



מרצה : ד"ר גלית יום-טוב
מתרגלת : נועה זיכלינסקי

תאריך הבחינה : 8.7.2016

מס' סטודנט _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד א' – סמסטר אביב 2016

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון מדעי רגיל.
- המבחן כולל 25 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

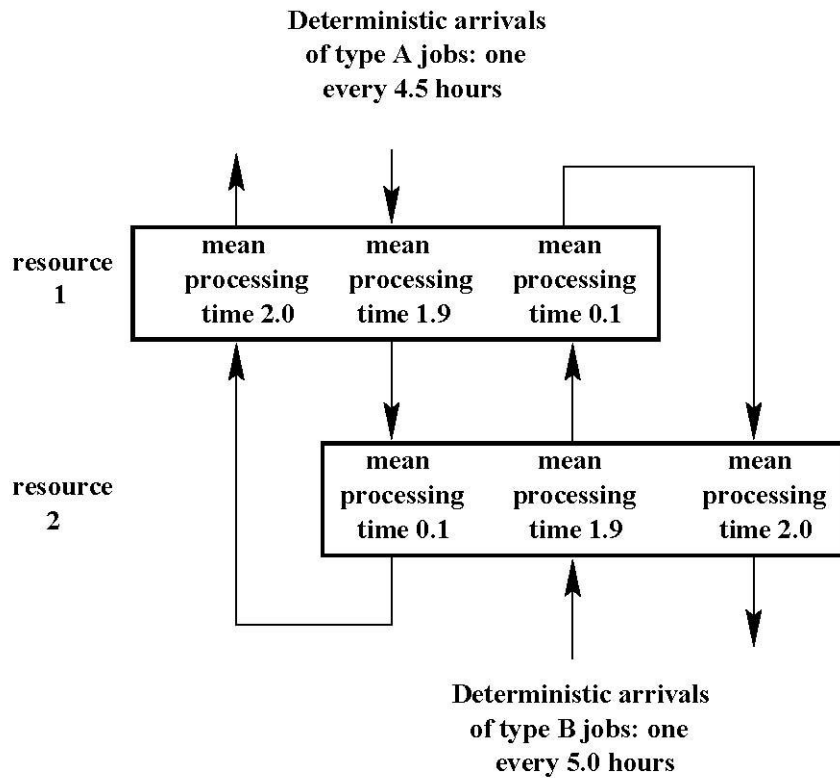
שאלה 1	_____ מתוך 25 נקודות	תרגילי בית	ניקוד :
שאלה 2	_____ מתוך 25 נקודות	בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים	
שאלה 3	_____ מתוך 35 נקודות	יישום	
שאלה 4	_____ מתוך 15 נקודות	תיאוריה	
סה"כ	_____ מתוך 100 נקודות		

בהצלחה !

שאלה 1 - תרגילי בית (25 נקודות)

חלק 1. ניתוח קיבולת (10 נקודות).

הניחו תהליך בו מעובדים שני סוגים של עבודות- סוג A וסוג B. בתהליך העיבוד משתתפים שני משאבים – משאב 1 ומשאב 2. מבנה התהליך, קצבי ההגעות וממוצעי זמני השירות, עבור שני סוגי העבודות, מתוארים בתרשים הבא :



1.1.1 (5 נקודות) חשבו את נצילות כל אחד משני המשאבים במצב יציב, אם יש כזה. אם המערכת לא מתייצבת, הסבירו מדוע.

תשובה:

$$U_1 = \frac{2.0+1.9}{4.5} + \frac{0.1}{5} = 0.887$$

$$U_2 = \frac{2.0+1.9}{5} + \frac{0.1}{4.5} = 0.802$$

1.1.2 (5 נקודות) הניחו כעת כי עבודה מסוג A מגיעה כל 3.5 שעות (במקום 4.5 שעות). חשבו את נצילות המשאבים תחת הנחה זו.

תשובה:

$$U_1 = \frac{2.0+1.9}{3.5} + \frac{0.1}{5} = 100\%$$

המערכת לא עומדת בעומס ו"מתפוצצת".

נצילות משאב 2 תלויה במדיניות העדיפויות הניתנות לתת התהליכים של משאב 1. לדוגמא, אם תת התהליך עם משך השירות הממוצע של שתיים במשאב 1 מקבל את העדיפות הנמוכה ביותר אזי

$$U_2 = \frac{2.0+1.9}{5} + \frac{0.1}{3.5} = 0.809$$

לעומת זאת, אם תת התהליך שמשכו הממוצע 1.9 שעות מקבל את העדיפות הגבוהה ביותר ותת התהליך שמשכו הממוצע 0.1 שעות מקבל את העדיפות הנמוכה ביותר אזי לא יגיעו עבודות לתת התהליך במשאב 2 שמשכו שתיים ומתקיים

$$U_2 = \frac{1.9}{5} + \frac{0.1}{3.5} = 0.408$$

חלק 2. תורים עם עדיפויות (15 נקודות).

אנשים מגיעים למכונת צילום לפי תהליך פואסון בקצב של לקוח בדקה. מספר העותקים שכל אחד נדרש לצלם מתפלג באופן אחיד בין 1 ל-10. כל צילום אורך 3 שניות. תזכורת:

1. עבור $U \sim U(a, b)$

$$E(U) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}(U) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

$$C^2(S) = \frac{\text{var}(S)}{E^2(S)} \quad 2.$$

$$\text{Var}(aS) = a^2 \text{Var}(S), \quad a \in \mathbb{R} \quad 3.$$

נוסחאות נוספות בנושא מופיעות בסוף השאלה.

עבור סעיפים 1.2.1 ו- 1.2.2 הניחו מדיניות שירות FCFS.

1.2.1 (3 נקודות) חשבו מהו זמן ההמתנה הממוצע בתור למכונת הצילום.

תשובה:

$$\text{נגיד } U - \text{ מספר הצילומים עבור כל לקוח, } U \sim U(1,10) \text{ ועל כן,}$$

$$E(U) = 5.5, \quad \text{Var}(U) = \frac{10^2 - 1}{12} = 8.25, \quad C_s^2(U) = \frac{8.25}{5.5^2} = 0.275$$

מדובר בתור M/G/1 עבורו $\lambda = 1$,

$$E(S) = \frac{5.5 \cdot 3}{60} = 0.275$$

ולכן, $\rho = 0.275$,

על פי נוסחת חניצ'ין-פולטשק:

$$E[W_q] = E[S] \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot \frac{1 + C_s^2}{2} = 0.066 \text{ min} = 3.98 \text{ sec}$$

1.2.2 (2 נקודות) חשבו מהו ממוצע מספר האנשים בתור למכונת הצילום.

תשובה:

על פי חוק ליטל

$$E[L_q] = \lambda \cdot E[W_q] = 0.066$$

מעתה ואילך, הניחו שאדם שמגיע עם עד 3 צילומים מקבל עדיפות מסוג non-preemptive בתור.

1.2.3 (8 נקודות) חשבו מהו ממוצע משך ההמתנה למכונת הצילום.

תשובה:

עבור לקוחות מסוג 1 משך השירות הוא $U_1 \sim U(3,6,9)$

עבור לקוחות מסוג 2 משך השירות הוא $U_2 \sim U(12,15,...,30)$

בנוסף ידוע ש-

$$\lambda_1 = 0.3, \lambda_2 = 0.7$$

$$m_1 = 6 \text{ sec} = 0.1, m_2 = 21 \text{ sec} = 0.35$$

$$\rho_1 = \lambda_1 \cdot m_1 = 0.03, \bar{\rho}_2 = \rho_1 + \rho_2 = 0.275$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[S_1] &= \text{Var}[U(1/20, 2/20, 3/20)] = (1/400) \cdot \text{Var}[U(1, 2, 3)] = 1/600. \\ E[S_1^2] &= m_1^2 + \text{Var}[S_1] = 0.0117. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[S_2] &= \text{Var}[U(4/20, 5/20, \dots, 10/20)] = (1/400) \cdot \text{Var}[U(4, \dots, 10)] \\ &= (1/400) \cdot \text{Var}[U(1, \dots, 7)] = 0.01. \text{ Hence, } E[S_2^2] = m_2^2 + \text{Var}[S_2] = 0.1325 \end{aligned}$$

תוחלת שארית משך השירות היא

$$E[R] = (1/2)[\lambda_1 E[S_1^2] + \lambda_2 E[S_2^2]] = 0.0481$$

ועל כן, ממוצע משך ההמתנה עבור לקוח מסוג 1:

$$E[W_q^1] = \frac{E[R]}{1 - \rho_1} = 0.050 = 2.98 \text{ sec.}$$

ועבור סוג לקוח 2:

$$E[W_q^2] = \frac{E[R]}{(1 - \rho_1)(1 - \bar{\rho}_2)} = 0.068 = 4.10 \text{ sec.}$$

ממוצע משך ההמתנה הכולל מתקבל עפ"י הממוצע המשוקלל הבא:

$$E[W_q] = \frac{\lambda_1 E[W_q^1] + \lambda_2 E[W_q^2]}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0.063 = 3.76 \text{ seconds.}$$

1.2.4 (2 נקודות) חשבו מהו אורך התור הממוצע למכונת הצילום.

תשובה:

על פי חוק ליטל

$$E[L_q] = \lambda \cdot E[W_q] = 0.063$$

M/G/1 without priorities

$$E(W_q) = \frac{E(R)}{1-\rho}.$$

R - Expected residual service time

ρ - Prob. of arriving to a busy server

$$E(R) = (1-\rho) \cdot 0 + \rho \cdot E(S) \cdot \frac{1+C^2(S)}{2}$$

Khintchine-Pollaczek Formula:

$$E(W_q) = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot E(S) \cdot \frac{1+C^2(S)}{2}$$

M/G/1 with priorities

Steady state $\Leftrightarrow \rho \triangleq \rho_1 + \dots + \rho_K < 1$, where $\rho_k = \lambda_k m_k$.

Convenient notation: $\bar{\rho}_k = \rho_1 + \dots + \rho_k$, $1 \leq k \leq K$.
 $\bar{\rho}_0 \equiv 0$

Note: ρ_k = fraction of time allocated by server to class k .

$1 - \rho$ = idleness/availability.

- $E(W_q^k)$ - expected waiting time of class k customer.
- $E(L_q^k)$ - expected number of waiting class k customers.
- $E(R)$ - expected residual service time.

Non- Preemptive Regime

$$1. \quad E(W_q^1) =$$

$$E(R) + m_1 E(L_q^1) = E(R) + m_1 \lambda_1 E(W_q^1) = E(R) + \rho_1 E(W_q^1)$$

$$\Rightarrow E(W_q^1) = \frac{E(R)}{(1 - \rho_1)}, \text{ as before } (K = 1).$$

$$2. \quad E(W_q^2) = E(R) + \underbrace{m_1 E(L_q^1) + m_2 E(L_q^2)}_{\text{wait due to class 1 \& 2 in queue}} + \underbrace{m_1 \lambda_1 E(W_q^2)}_{\text{wait due to class 1, arriving during wait of 2.}}$$

$$\Rightarrow E(W_q^2) = E(R) + \rho_1 E(W_q^1) + \rho_2 E(W_q^2) + \rho_1 E(W_q^2)$$

$$\Rightarrow E(W_q^2) = [E(R) + \rho_1 E(W_q^1)] / (1 - \rho_1 - \rho_2) =$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(W_q^2) &= \frac{E(R)}{[(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)]} \\ \uparrow \\ &\text{substitute } E(W_q^1) \end{aligned}$$

$$k. \quad EW_q^k =$$

$$ER + m_1 \cdot EL_q^1 + \dots + m_k \cdot EL_q^k + \lambda_1 m_1 EW_q^k + \dots + \lambda_{k-1} m_{k-1} EW_q^k$$

$$\Rightarrow = ER + \rho_1 EW_q^1 + \dots + \rho_{k-1} EW_q^{k-1} + (\rho_1 + \dots + \rho_k) EW_q^k$$

$$E(W_q^k) = \frac{E(R) + \rho_1 E(W_q^1) + \dots + \rho_{k-1} E(W_q^{k-1})}{(1 - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho_k)} = \frac{E(R)}{(1 - \bar{\rho}_{k-1})(1 - \bar{\rho}_k)}$$

Where

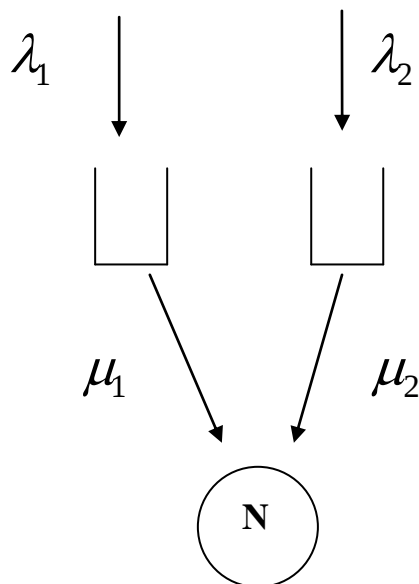
$$E(R) = (1 - \rho) \cdot 0 + \sum_{j=1}^K \rho_j \cdot m_j \cdot \frac{1 + C_j^2(S)}{2} =$$

$$= \sum_{j=1}^K \lambda_j m_j^2 \cdot \frac{E(S_j^2)}{2m_j^2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \lambda_j E(S_j^2)$$

שאלה 2 בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים (25 נקודות)

חלק 1. מודל נוזלים (13 נקודות)

נתונה מערכת תורים בארכיטקטורת V, המתוארת בציור הבא :



הפרמטרים של מודל המערכת נתונים ע"י :

- ♦ λ_1 (λ_2) - קצבי מופע לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ μ_1 (μ_2) - קצבי שירות לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ N - מספר השרתים בתחנה

המערכת פועלת לפי מדיניות שהיא *preemptive*, ז"א ניתן בכל רגע להפסיק שירות של לקוח ולהחזירו להמתנה בתור מהסוג שלו, אבל אסור "לזרוק" לקוחות מהמערכת. בנוסף, המדיניות הינה *work conserving*, דהיינו, השרתים חייבים לשרת כאשר יש לקוחות בתור (ז"א לא ייתכן מצב שבו יש שרתים פנויים ובעת ובעונה אחת יש גם לקוחות הממתינים בתור).

לצורך בניית **מודל נוזלים** למערכת הנ"ל, נגדיר את המשתנים הבאים :

$$X_1(t) = \text{סה"כ מספר הלקוחות מסוג 1 במערכת (בשירות או בתור), בזמן } 0 \leq t.$$

$$X_2(t) = \text{סה"כ מספר הלקוחות מסוג 2 במערכת (בשירות או בתור), בזמן } 0 \leq t.$$

2.1.1 (4 נקודות) כתבו משוואות דיפרנציאליות עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$, תחת ההנחה שהתחנה נותנת עדיפות ללקוחות מסוג 1.

תשובה:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = \lambda_1 - \mu_1(X_1 \wedge N)$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = \lambda_2 - \mu_2(X_2 \wedge (N - X_1)^+)$$

2.1.2 (2 נקודות) כתבו ביטוי למספר הכולל של הממתינים בתור בזמן t . (השתמשו ב- N , $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$).

תשובה:

$$(X_1(t) + X_2(t) - N)^+$$

כאלטרנטיבה לעדיפות הנ"ל ללקוחות מסוג 1, נגדיר מדיניות חדשה ששומרת על תורים שווים בשני הסוגים. כלומר, משרתים לקוחות מסוג 1 ומסוג 2 באופן שבכל רגע $0 \leq t$, מספר הממתינים בתור מסוג 1 שווה למספר הממתינים בתור של סוג 2.

2.1.3 (4 נקודות) כתבו משוואות דיפרנציאליות עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$, תחת מדיניות אלטרנטיבית זו.

תשובה:

מספר האנשים בתור באופן כללי הוא $(X_1(t) + X_2(t) - N)^+$. לכן מספר האנשים בתור יחיד הוא $0.5 * (X_1(t) + X_2(t) - N)^+$. לכן, מספר האנשים בשירות מסוג 1 הוא $X_1 - 0.5(X_1 + X_2 - N)^+$. ומערכת המשוואות הרלוונטיות היא:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = \lambda_1 - \mu_1 \left(X_1 - \frac{1}{2} (X_1 + X_2 - N)^+ \right)$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = \lambda_2 - \mu_2 \left(X_2 - \frac{1}{2} (X_1 + X_2 - N)^+ \right)$$

2.1.4. (3 נקודות) תארו בקיצור איך ניתן, בעזרת גיליון אלקטרוני בלבד, לפתור בקירוב (מדויק ככל הנדרש) את המשוואות הדיפרנציאליות בסעיפים 2.1.1 ו- 2.1.3.

תשובה:

נתחיל עם $X(0)$ נתון. לאחר מכן, עבור $t_n = t_{n-1} + \Delta$, $n=1,2,\dots$ נחשב, לדוגמה עבור סעיף 2.1.1,

$$X_1(t_n) = X_1(t_{n-1}) + \lambda_1 \Delta - \mu_1(X_1(t_{n-1}) \wedge N) \Delta$$

$$X_2(t_n) = X_2(t_{n-1}) + \lambda_2 \Delta - \mu_2(X_2(t_{n-1}) \wedge (N - X_1(t_{n-1}))) \Delta$$

ונקבל את $X(0), X(\Delta), X(2\Delta), \dots$. ככל ש- Δ קטן יותר, כך הקירוב מדויק יותר.

חלק 2. פונקצית סיכון (Hazard Rate) (12 נקודות)

2.2.1 (3 נקודות) עבור מ"מ X אי שלילי עם פונקצית התפלגות F_X ופונקצית צפיפות f_X , הגדירו את פונקצית הסיכון h_X . הסבירו בקיצור את משמעות $h_X(t)$, בזמן t כלשהו.

תשובה:

$$h_X(t) = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)}, \quad t \geq 0$$

הסבר: $h_X(t) \cdot \Delta \approx P\{X \leq t + \Delta \mid X > t\}$.

כלומר, הסיכון הרגעי לחוות אירוע בזמן t בהינתן שעד זמן t לא התרחש אירוע.

נתונות n ריאליזציות (מדידות) של משתנה מקרי Z רציף וחיובי עם התפלגות לא ידועה. המטרה היא לאמוד את פונקציית הסיכון של Z על סמך מדידות אלו. נניח שכל המדידות שייכות לאינטרוול $[0, T]$. נחלק את הקטע $[0, T]$ לאינטרוולים קטנים באורך Δ כל אחד, ועבור כל אינטרוול קטן j , ($j = 1, 2, \dots$) נגדיר:

- ♦ d_j - מספר המדידות שנפלו באינטרוול j ,
- ♦ r_{j-1} - סה"כ המדידות מתוך N , שלא שייכות ל- $j-1$ האינטרוולים הקודמים ($r_0 = 0$).

2.2.2 (3 נקודות) כתבו אמד לפונקציית הצפיפות (density) של Z באינטרוול j .

תשובה:

$$f_Z(t) = \frac{d_j}{n \cdot \Delta} \quad t \in \text{interval } j.$$

2.2.3 (3 נקודות) כתבו אמד לפונקציית השרידות (survival function) של Z באינטרוול j .

תשובה:

$$\hat{S}_Z(t) = \frac{r_{j-1} - \frac{1}{2}d_j}{n} \quad t \in \text{interval } j.$$

2.2.4 (3 נקודות) כתבו אמד לפונקציית הסיכון (hazard rate) של Z באינטרוול j .

תשובה:

$$h_Z(t) = \frac{d_j}{(r_{j-1} - \frac{1}{2}d_j) \cdot \Delta} \quad t \in \text{interval } j.$$

שאלה 3 - יישום (35 נקודות)

להלן כתבה שפורסמה ב"ידיעות אחרונות" בחודש פברואר 2016 כחלק מסדרת כתבות בנושא השירות שמקבלים מתגייסים טרם גיוסם במוקדי השירות של צה"ל. שימו לב: עבור פתרון הבחינה אין צורך לקרוא את הכתבה.

6 ידיעות אחרונות יום שישי, כ"ו בשבט תשע"ו | 5.2.2016

אין עיכוב

לאחר מחבלים מעבר לקווי אויב ולשלוף אותם ממיטתם באישון לילה זו משימה שבצה"ל כבר מזמן התרגלו לבצע • אבל מתברר שלתפעל אתר אינטרנט או לענות לטלפונים של מתגייסים – זה כבר סיפור אחר • הליך המיונים לשירות צבאי הפך כה מסורבל, מפורך ומתיש, שיותר ויותר צעירים לקראת גיוס הרימו ידיים: "אין עם מי לדבר" • בחיל המודיעין, "המצטיין" בעיכובים, מודעים לבעיה: "פועלים לשפר את המצב"

באמצעות הפעלת קשרים אישיים – או פשוט נותרו ללא מענה. גם כאשר לכסוף מקבלים תשובה, היא לא תמיד עוזרת: במקרה אחד נאמר לצעיר שחלה בשפעת והיה עם חום גבוה כי אין באפשרותו להחמיץ את הגיבוש הקרבי שבו ביקש להשתתף. הקרבן הזה, שמתחיל כבר בהליך המיונים, שוכר שיאים בה געה לצו ראשון: במקום להסתיים בכמה שעות בלבד, תהליך המיון הפשוט יחסית נמשך לעיתים עשר שעות. מרוע? כי את היעילות כנראה שומרים רק ליחידות השדה: בצה"ל רואנים תחילה לבי צע אימות נתונים, ורק אז לקיים מבחנים פסיכוכיניים ובדיקות רפואיות. כל זה יוצר צוואר בקבוק שמאלץ את הצעירים לעמוד בתור במשך שעות ללא מעש.

מערך המיון שמסתמן דווקא כמסורבל ביותר הוא גם זה הגדול פס כמותהם ביותר: חיל המודיעין. מעדיות המועמדים לשירות בחיל עולה תמונה מדאיגה: הכוללת המתנה למענה טלפוני של קרוב לשלוש שעות. קצין בכיר אחד שקצה נפשו בכך אף נכנס לאחרונה למשרדו של קצין המודיעין הראשי, תא"ל משה שנייד, עם צילום מסך מהטלפון הסלולרי של בתו, המועמדת לשירות בחיל, כדי להציג בפניו את הזמן שהמתנה למוקד הטלפוני: שני ימים ארבעים ושלוש דקות.

אמן שיענו לי

קברניטי המדינה אוהבים להתנאות, ובצדק, ביכולותיו הבלתי רגילות של צה"ל. עם מוטו המקן חדשנים, מל"מים מתוחכמים, צוללות סודיות ומערך סייבר כה מתקדם שאפילו מרטי המודע בדיוני אינם מסוגלים לתאר, לא נותר ספק: אין משימה שמורכבת מדי עבור הצבא. אבל בעוד איתור מחבלים בשטח אויב או ביצוע סיכולים ממוקדים באישון לילה קטן על צה"ל, לתפעל אתר אינטרנט או לענות לטלפונים של המתגייסים – זו כבר הפכה מבחינתו למשימה בלתי אפשרית. הכיורוקרטיה המסורבלת שבה נתקלים יותר ויותר צעירים הנמצאים בשלבי המיון לפני גיוס הפכה כחודשים האחרונים לכה מפרכת, שרבים מהמתגייסים הפוטנציאליים פשוט הרימו ידיים. בין היתר סיפור הצעירים על המתנה של שעות למענה טלפוני מהצבא ועל פקסים ששלחו ללשכות הגיוס שנערמו ונעדרו – עד שבסופו של דבר נעלמו.

"אוש במקום גיבוש"

קחו למשל את המיונים ליחידות קרביות: בחודש האחרון הגיעו למוקד הצבאי בנושא זה 11 אלף שיחות בממוצע ביום. אך 80 הדיונים אסמננות היו על הטיפול בשיחות אלו הספיקו לענות על 6,000 פניות בלבד, קצת יותר מחצי. המשמעות: 5,000 צעירים תדורי מוטיבציה שנערכים להתגייס לקרבי נאלצו לחפש תשובות

נתמקד בשלב זה במוקד השירות הצבאי המטפל במתגייסים ליחידות הקרביות. למוקד זה מגיעות 11,000 שיחות ביום. המוקד פועל במשך 8 שעות ביום, ופועלות בו 80 חיילות המטפלות בשיחות הנכנסות. ממוצע משך שיחה במוקד הוא 5 דקות וממוצע הסבלנות של הלקוחות הוא 10 דקות. התבקשתם כמהנדסי תעשייה וניהול בוגרי הקורס "הנדסת מערכות שירות" לנתח את המוקד.

חלק 1 – מצב קיים

3.1.1 (2 נקודות) הציעו מודל מרקובי מתאים למוקד. מהן ההנחות המתמטיות במודל זה?

תשובה:

מאחר וישנן נטישות המודל המתאים ביותר הינו מודל Erlang A, כלומר M/M/N+M. ההנחות הפורמאליות הדרושות למודל זה הן: התפלגות זמני השירות והסבלנות אקספוננציאלים, תהליך ההגעה הינו תהליך פואסון וישנה אי תלות בין זמני השירות, הסבלנות, ותהליך ההגעה. מניחים שקצב המופע קבוע על פני התקופות בהן המוקד פעיל.

3.1.2 (2 נקודות) ציינו את הפרמטרים המתאימים למודל שהצעתם בסעיף הקודם ואת ערכם.

תשובה:

$$\lambda = \frac{11,000}{8} = 1375 \text{ per hour}$$

$$\mu = \frac{60}{5} = 12 \text{ per hour}$$

$$\theta = \frac{60}{10} = 6 \text{ per hour}$$

$$N = 80$$

3.1.3 (3 נקודות) חשבו את ה Offered-Load במערכת וציינו באיזה תחום תפעולי נמצא המוקד. נמקו תשובתכם

תשובה:

$$R = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1375}{12} = 114.58 \text{ . מספר השרתים הוא 80 לכן מכלל השורש } \leq$$

$$\beta = \frac{n-R}{\sqrt{R}} = \frac{80-114.58}{\sqrt{114.58}} = -3.2$$

כלומר אנו נמצאים בתחום התפעולי ED.

3.1.4 (3 נקודות) תנו הערכה טובה לאחוז הנענים (%Answer) ללא שימוש בפונקציית Garnett.

תשובה:

מאחר ואנו בתחום ה ED , כלל האיוש $n = R(1 - \gamma)$ יכול לשמש לנו דרך להערכת אחוז הנוטשים, כאשר $\gamma = \%$ הנוטשים. לכן,

$$\%Answer \approx \frac{n}{R} = \frac{80}{114.58} \approx 0.7$$

להלן צילום חלקי של הפלט עבור מספר הרצות בתוכנת 4CC עבור המצב הנוכחי:

Compute Add to Table Delete Rows Clear All Export Import Graph												
	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Agent's Occupancy	%Answer	%Abandon	Average Speed of Answer	%Answer within Target	Average Queue Length
Results	60.0	00:00.0								03:33.7	.0%	69.2
1	60.0	10:00.0								03:33.7	69.8%	69.2
2	60.0	08:00.0								03:33.7	69.8%	69.2
3	60.0	05:00.0								03:33.7	67.3%	69.2
4	60.0	03:00.0								03:33.7	16.8%	69.2
5	60.0	01:30.0								03:33.7	.2%	69.2
6	60.0	00:30.0								03:33.7	.0%	69.2
7	60.0	00:00.0	03:33.7	.0%	69.2							
8												
9												
10												

3.1.5 (2 נקודות) מנהל המוקד מעוניין לשפר את רמת השירות. הוא בוחר בפרופורציית הלקוחות אשר

קיבלו שירות באופן מיידי (ללא המתנה) בתור המדד התפעולי אותו הוא רוצה לשפר (מדד זה יכוונו לתחום ה QED). על סמך צילום המסך הנ"ל, עבור המצב הנוכחי, מהי פרופורציית הלקוחות אשר קיבלו שירות מיידי מבלי שנאלצו להמתין? נמקו!

תשובה:

מאחר ונקבע $Target\ Time = 00:00$, הפלט עבור $\%Answer\ Within\ Target$ הוא פרופורציית מספר הלקוחות אשר לא המתינו בתור. לכן, על פי השורה האחרונה בפלט מתקבל ש- $P(W_q = 0) \approx 0$.

חלק 2 – מצב חדש

3.2.1 (2 נקודות) מנהל המוקד מעוניין לקבוע שלפחות 20% מהלקוחות לא ימתינו בתור. היעזרו בפונקציית Garnett המצורפת בסוף השאלה כדי לקבוע את מספר המוקדניות המינימאלי הנדרש בכדי לעמוד ביעד זה. תנו תשובה מדויקת ככל שניתן.

תשובה:

$$\text{נשתמש בפונקציית } GMR(0.5). \frac{\theta}{\mu} = \frac{1/10}{1/5} = 0.5.$$

נחפש את הנקודה בה הפונקציית $GMR(0.5)$ מקבלת את הערך 0.8. זה קורה עבור $\beta \approx -0.5$. לכן

$$R = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1375}{12} = 114.58, \text{ כאשר } n = R + \beta\sqrt{R}$$

$$n = 114.58 - 0.5\sqrt{114.58} \approx 109$$

3.2.2 (2 נקודות) מה יהיה אחוז הנטישה עבור רמת האיוש שמצאתם?

תשובה:

על פי הגרף השני של Garnett, נקבל ש- $p(Ab) \cdot \sqrt{n} = 0.62$,

$$p(Ab) = \frac{0.62}{\sqrt{109}} = 0.06 \text{ כלומר } 6\%.$$

3.2.3 (3 נקודות) על סמך המאמר של לרסון ניתן לשפר שביעות רצון של לקוחות ע"י הודעה של זמן ההמתנה הצפוי במערכת. מניסוי שביצע מנהל המוקד נמצא שאם מספקים מידע מסוג זה בתחילת ההמתנה הסבלנות הממוצעת גדלה מ- 10 דקות ל 12 דקות. כיצד צפויים להשתנות כתוצאה מכך מדדי הביצוע: הבאים: הסתברות להמתנה, אחוז נוטשים וניצולת עובדים. הסבירו באופן כללי, אין צורך לחשב.

תשובה:

אחוז נוטשים יקטן – לקוחות סבלניים יותר ונוטשים פחות

ניצולת עובדים תגדל – פחות לקוחות ינטשו, יהיו יותר לקוחות במערכת והעובדים יעבדו יותר.

הסתברות להמתנה תגדל – יהיו יותר לקוחות במערכת, זמני המתנה ארוכים יותר.

להלן פלט מתוכנת 4CC עבור טווח של מספר מוקדנים בין 110 ל-130. (שאר הפרמטרים נשארו ללא שינוי).

3.2.4 (4 נקודות) עבור מוקד הפועל עם 120 מוקדניות, חשבו את $E(W_q | W_q > 0)$, פרטו את חישוביכם, והסבירו את משמעותו של מדד זה.

תשובה:

$$E(W_q) = E(W_q | W_q > 0)P(W_q > 0) + E(W_q | W_q = 0)P(W_q = 0) = E(W_q | W_q > 0)P(W_q > 0)$$

$$E(W_q | W_q > 0) = \frac{E(W_q)}{P(W_q > 0)} \quad \text{ולכן}$$

$$E(W_q) = \frac{E(L_q)}{\lambda} = \frac{3.2}{1375} \quad \text{נמצא את } E(W_q) \text{ לפי נוסחת Little}$$

$$E(W_q | W_q > 0) = \frac{3.2}{0.366 \cdot 1375 / 60} = 0.38 \text{ min} \quad \text{ונקבל כי}$$

מדד זה מציין את זמן ההמתנה הממוצע של לקוח שאכן המתין בתור.

3.2.5 (3 נקודות) עבור אותו מספר מוקדניות כמו בסעיף הקודם, מהי תוחלת זמן ההמתנה בתור של לקוחות שנטשו את המערכת?

תשובה:

$$\begin{aligned} E(W_q) &= E(W_q | Abandon)P(Abandon) + E(W_q | Service)P(Service) \\ \Rightarrow E(W_q | Abandon) &= \frac{E(W_q) - E(W_q | Service)P(Service)}{P(Abandon)} = \\ &= \frac{E(W_q) - (Average Speed of Answer) \cdot P(Service)}{P(Abandon)} \end{aligned}$$

$$E(W_q | Abandon) = \frac{8.378 - 8.2 \cdot 0.986}{0.014} = 20.93 \text{ sec}$$

3.2.6 (4 נקודות) הוצע רעיון להוסיף שירות תמיכה בציט וירטואלי למתגייסים. בשירות זה יכולים המתגייסים לשוחח אונליין בציט עם המערכת ולברר פרטים המעניינים אותם. ציין יתרון וחיסרון אחד לשירות זה ביחס לשירות טלפוני ע"י מוקדן אנושי, הן מבחינת המוקד והן מבחינת המתגייסים לשירות.

תשובה:

מבחינת המוקד:

יתרונות:

1. הורדת עומס מערוצי שירות אחרים
2. חסכון בכוח אדם: מוקדנית יכולה לטפל במספר פניות במקביל
3. ניהול עומסים יעיל – אם כל המוקדנים עסוקים בציטים אפשר להוריד את הלינק לציט מהאתר.
4. החלקת עומסים לאורך היום - מקבלים פניה מיידית אך המענה יכול להיות לאחר זמן מה.

חסרונות:

1. עלות ראשונית בהקמת השירות והתאמתו לכלל המתגייסים
2. קושי טכנולוגי וחששות מצד המתגייסים יכולים להביא לכך שימשיכו להשתמש בערוצי השירות האחרים.

מבחינת המתגייסים:

יתרונות:

1. גישה מיידית – לא צריכים לחייג או להירשם מראש
2. קיצור זמני המתנה
3. המתגייס יכול להמשיך לעשות דברים אחרים בזמן ההמתנה לתשובה

חסרונות:

1. שירות פחות אישי ואנושי
2. קושי ביצירת אמון ומסירת פרטים אישיים

חלק 3: סידור משמרות

כדי לשפר את השירות הוחלט שהמוקד יעבוד בין השעות 7:00-19:00 במספר משמרות. מנהל המוקד בדק ומצא מה מספר המוקדניות שדרוש בכל שעה על מנת לעמוד ביעדים שהגדיר. נסמן ב- $N_1, N_2, \dots, N_{12}$ את רמות האיוש הנדרשות עבור כל שעה. בנוסף, משמרת של חיילת נמשכת 9 שעות, כולל שעת הפסקה לאחר 4 שעות מתחילת המשמרת. משמרת יכולה להתחיל רק בשעה עגולה. עלות מוקדן לשעה היא קבועה בכל משמרת. עליכם לסייע בקביעת רמת האיוש האופטימלית (מינימום עלות) לכל משמרת, תחת האילוצים הנ"ל.

3.3.1 (2 נקודות) הגדירו מטריצה $A = [a_{ij}]$ המתארת את המשמרות האפשריות (כלומר, כיתבו במפורש את איברי המטריצה a_{ij}).

תשובה:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if an agent working according to schedule } j \text{ is available during interval } i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $i=1, \dots, 12$ and $j=1, \dots, 4$

המטריצה A:

7:00	1			
8:00	1	1		
9:00	1	1	1	
10:00	1	1	1	1
11:00		1	1	1
12:00	1		1	1
13:00	1	1		1
14:00	1	1	1	
15:00	1	1	1	1
16:00	1	1	1	1
17:00		1	1	1
18:00			1	1
19:00				1

3.3.2 (3 נקודות) נסחו בעיית תכנות בשלמים, שפתרונה נותן איוש אופטימלי למשמרת, כלומר, ממזער את עלות האיוש היומית. הגדירו במפורש מהם משתני ההחלטה והפרמטרים בהם אתם משתמשים.

תשובה:

משתנה ההחלטה - X_j - מספר המוקדנים במשמרת ה- j

N_i הוא רמות האיוש המינימלית הנדרשת בשעה i .

a_{ij} הוא משתנה המתאר האם מוקדן במשמרת j פעיל (נותן שירות) בשעה i . (לפי ההגדרה בסעיף הקודם)

משום ש- $C_j = C$ לכל j , אין צורך לכתוב אותו בפונקציית המטרה.

בעיית האופטימיזציה היא:

$$\min \sum_{j=1}^4 X_j$$

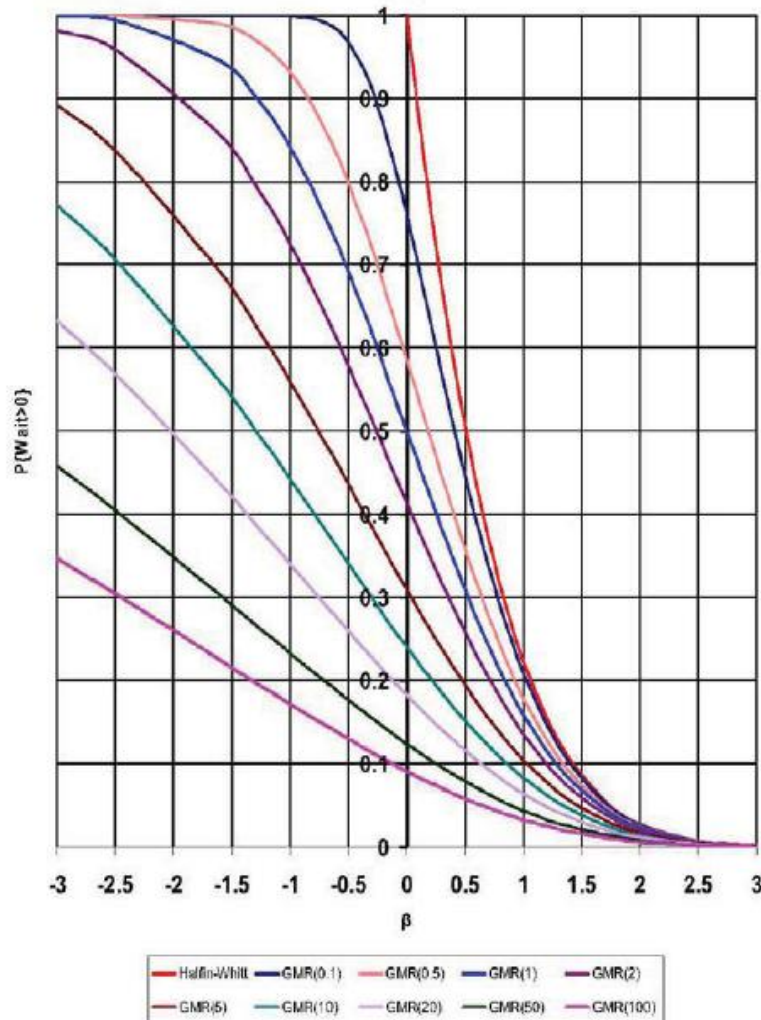
s.t.

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} X_j \geq N_i, \quad i=1,2,\dots,12$$

$$X_j \geq 0, \quad \text{integer}$$

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .

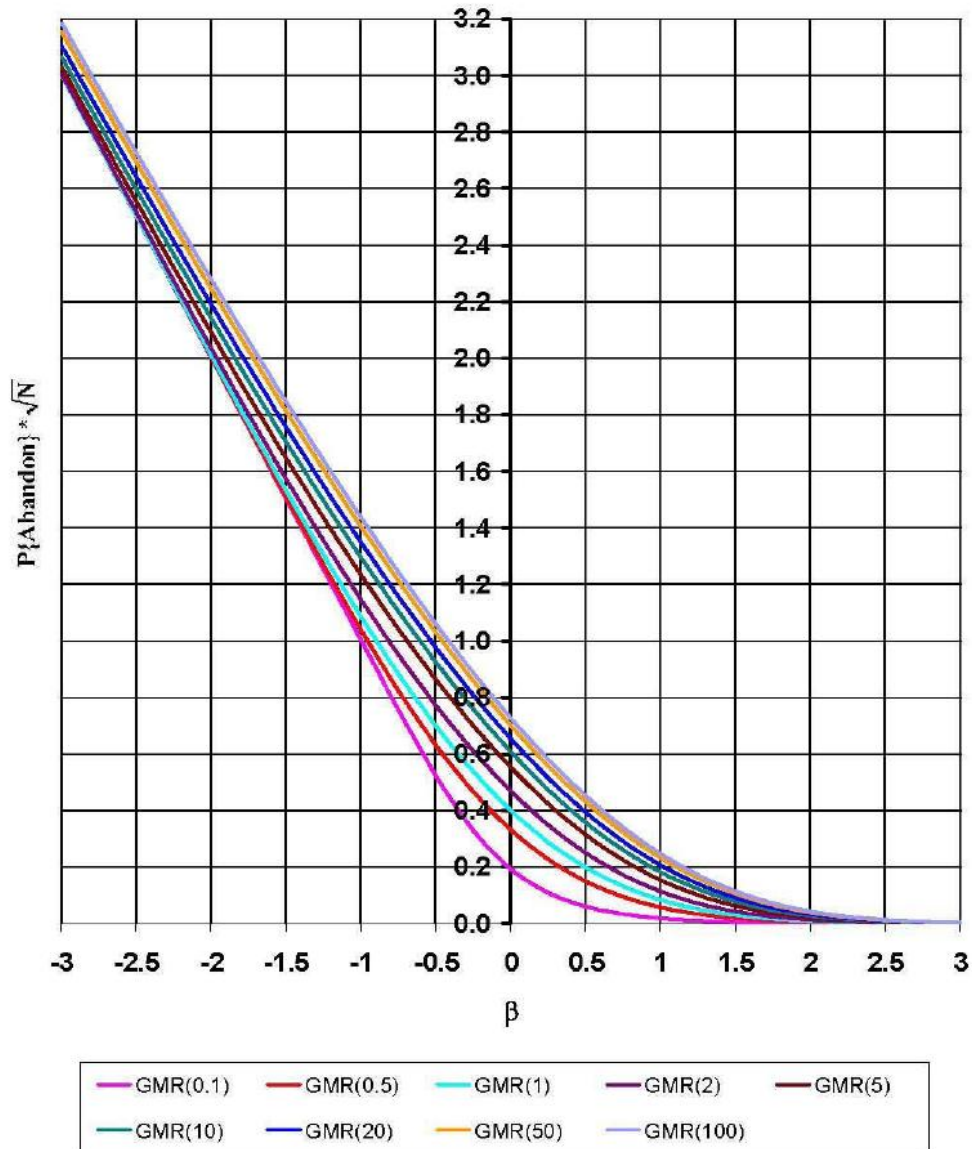


GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\theta/\mu = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

Note: **Erlang-C** = limit of **Erlang-A**, as patience $\uparrow$ indefinitely.

Erlang-A: % Abandonment

$\%Ab \times \sqrt{n}$ vs. β , for varying (im)patience (θ/μ):



Note the behavior like $-\beta/\sqrt{n}$, for (relatively) large negative β and over all (im)patience levels. For an explanation, think **ED**: $n = R + \beta\sqrt{R} = R - \gamma R$; hence $\gamma \approx -\beta/\sqrt{R} \approx -\beta/\sqrt{n}$, and γ is $P\{Ab\}$ in the ED-Regime.

שאלה 4 - תיאוריה (15 נקודות)

חלק 1. $M_t | G | \infty$ (7 נקודות)

במערכת שירות $M_t | G | \infty$, המופע הוא פואסוני לא הומוגני בזמן עם קצב מופע $\{\lambda(t), t \geq 0\}$, ומשכי השירות S הם בלתי-תלויים, שווי התפלגות, ובלתי תלויים במופע. נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t ויהי $R(t)$ ממוצע מספרם: $R(t) = EL(t)$. ניתן להראות ש- $R(t)$ נתון על ידי כל אחד משלושת הביטויים הבאים:

$$R(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(u) P(S > t - u) du = E \left[\int_{t-S}^t \lambda(u) du \right] = E[S] E[\lambda(t - S_e)]$$

כאשר S_e הוא זמן שארית השירות.

4.1 (3 נקודות) נניח שמשך השירות S הוא **דטרמיניסטי** $D: D=S$. הוכיחו את השוויון בין שלושת ההצגות של $R(t)$ למקרה זה.

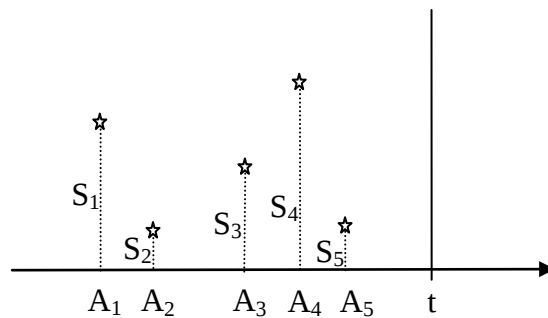
תשובה:

$S_e \stackrel{d}{=} U(0, D)$. מתפלג אחיד על $[0, D]$.

$$\text{Rep 3} = DE[\lambda(t - S_e)] = D \int_0^D \frac{1}{D} \lambda(t - u) du = \int_0^D \lambda(t - u) du = \int_{t-D}^t \lambda(u) du = \text{Rep 2}$$

$$\text{Rep 1} = \int_{-\infty}^t \lambda(u) 1_{\{t > t-D\}} du = \int_{t-D}^t \lambda(u) du = \text{Rep 2}$$

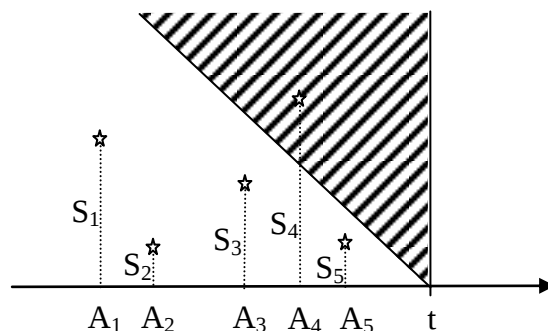
4.2 בכיתה הוכחנו שמספר האנשים במערכת שירות $M_t | G | \infty$ מתפלג פואסון עם תוחלת $R(t)$. נעזרנו לשם כך בתרשים הבא :



כאשר A_i הוא זמן ההגעה של לקוח i ו- S_i הוא זמן שירות של לקוח i .
4.2.1 (2 נקודות) ציין בתרשים את האזור בו כלולים הלקוחות הנמצאים במערכת בזמן t .

תשובה :

נסמן קו בשיפוע 45 מעלות מנקודה t . האזור המקווקו כולל את כל הלקוחות הנמצאים במערכת בזמן t .



4.2.2 (3 נקודות) הסבר מדוע ועל סמך אילו עקרונות אנו יודעים שמספר האנשים באזור זה מתפלג פואסון (אין צורך בהוכחה פורמלית).

תשובה :

מספר האנשים באזור המסומן באפור מתפלג פואסון על סמך שני העקרונות הבאים :

1. תהליך פואסון מקיים את התכונה שמספר הלקוחות המגיעים בכל מקטע זמן סופי גם הוא מתפלג פואסון.
על כן אנחנו יכולים לחלק את ציר הזמן לפני זמן t , לרצועות דקות באורך dt . ומספר הלקוחות ברצועה אנכית זו מתפלג פואסון.
2. פיצול תהליכי פואסון - אם מגרילים לכל כניסה סיווג באופן אקראי, תהליך ההגעה של כל תת-סיווג יהיה גם הוא תהליך פואסון עם קצב $p_i \lambda$. מכיוון שזמן שירות ותהליך ההגעה הם בלתי תלויים ניתן להשתמש במשתנה המקרי של זמן השירות על מנת לפצל את תהליך ההגעה לתתי קבוצות. נחלק את

ציר הזמן לרצועות אופקיות ברוחב ds ומספר הלקוחות בכל רצועה רוחבית מתפלג גם הוא פואסון עם קצב $\lambda \cdot \int_a^b f_S(u) du$.

באופן דומה ניתן לבנות את שטח המשולש האפור ממקטעים קטנים וזרים בהם בספר האנשים המתפלג פואסון. ולכם גם בכל השטח האפור מספר האנשים יתפלג פואסון (הפעם על סמך איחוד).

חלק 2. עומס מוצע. (8 נקודות)

בכתה הוסבר ש- $R(t)$ הנ"ל משמש כהגדרת **העומס המוצע (Offered Load)** למערכת שירות בזמן t , כאשר המופע אליה ומשכי השירות בה הם כמתואר בחלק 1 הנ"ל. (כזכור, $R(t)$ נמדד ב- Erlang).

4.3 הסבירו בקצרה מדוע אכן **ההגדרה מתאימה**. את הסברכם חלקו לשלושה חלקים:

4.3.1 (2 נקודות) **המקרה הפרטי** של מופע פואסוני **בקצב קבוע** ($\lambda(t) \equiv \lambda$): מהו $R(t)$ במקרה זה ומדוע הגדרתו מתאימה?

תשובה:

במקרה זה $R(t) = \lambda \cdot E(S) \equiv R$, אינו תלוי ב- t !

λ = מספר ממוצע של מופעים ליחידת זמן. כל מופע מביא עימו בממוצע $E(S)$ יחידות עבודה, הנמדדת ביחידות זמן-שירות. לכן R = כמות העבודה המגיעה למערכת ליחידת זמן, כאשר עבודה נמדדת ביחידות זמן שירות.

4.3.2 (2 נקודות) **דוגמא** של חדר מיון בבית חולים, שבו משך השהיה הממוצע **6 שעות**: מדוע ההגדרה מסעיף 4.3.1 איננה מתאימה למקרה שכזה?

תשובה:

כאשר S מקבל ערכים יחסית גדולים, כמות העבודה בזמן t במערכת כוללת עבודה שהגיעה זמן רב יחסית לפני t , ואם קצב המופע משתנה, כמו בחדר מיון, קצב מופע העבודה לפני זמן רב יכול להיות שונה בהרבה מקצב המופע בזמן t .

4.3.3 (2 נקודות) המקרה הכללי: מדוע הגדרת $R(t)$ בחלק 1 הנ"ל אכן מתאימה?

תשובה:

בהמשך ל- 4.3.2, $R(t)$ = כמות העבודה הנמצאת במערכת בזמן t ; עבודה נמדדת ביחידות זמן שירות, או לחילופין מספר יחידות זמן-שרת הנדרשות לטיפול. נשתמש בהגדרה הבאה של $R(t)$:

$$R(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(u) P(S > t - u) du$$

1. $\lambda(u)$ = קצב המופע בזמן u . לכן $\lambda(u)du \approx$ ממוצע מספר המופעים במשך $(u, u+du)$.

2. $P(S > t - u)$ = % המופעים בזמן u שעדיין נמצאים במערכת בזמן $t > u$.

3. $\lambda(u)du \cdot P(S > t - u) \approx$ כמות העבודה במערכת בזמן t , שמקורה במופעים שהתרחשו במשך $(u, u+du)$.

4. $\int_{-\infty}^t \lambda(u) P(S > t - u) du$ = כמות העבודה במערכת בזמן t , $t > 0$.

זוהי תוחלת מספר האנשים באזור המקווקו שסימנו בסעיף 4.2.1.

4.4 (2 נקודות) הסבירו כיצד ניתן להרחיב את המקרה הדטרמיניסטי ב- 4.1 הנ"ל למקרה של S כללי, דהיינו כיצד מוכיחים שאכן:

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

רמז: ניתן לקרב כל משתנה מקרי, בדיוק רב כרצונכם, על ידי משתנה מקרי המקבל מספר סופי של ערכים (מ"מ דיסקרטי).

תשובה:

נניח $S = D_i$ w.p. p_i , מ"מ דיסקרטי.

על סמך אמידה מוטה, $\frac{p_i D_i}{E(S)}$ w.p. $S_e = U_i$, כאשר $U_i \stackrel{d}{=} U(0, D_i)$. לכן,

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_i p_i \int_{t-D_i}^t \lambda(u) du \stackrel{\lambda_i = \lambda \cdot p_i}{=} \sum_i \int_{t-D_i}^t \lambda_i(u) du \stackrel{4.2.1}{=} \sum_i D_i E(\lambda_i(t - U_i)) = \\ &= E(S) \sum_i \frac{p_i D_i}{E(S)} E(\lambda(t - U_i)) = E(S) E(\lambda(t - S_e)) = RHS \end{aligned}$$