (שרתים) היה גדל פי 4. תנו הערכתכם לאחוז הנוטשים תחת תרחיש חדש זה עבור כל אחד מהאינטרוולים. נמקו בקצרה ובמדויק ככל שתוכלו.

תשובה:

אינטרוול	% הנוטשים הנוכחי	% הנוטשים החדש	נימוק קצר
13:30–14:00			
14:30–15:00			
17:00–17:30			

2.4. (4 נקודות) הניחו שלמוקד שירות טלפוני מגיעות 100 שיחות בדקה. ממוצע משך שיחה הוא 1.5 דקות וממוצע משך הסבלנות הוא 15 דקות. מספר המוקדנים העונים לשיחות הוא 150. בעזרת הגרף הבא, העריכו מה אחוז הלקוחות שנענים מייד מבלי להמתין בתור?



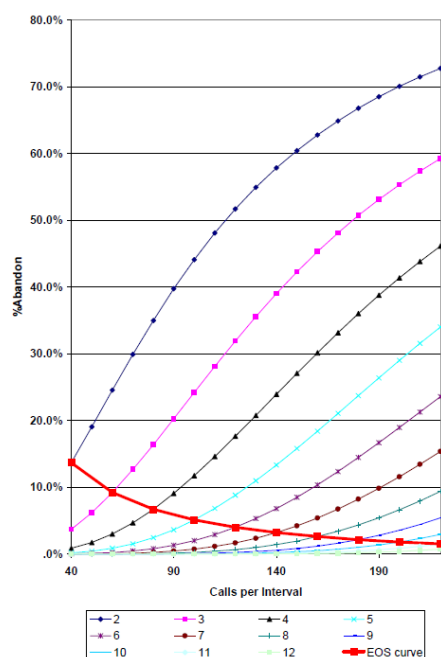
תשובה:

2.5. (3 נקודות) הנח כעת שסבלנות הלקוחות היא אינסופית. עבור אותה רמת שירות כמו בסעיף 2.1.4 (אותו ערך של β). מה יהיה כעת אחוז הלקוחות המקבלים שירות מידי?

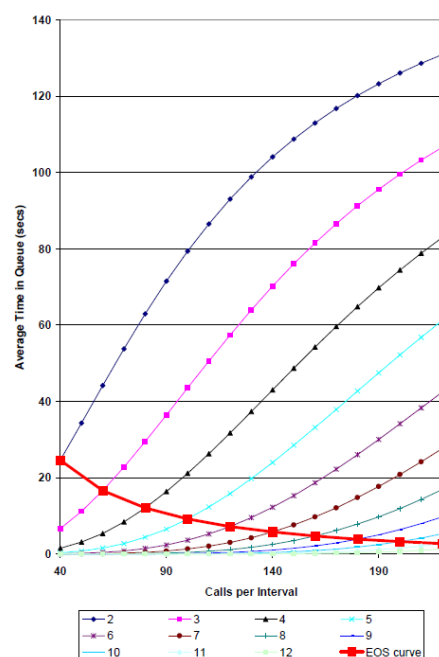
תשובה:

2.6 (4 נקודות) בשיעור דנו ביתרון לגודל (Economy of Scale) במערכות שירות. הסבר בקצרה את התופעה וכיצד היא באה לידי ביטוי בגרפים. השתמש במושג "עומס מוצע".

Probability to abandon



Average wait



Example: $1/\mu = 2$ minutes, $1/\theta = 3$ minutes;
 λ varies from 40 to 230 calls per hour, in steps of 10;
 n varies from 2 to 12.

כל סדרה בתרשים תואמת מספר שונה של מוקדנים שהוצבו לטפל בביקוש הנכנס. הערכים לכל קו מצוינים במקרא.

שאלה 3 – יישום (35 נקודות)

להלן קטע ממאמר שפורסם במוסף ממון של ידיעות אחרונות בנושא שינויים במבנה ובאופן הפעולה של הדיוטי פרי בנתב"ג. אין צורך לקרוא את הכתבה מאחר וההסברים והנתונים כלולים בגוף השאלה על סעיפיה השונים.

**הדיוטי פרי
במספרים**

10,000	קונים ביום בממוצע
20	אלף מוצרים
1,500	מוחלים
180	דולר
סך קניה ממוצעת של ישראל	
140	דולר
סך קניה ממוצעת של תייר	



השקעה של יותר מ-50 מיליון שקל. הדיוטי פרי המחודש | צילום: ירדן כץ



אחד מהדיוטים החדשים



אזור הקופות

התורים בדיוטי פרי מתקצרים

מתחם הקניות בנתב"ג שופץ, נוספו דוכני יוקרה ושדרגו אזורי הקופות • בקרוב תוכלו לקנות את המוצרים בבית ולקבלם לפני הטיסה

את התורים הנפרדים לקופות מחליף תור ראשי אחד המנות במסלולים מיוחדים. זמן ההמתנה לקופות בזמני עומס התקצר מ-30 דקות ל-6 דקות

מאת שושנה חן

רצו לחסוך את התורים בדיוטי פרי בנתב"ג? תוכלו לעשות זאת אם אתם אחד מ-300 אלף חברי המועדון של הדיוטי פרי. באוגוסט תתחיל חברת ג'יימס ריצ'רדסון להפעיל פילוט, שיאפשר לקוחות המועדון להיכנס לאתר האינטרנט של החברה, לבצע הזמנה מהבית, והמוצרים ימתינו למזמינים בחנות. כל שיטתו כחברת ג'יימס ריצ'רדסון. שהבטיח ומימש גם את הע' לאת מוצרי החנות לאינטרנט. בראיון ראשון מאז כניסתו לתפקיד, אותו העניק ל"ידיעות אחרונות" ביולי אשתקד, בישר גלבוץ על השיפורים המסיביים בחנות הגדולה של ג'יימס ריצ'רדסון. אתמול נחשפו העיתונאים לשיפורים ולשינוי מבנה החנות, שני ערכו בהשקעה של למעלה מ-50 מ' ליון שקל, חלק מהסכום בהשתתפות היבאנים.

השינויים הדramטיים ביותר היו במב' נה מחלקת הקוסמטיקה והממתקים. ודי כני התצוגה הוחזקה בסול, ובמקומם, במעגל שמסביב לחנות, מציגות חברות היוקרה את מוצריהן ב"סטודיו" – סוג של דוכנים שולחנות המאפשרים לצר' כנים להתנסות כמוצרים ומודיעים מת' לותם בריילות. כל האזור המרכזי הפך למרכז מכירה ותצוגה נמוכים. הרגש העיקרי הוא על חברות היוק' והא, ולא במקרה: מכירת מוצרי היוקרה בדיוטי פרי נמצאים בקו עלייה. במכיר רות שאנל, למשל, נרשמת בשנה האחר' רוני עלייה של 10%. נראה שלמרות המבצעים שעדיין מקיים הדיוטי פרי, הגיעו שם למסקנה שמלחמות המחירים חסרות תכלית וכי על נקודת המכירה בדיוטי פרי לברל את עצמה מהנעשה בארץ באמצעות העצמת מותגי היוק' רה. מי שמתעקשים לקנות בדיוטי פרי מותגים כמו ג'ייה, רבלון או לוראל בגלל הפטור ממע"מ נדרושים לשוטט במבוך.

חברת היוקרה גם הקימו דוכנים ייעודיים, חלקם ראשונים מסוגם בש' רות תעופה. כך, למשל, הרמס ובלוגרי שמוכרות לראשונה בשדה תעופה את

קו הסכונים ומוצרי הריח לבית. עוד חר' שים: מתחם שיער של קרסטס וקטג' ריית מוצרי השיער, שנבנת לראשונה לדיוטי פרי. מצד שני, ה"נייל בר", דוכן הלקים שהוכנס לחנות בשנה האחרונה, נדחק למקום לא נוח ליד הכניסה, ואזור המשקאות החריפים לא נכלל בשיפור צים המסיביים. אזור הממתקים שודרג באופן משמעותי. עם בולטות לתצוגה של m&m's.

ושינוי חשוב נוסף – מהפך באזור התורים. במקום תורים נפרדים לקופות, יש מעתה תור ראשי אחד המנות במ' סלולים מיוחדים. זמן ההמתנה לקופות בזמני עומס התקצר על פי דיווחי ה"חב' רה מ-30 דקות ל-6 דקות. גם מספר הקופות הוגדל, מ-44 ל-59.

מתחם הקניות בנתב"ג משרת לקוחות היוצאים מהארץ והוא פועל 24 שעות ביממה. לקוחות המגיעים למתחם בוחרים את המוצרים שהם מעוניינים לרכוש וניגשים לקופות לביצוע התשלום. ניתן להניח כי המופעים לקופות ניתנים לתיאור כההליך פואסון הומוגני בזמן עם קצב λ לקוחות בשעה. ממוצע מספר הקונים ביממה הוא 10,000. כמו כן, ניתן להניח כי משך השירות בקופה מתפלג מעריכית עם פרמטר μ והוא בממוצע 5 דקות. בשלב זה, ניתן להניח שאין נטישות מהתור.

חלק 1. מצב קיים (12 נקודות)

במצב הקיים פועלות במתחם הקניות 44 קופות. התור לכל קופה מתנהל בנפרד, כך שלקוח המגיע בוחר תור ונשאר בו (אין מעבר בין תורים של קופות שונות).

3.1.1. **(2 נקודות)** הציעו מודל מרקובי המתאים לשירות בקופות. ציינו מהו ערכם של הפרמטרים במודל.

תשובה:

3.1.2. **(2 נקודות)** מהי ניצולת הקופות? האם המערכת יציבה?

תשובה:

3.1.3. **(3 נקודות)** רשמו ופתרו את משוואות המצב היציב המתאימות למערכת.

רמז : סכום טור הנדסי אינסופי יורד הוא :

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$$

כאשר a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה ו- q הוא מנת הסדרה

תשובה :

3.1.4. (3 נקודות) חשבו את תוחלת אורך התור לכל קופה.

תשובה :

3.1.5. (2 נקודות) על בסיס הסעיף הקודם, חשבו מהו משך ההמתנה הממוצע בתור לקופה? (אם לא הגעתם לתוצאה מספרית בסעיף הקודם, השתמשו בסימון $E(L_q)$ לציון ממוצע אורך התור).

תשובה:

חלק 2. סבלנות (11 נקודות)

כעת הניחו שלעיתים חלק מהלקוחות עוזבים את התור מחשש שיאחרו לטיסה. אחוז הנוטשים הוא 25%. ניתן להניח כי הזמן עד נטישה מתפלג מעריכית עם קצב (בשעות) θ . ממוצע ההמתנה הוא 15 דקות.

3.2.1. (3 נקודות) מהו ערכו של θ ומהו ממוצע הסבלנות של לקוח?

תשובה:

3.2.2. (4 נקודות) מהו המודל המרקובי המתאים כעת לשירות בקופות? ציינו מהו ערכם של הפרמטרים במודל.

תשובה:

3.2.3. (4 נקודות) מהו העומס המוצע (Offered load) עבור הקופות ומהי ניצולתן כעת?

תשובה:

העומס המוצע:

הניצולת:

חלק 3. מצב חדש (12 נקודות)

בשיפוץ מתחם הקניות המתוכנן אזור הקופות ישתנה כך שיהיה תור ראשי אחד לכל הקופות. לקוח שעומד בראש התור ינותב לקופה הראשונה שתתפנה. כמו כן, מספר הקופות יגדל ל- 59. שינוי נוסף שמתוכנן הוא העלאת אתר אינטרנט שבו תתאפשר רכישת מוצרים טרם ההגעה לשדה התעופה ואיסופם בנתב"ג טרם הטיסה היוצאת או לאחר החזרה ארצה. עפ"י הערכת המנהלים, בשלב ראשון כ- 12% מהקונים ישתמשו בשירות זה, ועל כן לא יצטרכו לשלם בקופות.

3.3.1 (2 נקודות) מהו המודל המרקובי המתאים כעת לשירות בקופות? ציינו מהו ערכם של הפרמטרים במודל. הניחו כי משך השירות והסבלנות הממוצעת לא ישתנו במצב החדש.

תשובה:

3.3.2 (2 נקודות) ציירו את דיאגרמת קצבי המעבר עבור המודל המרקובי המתאים. פרטו את קצבי המעבר.

תשובה :

3.3.3 (3 נקודות) כתבו את משוואות המצב היציב המתאימות. אין צורך לפתור אותן.

תשובה :

3.3.4 (2 נקודות) בטאו בעזרת π_i את ההסתברות לכך שלקוח אשר מגיע יאלץ להמתין בתור. נמקו את

תשובתכם.

תשובה :

הסבר :

3.3.5 (3 נקודות) בועז הוא סטודנט להנדסת תעשייה וניהול בטכניון העובד במשרה חלקית בנתבי"ג. מנהל החנות ביקש מבועז שיבדוק אם 59 הקופות המתוכננות אכן נחוצות לעמידה ביעדי השירות שהגדירה ההנהלה. היעד שהגדירה ההנהלה הוא שלכל היותר 35% מהלקוחות יאלצו להמתין בתור לשירות, ולא יהיו לקוחות שינטשו אחרי יותר מדקה אחת של המתנה. בועז הפיק את הפלטים הבאים ממערכת 4CC. כמה קופות נדרשות כדי לעמוד ביעדי ההנהלה?

פלט 1:

Input Multi-Value	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Agent's Occupancy	%Answer	%Abandon	Average Speed of Answer	Average Time in Queue	%Answer within Target	%Abandon within Target	Average Queue Length
1	60.0	00:00.0	27.0				99.9%	88.2%	11.8%	07:26.0	07:04.2	.6%	.0%	43.2
2	60.0	00:00.0	29.0				99.0%	93.9%	6.1%	03:44.7	03:41.3	7.3%	.0%	22.6
3	60.0	00:00.0	31.0				96.0%	97.3%	2.7%	01:37.0	01:37.3	26.0%	.0%	9.9
4	60.0	00:00.0	33.0				91.6%	98.9%	1.1%	00:40.9	00:41.2	49.0%	.0%	4.2
5	60.0	00:00.0	35.0				87.0%	99.5%	.5%	00:17.5	00:17.7	68.3%	.0%	1.8
6	60.0	00:00.0	37.0				82.5%	99.8%	.2%	00:07.5	00:07.6	81.8%	.0%	.8
7	60.0	00:00.0	39.0				78.3%	99.9%	.1%	00:03.2	00:03.2	90.3%	.0%	.3
8	60.0	00:00.0	41.0				74.6%	100%	.0%	00:01.3	00:01.3	95.2%	.0%	.1
9	60.0	00:00.0	43.0				71.1%	100%	.0%	00:00.5	00:00.5	97.8%	.0%	.1
10	60.0	00:00.0	45.0				68.0%	100%	.0%	00:00.2	00:00.2	99.1%	.0%	.0
11	60.0	00:00.0	47.0				65.1%	100%	.0%	00:00.1	00:00.1	99.6%	.0%	.0
12	60.0	00:00.0	49.0				62.4%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	99.9%	.0%	.0
13	60.0	00:00.0	51.0				60.0%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
14	60.0	00:00.0	53.0				57.7%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
15	60.0	00:00.0	55.0				55.6%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
16	60.0	00:00.0	57.0				53.7%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
17	60.0	00:00.0	59.0				51.8%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
18														
19														
20														

פלט 2:

Input Multi-Value	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Agent's Occupancy	%Answer	%Abandon	Average Speed of Answer	Average Time in Queue	%Answer within Target	%Abandon within Target	Average Queue Length
1	60.0	01:00.0	27.0				99.9%	88.2%	11.8%	07:26.0	07:04.2	1.9%	1.6%	43.2
2	60.0	01:00.0	29.0				99.0%	93.9%	6.1%	03:44.7	03:41.3	16.7%	1.5%	22.6
3	60.0	01:00.0	31.0				96.0%	97.3%	2.7%	01:37.0	01:37.3	47.3%	1.0%	9.9
4	60.0	01:00.0	33.0				91.6%	98.9%	1.1%	00:40.9	00:41.2	73.6%	.6%	4.2
5	60.0	01:00.0	35.0				87.0%	99.5%	.5%	00:17.5	00:17.7	88.5%	.3%	1.8
6	60.0	01:00.0	37.0				82.5%	99.8%	.2%	00:07.5	00:07.6	95.4%	.2%	.8
7	60.0	01:00.0	39.0				78.3%	99.9%	.1%	00:03.2	00:03.2	98.3%	.1%	.3
8	60.0	01:00.0	41.0				74.6%	100%	.0%	00:01.3	00:01.3	99.4%	.0%	.1
9	60.0	01:00.0	43.0				71.1%	100%	.0%	00:00.5	00:00.5	99.8%	.0%	.1
10	60.0	01:00.0	45.0				68.0%	100%	.0%	00:00.2	00:00.2	99.9%	.0%	.0
11	60.0	01:00.0	47.0				65.1%	100%	.0%	00:00.1	00:00.1	100%	.0%	.0
12	60.0	01:00.0	49.0				62.4%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
13	60.0	01:00.0	51.0				60.0%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
14	60.0	01:00.0	53.0				57.7%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
15	60.0	01:00.0	55.0				55.6%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
16	60.0	01:00.0	57.0				53.7%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
17	60.0	01:00.0	59.0				51.8%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
18														
19														
20														

שאלה 4 תיאוריה (15 נקודות)

4.1. (5 נקודות) מודל M/U/1 מסמן מערכת תור כאשר :

- מופעים ע"פ תהליך פואסון עם קצב λ .

- משכי שירות מפולגים Uniform [0,b].

- שרת יחיד.

השוו את תוחלת זמן ההמתנה בתור זה לתוחלת זמן ההמתנה בתור שבו משכי השירות מפולגים

אקספוננציאלית עם ממוצע $b/2$ ולתור שבו משכי השירות קבועים וערכם $b/2$.

באיזה תור תוחלת זמן ההמתנה היא הארוכה ביותר? באיזה תור תוחלת זמן ההמתנה היא הקצרה ביותר? פרטו את חישוביכם.

רמז :

$$1. \text{ עבור } X \sim \text{Uni}[0, b] : E[X] = \frac{b}{2}, \text{ Var}(X) = \frac{b^2}{12}$$

2. נוסחת Khintchine-Pollaczek לתור M/G/1 :

$$E(W_q) = E(S) \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot \frac{1 + C^2(S)}{2}.$$

$$3. C^2(S) = \frac{\text{var}(S)}{E^2(S)}$$

4.2. (2 נקודות) נניח כעת מודל $M/U/1$ כאשר משכי השירות מפולגים אחיד על $[0, b]$. כמו כן נניח כי, עבור כל לקוח שמגיע למערכת, אנו יודעים האם משך השירות שלו קטן מ- $b/2$ או גדול מ- $b/2$. מהי מדיניות העדיפות האופטימאלית (כלומר לאיזה סוג של לקוחות תינתן עדיפות בכניסה לשירות). הסבירו את תשובתכם.

תשובה:

4.3. (5 נקודות) בהמשך לסעיף הקודם, נניח בנוסף מדיניות Preemptive. השוו את תוחלת זמן ההמתנה של הלקוחות בעלי העדיפות הגבוהה (על סמך תשובתכם לסעיף הקודם) לתוחלת זמן ההמתנה של לקוחות אלו בתור ללא עדיפויות. נוסחאות בנושא מופיעות בסוף השאלה.

תשובה:

4.4. (3 נקודות) נניח כי היינו יודעים את משכי השירות המדויקים ומשתמשים במידע זה על מנת לקבוע את העדיפויות. ברור כי ידיעה זו הייתה מאפשרת להביא לשיפור תוחלת זמן ההמתנה הכללי. נניח שהיינו רוצים לחשב את השיפור הנ"ל, כלומר, לחשב את היתרון (מהיבט משך המתנה ממוצע) שבידיעת זמני השירות המדויקים. הציעו דרך לחשב יתרון זה (אין צורך לבצע את החישוב!).

תשובה:

M/G/1 with priorities

Steady state $\Leftrightarrow \rho \triangleq \rho_1 + \dots + \rho_K < 1$, where $\rho_k = \lambda_k m_k$.

Convenient notation: $\bar{\rho}_k = \rho_1 + \dots + \rho_k$, $1 \leq k \leq K$.

$$\bar{\rho}_0 \equiv 0$$

Note: ρ_k = fraction of time allocated by server to class k .

$1 - \rho$ = idleness/availability.

- $E(W_q^k)$ - expected waiting time of class k customer.
- $E(L_q^k)$ - expected number of waiting class k customers.
- $E(R)$ - expected residual service time.

Non- Preemptive Regime

$$1. \quad E(W_q^1) =$$

$$E(R) + m_1 E(L_q^1) = E(R) + m_1 \lambda_1 E(W_q^1) = E(R) + \rho_1 E(W_q^1)$$

$$\Rightarrow E(W_q^1) = \frac{E(R)}{(1 - \rho_1)}, \text{ as before } (K = 1).$$

$$2. \quad E(W_q^2) = E(R) + \underbrace{m_1 E(L_q^1) + m_2 E(L_q^2)}_{\text{wait due to class 1 \& 2 in queue}} + \underbrace{m_1 \lambda_1 E(W_q^2)}_{\text{wait due to class 1, arriving during wait of 2.}}$$

$$\Rightarrow E(W_q^2) = E(R) + \rho_1 E(W_q^1) + \rho_2 E(W_q^2) + \rho_1 E(W_q^2)$$

$$\Rightarrow E(W_q^2) = [E(R) + \rho_1 E(W_q^1)] / (1 - \rho_1 - \rho_2) =$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(W_q^2) &= \frac{E(R)}{[(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)]} \\ \uparrow \\ &\text{substitute } E(W_q^1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k. \quad EW_q^k &= ER + m_1 \cdot EL_q^1 + \dots + m_k \cdot EL_q^k + \lambda_1 m_1 EW_q^k + \dots + \lambda_{k-1} m_{k-1} EW_q^k \\
\Rightarrow &= ER + \rho_1 EW_q^1 + \dots + \rho_{k-1} EW_q^{k-1} + (\rho_1 + \dots + \rho_k) EW_q^k
\end{aligned}$$

$$E(W_q^k) = \frac{E(R) + \rho_1 E(W_q^1) + \dots + \rho_{k-1} E(W_q^{k-1})}{(1 - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho_k)} = \frac{E(R)}{(1 - \bar{\rho}_{k-1})(1 - \bar{\rho}_k)}$$

Where

$$\begin{aligned}
E(R) &= (1 - \rho) \cdot 0 + \sum_{j=1}^K \rho_j \cdot m_j \cdot \frac{1 + C_j^2(S)}{2} = \\
&= \sum_{j=1}^K \lambda_j m_j^2 \cdot \frac{E(S_j^2)}{2m_j^2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \lambda_j E(S_j^2)
\end{aligned}$$

Preemptive Regime

$$\begin{aligned}
E(W_q^k) &= \frac{E(R^k)}{1 - (\rho_1 + \dots + \rho_k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j m_j [E(W_q^k) + m_k] \\
&= \frac{E(R^k)}{1 - \bar{\rho}_k} + \bar{\rho}_{k-1} [E(W_q^k) + m_k] \\
E(W_q^k) &= \frac{E(R^k)}{(1 - \bar{\rho}_k)(1 - \bar{\rho}_{k-1})} + \frac{\bar{\rho}_{k-1}}{1 - \bar{\rho}_{k-1}} m_k
\end{aligned}$$

where $E(R^k) = \sum_{j=1}^k \rho_j \cdot m_j \cdot \frac{1 + C_j^2(S_j)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \lambda_j E(S_j^2)$

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Gen. Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$N \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multi-nomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(m, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; m \geq 1$	$k = m, m+1, \dots$	$\left[\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t} \right]^m$	$\frac{mp}{p}$	$\frac{mq}{p^2}$	Number of trials till m -th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$\exp\{-\lambda(1 - e^t)\}$	λ	λ	
Hyper-geometric	$X \sim HG(N, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N + M$	$\max(0, n - M) \leq k$ $k \leq \min(n, N)$	$\sum_k e^{tk} p(k)$	$\frac{n \cdot N}{N+M}$	$n \cdot \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N}{N+M-1}$	N – special elements M – ordinary ones n – sample size k – special in sample
		Density Function						
Beta	$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	Complicated	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ $= (x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp \left\{ t\mu + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2 \right\}$	μ	σ^2	