



מרצה : ד"ר גלית יום-טוב
מתרגלת : נועה זיכלינסקי

תאריך הבחינה : 8.7.2016

מס' סטודנט _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד א' – סמסטר אביב 2016

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון מדעי רגיל.
- המבחן כולל 25 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

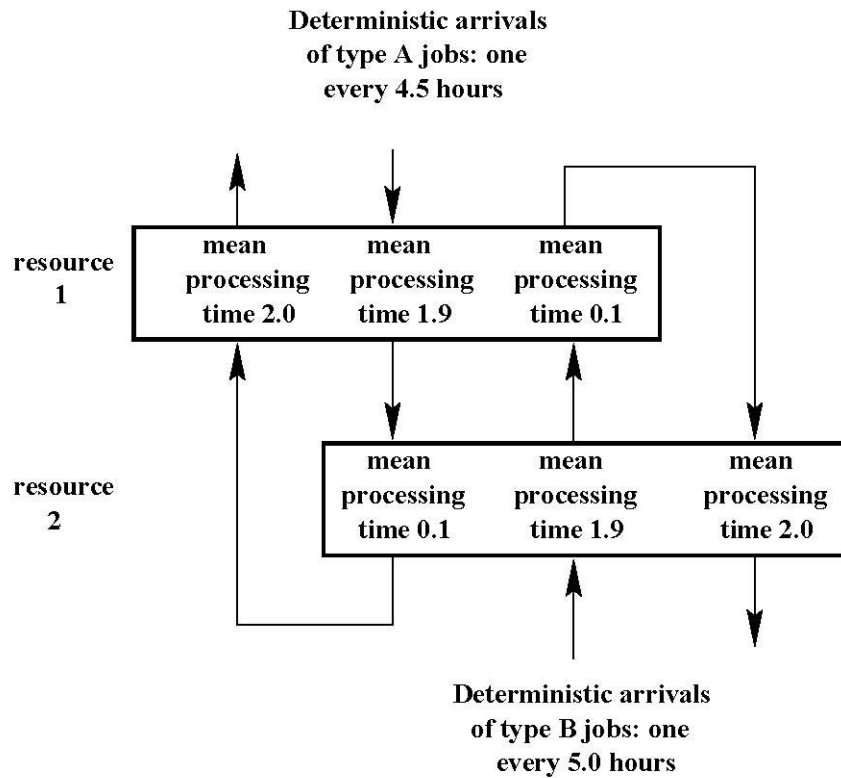
שאלה 1	_____ מתוך 25 נקודות	תרגילי בית
ניקוד :		
שאלה 2	_____ מתוך 25 נקודות	בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים
שאלה 3	_____ מתוך 35 נקודות	יישום
שאלה 4	_____ מתוך 15 נקודות	תיאוריה
סה"כ	_____ מתוך 100 נקודות	

בהצלחה !

שאלה 1 - תרגילי בית (25 נקודות)

חלק 1. ניתוח קיבולת (10 נקודות).

הניחו תהליך בו מעובדים שני סוגים של עבודות- סוג A וסוג B. בתהליך העיבוד משתתפים שני משאבים – משאב 1 ומשאב 2. מבנה התהליך, קצבי ההגעות וממוצעי זמני השירות, עבור שני סוגי העבודות, מתוארים בתרשים הבא :



1.1.1 (5 נקודות) חשבו את נצילות כל אחד משני המשאבים במצב יציב, אם יש כזה. אם המערכת לא מתייצבת, הסבירו מדוע.

תשובה :

1.1.2 (5 נקודות) הניחו כעת כי עבודה מסוג A מגיעה כל 3.5 שעות (במקום 4.5 שעות). חשבו את נצילות המשאבים תחת הנחה זו.

תשובה:

חלק 2. תורים עם עדיפויות (15 נקודות).

אנשים מגיעים למכונת צילום לפי תהליך פואסון בקצב של לקוח בדקה. מספר העותקים שכל אחד נדרש לצלם מתפלג באופן אחיד בין 1 ל-10. כל צילום אורך 3 שניות. תזכורת:

1. עבור $U \sim U(a, b)$

$$E(U) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}(U) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

$$C^2(S) = \frac{\text{var}(S)}{E^2(S)} \quad 2.$$

$$\text{Var}(aS) = a^2 \text{Var}(S), \quad a \in \mathbb{R} \quad 3.$$

נוסחאות נוספות בנושא מופיעות בסוף השאלה.

עבור סעיפים 1.2.1 ו- 1.2.2 הניחו מדיניות שירות FCFS.

1.2.1 (3 נקודות) חשבו מהו זמן ההמתנה הממוצע בתור למכונת הצילום.

תשובה:

1.2.2 (2 נקודות) חשבו מהו ממוצע מספר האנשים בתור למכונת הצילום.

תשובה:

מעתה ואילך, הניחו שאדם שמגיע עם עד 3 צילומים מקבל עדיפות מסוג non-preemptive בתור.
1.2.3 (8 נקודות) חשבו מהו ממוצע משך ההמתנה למכונת הצילום.

תשובה:

1.2.4 (2 נקודות) חשבו מהו אורך התור הממוצע למכונת הצילום.

תשובה:

M/G/1 without priorities

$$E(W_q) = \frac{E(R)}{1-\rho}.$$

R - Expected residual service time

ρ - Prob. of arriving to a busy server

$$E(R) = (1-\rho) \cdot 0 + \rho \cdot E(S) \cdot \frac{1+C^2(S)}{2}$$

Khinchine-Pollaczek Formula:

$$E(W_q) = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot E(S) \cdot \frac{1+C^2(S)}{2}$$

M/G/1 with priorities

Steady state $\Leftrightarrow \rho \stackrel{\Delta}{=} \rho_1 + \dots + \rho_K < 1$, where $\rho_k = \lambda_k m_k$.

Convenient notation: $\bar{\rho}_k = \rho_1 + \dots + \rho_k, 1 \leq k \leq K$.
 $\bar{\rho}_0 \equiv 0$

Note: ρ_k = fraction of time allocated by server to class k .

$1 - \rho$ = idleness/availability.

- $E(W_q^k)$ - expected waiting time of class k customer.
- $E(L_q^k)$ - expected number of waiting class k customers.
- $E(R)$ - expected residual service time.

Non- Preemptive Regime

$$1. \quad E(W_q^1) =$$

$$E(R) + m_1 E(L_q^1) = E(R) + m_1 \lambda_1 E(W_q^1) = E(R) + \rho_1 E(W_q^1)$$

$$\Rightarrow E(W_q^1) = \frac{E(R)}{(1 - \rho_1)}, \text{ as before } (K = 1).$$

$$2. \quad E(W_q^2) = E(R) + \underbrace{m_1 E(L_q^1) + m_2 E(L_q^2)}_{\text{wait due to class 1 \& 2 in queue}} + \underbrace{m_1 \lambda_1 E(W_q^2)}_{\text{wait due to class 1, arriving during wait of 2.}}$$

$$\Rightarrow E(W_q^2) = E(R) + \rho_1 E(W_q^1) + \rho_2 E(W_q^2) + \rho_1 E(W_q^2)$$

$$\Rightarrow E(W_q^2) = [E(R) + \rho_1 E(W_q^1)] / (1 - \rho_1 - \rho_2) =$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(W_q^2) &= \frac{E(R)}{[(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)]} \\ \uparrow \\ &\text{substitute } E(W_q^1) \end{aligned}$$

$$k. \quad EW_q^k =$$

$$ER + m_1 \cdot EL_q^1 + \dots + m_k \cdot EL_q^k + \lambda_1 m_1 EW_q^k + \dots + \lambda_{k-1} m_{k-1} EW_q^k$$

$$\Rightarrow = ER + \rho_1 EW_q^1 + \dots + \rho_{k-1} EW_q^{k-1} + (\rho_1 + \dots + \rho_k) EW_q^k$$

$$E(W_q^k) = \frac{E(R) + \rho_1 E(W_q^1) + \dots + \rho_{k-1} E(W_q^{k-1})}{(1 - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho_k)} = \frac{E(R)}{(1 - \bar{\rho}_{k-1})(1 - \bar{\rho}_k)}$$

Where

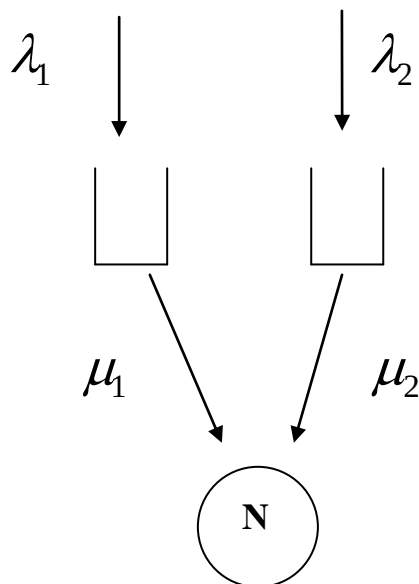
$$E(R) = (1 - \rho) \cdot 0 + \sum_{j=1}^K \rho_j \cdot m_j \cdot \frac{1 + C_j^2(S)}{2} =$$

$$= \sum_{j=1}^K \lambda_j m_j^2 \cdot \frac{E(S_j^2)}{2m_j^2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \lambda_j E(S_j^2)$$

שאלה 2 בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים (25 נקודות)

חלק 1. מודל נוזלים (13 נקודות)

נתונה מערכת תורים בארכיטקטורת V, המתוארת בציור הבא :



הפרמטרים של מודל המערכת נתונים ע"י :

- ♦ λ_1 (λ_2) - קצבי מופע לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ μ_1 (μ_2) - קצבי שירות לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ N - מספר השרתים בתחנה

המערכת פועלת לפי מדיניות שהיא *preemptive*, ז"א ניתן בכל רגע להפסיק שירות של לקוח ולהחזירו להמתנה בתור מהסוג שלו, אבל אסור "לזרוק" לקוחות מהמערכת. בנוסף, המדיניות הינה *work conserving*, דהיינו, השרתים חייבים לשרת כאשר יש לקוחות בתור (ז"א לא ייתכן מצב שבו יש שרתים פנויים ובעת ובעונה אחת יש גם לקוחות הממתינים בתור).

לצורך בניית **מודל נוזלים** למערכת הנ"ל, נגדיר את המשתנים הבאים :

$$X_1(t) = \text{סה"כ מספר הלקוחות מסוג 1 במערכת (בשירות או בתור), בזמן } 0 \leq t.$$

$$X_2(t) = \text{סה"כ מספר הלקוחות מסוג 2 במערכת (בשירות או בתור), בזמן } 0 \leq t.$$

2.1.1 (4 נקודות) כתבו משוואות דיפרנציאליות עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$, תחת ההנחה שהתחנה נותנת עדיפות ללקוחות מסוג 1.

תשובה:

2.1.2 (2 נקודות) כתבו ביטוי למספר הכולל של הממתינים בתור בזמן t . (השתמשו ב- N , $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$).

תשובה:

כאלטרנטיבה לעדיפות הנ"ל ללקוחות מסוג 1, נגדיר מדיניות חדשה ששומרת על תורים שווים בשני הסוגים. כלומר, משרתים לקוחות מסוג 1 ומסוג 2 באופן שבכל רגע $0 \leq t$, מספר הממתינים בתור מסוג 1 שווה למספר הממתינים בתור של סוג 2.

2.1.3 (4 נקודות) כתבו משוואות דיפרנציאליות עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$, תחת מדיניות אלטרנטיבית זו.

תשובה:

2.1.4. (3 נקודות) תארו בקיצור איך ניתן, בעזרת גיליון אלקטרוני בלבד, לפתור בקירוב (מדויק ככל הנדרש) את המשוואות הדיפרנציאליות בסעיפים 2.1.1 ו-2.1.3.

תשובה:

חלק 2. פונקצית סיכון (Hazard Rate) (12 נקודות)

2.2.1 (3 נקודות) עבור מ"מ X אי שלילי עם פונקצית התפלגות F_X ופונקצית צפיפות f_X , הגדירו את פונקצית הסיכון h_X . הסבירו בקיצור את משמעות $h_X(t)$, בזמן t כלשהו.

תשובה:

נתונות n ריאליזציות (מדידות) של משתנה מקרי Z רציף וחיובי עם התפלגות לא ידועה. המטרה היא לאמוד את פונקציית הסיכון של Z על סמך מדידות אלו. נניח שכל המדידות שייכות לאינטרוול $[0, T]$. נחלק את הקטע $[0, T]$ לאינטרוולים קטנים באורך Δ כל אחד, ועבור כל אינטרוול קטן j , ($j = 1, 2, \dots$) נגדיר:

- ♦ d_j - מספר המדידות שנפלו באינטרוול j ,
- ♦ r_{j-1} - סה"כ המדידות מתוך N , שלא שייכות ל- $j-1$ האינטרוולים הקודמים ($r_0 = 0$).

2.2.2 (3 נקודות) כתבו אמד לפונקציית הצפיפות ($density$) של Z באינטרוול j .

תשובה:

2.2.3 (3 נקודות) כתבו אמד לפונקציית השרידות ($survival function$) של Z באינטרוול j .

תשובה:

2.2.4 (3 נקודות) כתבו אמד לפונקציית הסיכון ($hazard rate$) של Z באינטרוול j .

תשובה:

שאלה 3 - יישום (35 נקודות)

להלן כתבה שפורסמה ב"ידיעות אחרונות" בחודש פברואר 2016 כחלק מסדרת כתבות בנושא השירות שמקבלים מתגייסים טרם גיוסם במוקדי השירות של צה"ל. שימו לב: עבור פתרון הבחינה אין צורך לקרוא את הכתבה.

6 ידיעות אחרונות יום שישי, כ"ו בשבט תשע"ו | 5.2.2016

אין עיכוב

לאחר מחבלים מעבר לקווי אויב ולשלוף אותם ממיטתם באישון לילה זו משימה שבצה"ל כבר מזמן התרגלו לבצע • אבל מתברר שלתפעל אתר אינטרנט או לענות לטלפונים של מתגייסים - זה כבר סיפור אחר • הליך המיונים לשירות צבאי הפך כה מסורבל, מפורך ומתיש, שיותר ויותר צעירים לקראת גיוס הרימו ידיים: "אין עם מי לדבר" • בחיל המודיעין, "המצטיין" בעיכובים, מודעים לבעיה: "פועלים לשפר את המצב"

באמצעות הפעלת קשרים אישיים - או פשוט נותרו ללא מענה. גם כאשר לכסוף מקבלים תשובה, היא לא תמיד עוזרת: במקרה אחד נאמר לצעיר שחלה בשפעת והיה עם חום גבוה כי אין באפשרותו להחמיץ את הגיבוש הקרבי שבו ביקש להשתתף. הקרבן הזה, שמתחיל כבר בהליך המיונים, שוכר שיאים בה געה לצו ראשון: במקום להסתיים בכמה שעות בלבד, תהליך המיון הפשוט יחסית נמשך לעיתים עשר שעות. מרוע? כי את היעילות כנראה שומרים רק ליחידות השדה: בצה"ל רואנים תחילה לביצוע אימות נתונים, ורק אז לקיים מבחנים פסיכוכיניים ובדיקות רפואיות. כל זה יוצר צוואר בקבוק שמאלץ את הצעירים לעמוד בתור במשך שעות ללא מעש.

מערך המיון שמסתמן דווקא כמסורבל ביותר הוא גם זה הגדול פס כמותהם ביותר: חיל המודיעין. מעדויות המועמדים לשירות בחיל עולה תמונה מדאיגה: הכוללת המתנה למענה טלפוני של קרוב לשלוש שעות. קצין בכיר אחד שקצה נפשו בכך אף נכנס לאחרונה למשרדו של קצין המודיעין הראשי, תא"ל משה שנייד, עם צילום מסך מהטלפון הסלולרי של בתו, המועמדת לשירות בחיל, כדי להציג בפניו את הזמן שהמתנה למוקד הטלפוני: שני ימים ארבעים ושלוש דקות.

אמן שיענו לי

קברניטי המדינה אוהבים להתנאות, ובצדק, ביכולותיו הבלתי רגילות של צה"ל. עם מוטו המקוץ חרשנים, מל"טים מתוחכמים, צוללות סודיות ומערך סייבר כה מתקדם שאפילו מרטי המודע בדיוני אינם מסוגלים לתאר, לא נותר ספק: אין משימה שמורכבת מדי עבור הצבא. אבל בעוד איתור מחבלים בשטח אויב או ביצוע סיכולים ממוקדים באישון לילה קטן על צה"ל, לתפעל אתר אינטרנט או לענות לטלפונים של המתגייסים - זו כבר הפכה מבחינתו למשימה בלתי אפשרית. הכיורוקרטיה המסורבלת שבה נתקלים יותר ויותר צעירים הנמצאים בשלבי המיון לפני גיוס הפכה כחודשים האחרונים לכה מפרכת, שרבים מהמתגייסים הפוטנציאליים פשוט הרימו ידיים. בין היתר סיפור הצעירים על המתנה של שעות למענה טלפוני מהצבא ועל פקסים ששלחו ללשכות הגיוס שנערמו ונעדרו - עד שבסופו של דבר נעלמו.

"אוש במקום גיבוש"

קחו למשל את המיונים ליחידות קרביות: בחודש האחרון הגיעו למוקד הצבאי בנושא זה 11 אלף שיחות בממוצע ביום. אך 80 הדיונים אסמננות היו על הטיפול בשיחות אלו הספיקו לענות על 6,000 פניות בלבד, קצת יותר מחצי. המשמעות: 5,000 צעירים תדורי מוטיבציה שנערכים להתגייס לקרבי נאלצו לחפש תשובות

נתמקד בשלב זה במוקד השירות הצבאי המטפל במתגייסים ליחידות הקרביות. למוקד זה מגיעות 11,000 שיחות ביום. המוקד פועל במשך 8 שעות ביום, ופועלות בו 80 חיילות המטפלות בשיחות הנכנסות. ממוצע משך שיחה במוקד הוא 5 דקות וממוצע הסבלנות של הלקוחות הוא 10 דקות. התבקשתם כמהנדסי תעשייה וניהול בוגרי הקורס "הנדסת מערכות שירות" לנתח את המוקד.

חלק 1 – מצב קיים

3.1.1 (2 נקודות) הציעו מודל מרקובי מתאים למוקד. מהן ההנחות המתמטיות במודל זה?

תשובה:

3.1.2 (2 נקודות) ציינו את הפרמטרים המתאימים למודל שהצעתם בסעיף הקודם ואת ערכם.

תשובה:

3.1.3 (3 נקודות) חשבו את ה Offered-Load במערכת וציינו באיזה תחום תפעולי נמצא המוקד. נמקו תשובתכם

תשובה:

3.1.4 (3 נקודות) תנו הערכה טובה לאחר הנענים (%Answer) ללא שימוש בפונקציית Garnett.

תשובה:

להלן צילום חלקי של הפלט עבור מספר הרצות בתוכנת 4CC עבור המצב הנוכחי:

Compute Add to Table Delete Rows Clear All Export Import Graph												
	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Agent's Occupancy	%Answer	%Abandon	Average Speed of Answer	%Answer within Target	Average Queue Length
Results	60.0	00:00.0								03:33.7	.0%	69.2
1	60.0	10:00.0								03:33.7	69.8%	69.2
2	60.0	08:00.0								03:33.7	69.8%	69.2
3	60.0	05:00.0								03:33.7	67.3%	69.2
4	60.0	03:00.0								03:33.7	16.8%	69.2
5	60.0	01:30.0								03:33.7	.2%	69.2
6	60.0	00:30.0								03:33.7	.0%	69.2
7	60.0	00:00.0								03:33.7	.0%	69.2
8												
9												
10												

3.1.5 (2 נקודות) מנהל המוקד מעוניין לשפר את רמת השירות. הוא בוחר בפרופורציית הלקוחות אשר קיבלו שירות באופן מיידי (ללא המתנה) בתור המדד התפעולי אותו הוא רוצה לשפר (מדד זה יכוון לתחום ה QED). על סמך צילום המסך הנ"ל, עבור המצב הנוכחי, מהי פרופורציית הלקוחות אשר קיבלו שירות מיידי מבלי שנאלצו להמתין? נמקו!

תשובה:

חלק 2 – מצב חדש

3.2.1 (2 נקודות) מנהל המוקד מעוניין לקבוע שלפחות 20% מהלקוחות לא ימתינו בתור. היעזרו בפונקצית Garnett המצורפת בסוף השאלה כדי לקבוע את מספר המוקדניות המינימאלי הנדרש בכדי לעמוד ביעד זה. תנו תשובה מדויקת ככל שניתן.

תשובה:

3.2.2 (2 נקודות) מה יהיה אחוז הנטישה עבור רמת האיוש שמצאתם?

תשובה:

3.2.3 (3 נקודות) על סמך המאמר של לרסון ניתן לשפר שביעות רצון של לקוחות ע"י הודעה של זמן ההמתנה הצפוי במערכת. מניסוי שביצע מנהל המוקד נמצא שאם מספקים מידע מסוג זה בתחילת ההמתנה הסבלנות הממוצעת גדלה מ- 10 דקות ל 12 דקות. כיצד צפויים להשתנות כתוצאה מכך מדדי הביצוע: הבאים: הסתברות להמתנה, אחוז נוטשים וניצולת עובדים. הסבירו באופן כללי, אין צורך לחשב.

תשובה:

להלן פלט מתוכנת 4CC עבור טווח של מספר מוקדנים בין 110 ל-130. (שאר הפרמטרים נשארו ללא שינוי).

4CallCenters v2.23

File Table Settings Help

Performance Profiler | Staffing Query | **Advanced Profiling** | Advanced Queries | What-if Analysis

Advanced Profiling The Advanced Profiling tool allows you to enter multiple values for each of the input parameters, and produces a performance profile for each combination.

Compute | Add to Table | Delete Rows | Clear All | Export | Import | Graph | Settings

Input Multi-Value	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Range	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Agent's Occupancy	%Answer	%Abandon	Average Speed of Answer	%Answer within Target	Average Queue Length
Results													
1	60.0	00:00.0		110.0				98.5%	94.6%	5.4%	00:32.4	22.0%	12.4
2	60.0	00:00.0		112.0				97.9%	95.7%	4.3%	00:25.6	29.5%	9.8
3	60.0	00:00.0		114.0				97.2%	96.7%	3.3%	00:19.8	37.9%	7.6
4	60.0	00:00.0		116.0				96.3%	97.5%	2.5%	00:15.0	46.6%	5.8
5	60.0	00:00.0		118.0				95.3%	98.1%	1.9%	00:11.2	55.2%	4.4
6	60.0	00:00.0		120.0				94.2%	98.6%	1.4%	00:08.2	63.4%	3.2
7	60.0	00:00.0		122.0				93.0%	99.0%	1.0%	00:05.9	70.8%	2.3
8	60.0	00:00.0		124.0				91.8%	99.3%	.7%	00:04.2	77.3%	1.6
9	60.0	00:00.0		126.0				90.5%	99.5%	.5%	00:02.9	82.8%	1.1
10	60.0	00:00.0		128.0				89.2%	99.7%	.3%	00:01.9	87.3%	.8
11	60.0	00:00.0		130.0				87.9%	99.8%	.2%	00:01.3	90.8%	.5
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													

3.2.4 (4 נקודות) עבור מוקד הפועל עם 120 מוקדניות, חשבו את $E(W_q | W_q > 0)$, פרטו את חישוביכם, והסבירו את משמעותו של מדד זה.

תשובה:

3.2.5 (3 נקודות) עבור אותו מספר מוקדניות כמו בסעיף הקודם, מהי תוחלת זמן ההמתנה בתור של לקוחות שנטשו את המערכת?

תשובה:

3.2.6 (4 נקודות) הוצע רעיון להוסיף שירות תמיכה בציט וירטואלי למתגייסים. בשירות זה יכולים המתגייסים לשוחח אונליין בציט עם המערכת ולברר פרטים המעניינים אותם. ציין יתרון וחסרון אחד לשירות זה ביחס לשירות טלפוני ע"י מוקדן אנושי, הן מבחינת המוקד והן מבחינת המתגייסים לשירות.

תשובה:

מבחינת המוקד:

יתרון:

חסרון:

מבחינת המתגייס:

יתרון:

חסרון:

חלק 3: סידור משמרות

כדי לשפר את השירות הוחלט שהמוקד יעבוד בין השעות 00:19-00:07 במספר משמרות. מנהל המוקד בדק ומצא מה מספר המוקדניות שדרוש בכל שעה על מנת לעמוד ביעדים שהגדיר. נסמן ב- $N_1, N_2, \dots, N_{12}$ את רמות האיוש הנדרשות עבור כל שעה. בנוסף, משמרת של חיילת נמשכת 9 שעות, כולל שעת הפסקה לאחר 4 שעות מתחילת המשמרת. משמרת יכולה להתחיל רק בשעה עגולה. עלות מוקדן לשעה היא קבועה בכל משמרת. עליכם לסייע בקביעת רמת האיוש האופטימלית (מינימום עלות) לכל משמרת, תחת האילוצים הנ"ל.

3.3.1 (2 נקודות) הגדירו מטריצה $A = [a_{ij}]$ המתארת את המשמרות האפשריות (כלומר, כיתבו

במפורש את איברי המטריצה a_{ij}).

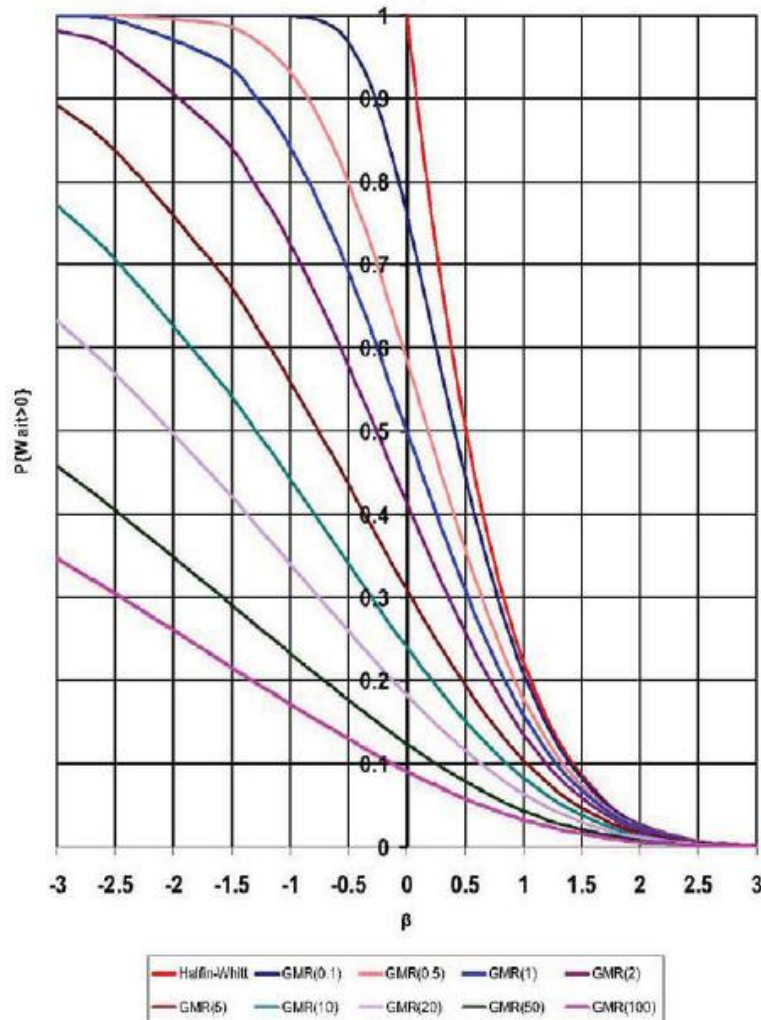
תשובה:

3.3.2 (3 נקודות) נסחו בעיית תכנות בשלמים, שפתרונה נותן איוש אופטימלי למשמרת, כלומר, ממזער את עלות האיוש היומית. הגדירו במפורש מהם משתני ההחלטה והפרמטרים בהם אתם משתמשים.

תשובה:

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .

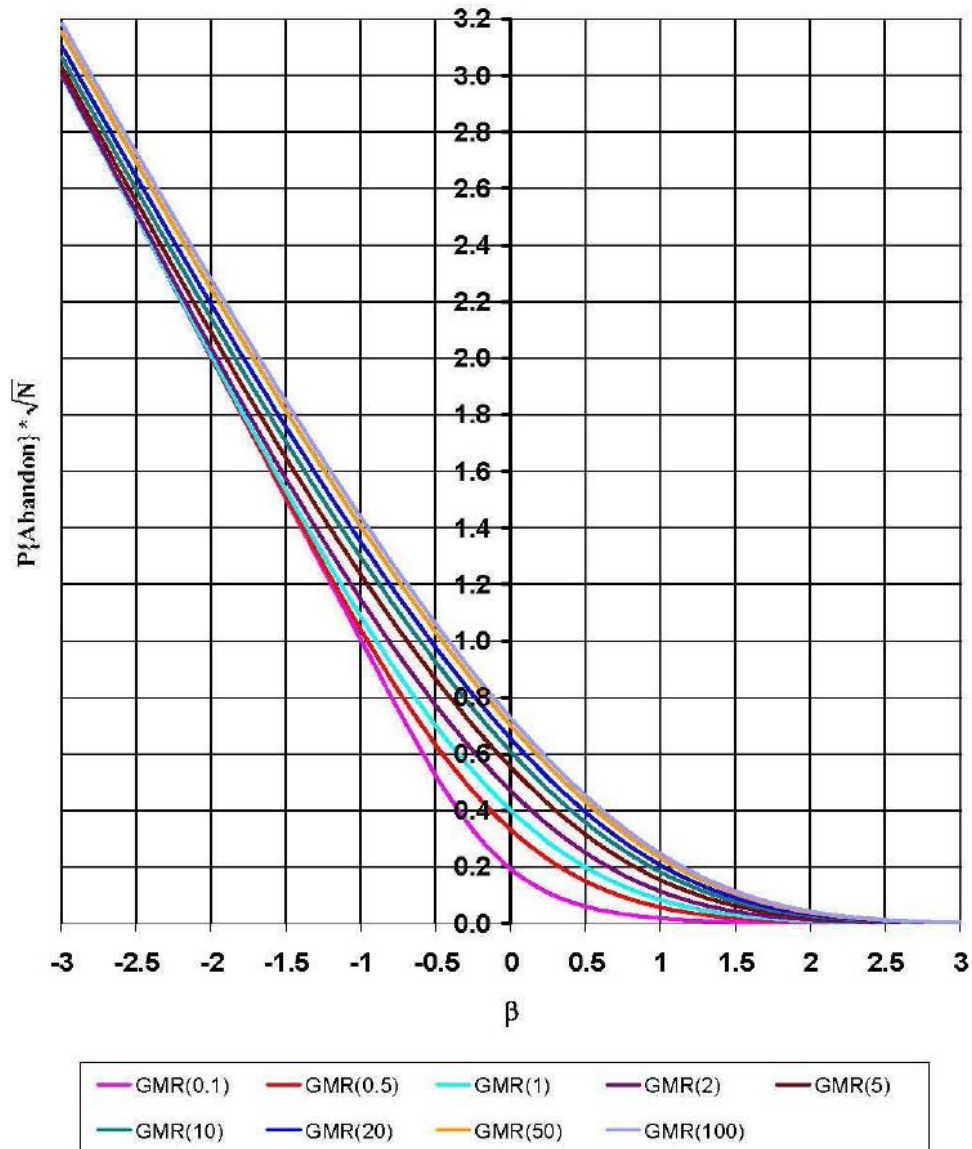


GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\frac{\theta}{\mu} = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

Note: **Erlang-C** = limit of **Erlang-A**, as patience $\uparrow$ indefinitely.

Erlang-A: % Abandonment

$\%Ab \times \sqrt{n}$ vs. β , for varying (im)patience (θ/μ):



Note the behavior like $-\beta/\sqrt{n}$, for (relatively) large negative β and over all (im)patience levels. For an explanation, think **ED**: $n = R + \beta\sqrt{R} = R - \gamma R$; hence $\gamma \approx -\beta/\sqrt{R} \approx -\beta/\sqrt{n}$, and γ is $P\{Ab\}$ in the ED-Regime.

שאלה 4 - תיאוריה (15 נקודות)

חלק 1. $M_t | G | \infty$ (7 נקודות)

במערכת שירות $M_t | G | \infty$, המופע הוא פואסוני לא הומוגני בזמן עם קצב מופע $\{\lambda(t), t \geq 0\}$, ומשכי השירות S הם בלתי-תלויים, שווי התפלגות, ובלתי תלויים במופע. נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t ויהי $R(t)$ ממוצע מספרם: $R(t) = EL(t)$. ניתן להראות ש- $R(t)$ נתון על ידי כל אחד משלושת הביטויים הבאים:

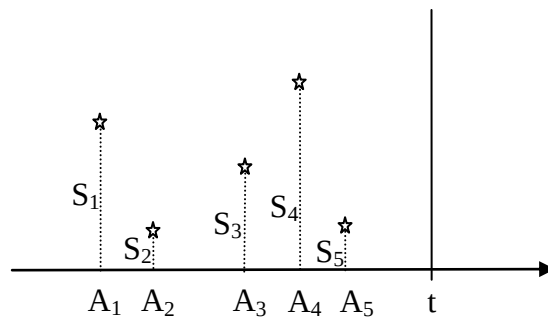
$$R(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(u) P(S > t - u) du = E \left[\int_{t-S}^t \lambda(u) du \right] = E[S] E[\lambda(t - S_e)]$$

כאשר S_e הוא זמן שארית השירות.

4.1 (3 נקודות) נניח שמשך השירות S הוא **דטרמיניסטי** $D: D=S$. הוכיחו את השוויון בין שלושת ההצגות של $R(t)$ למקרה זה.

תשובה:

4.2 בכיתה הוכחנו שמספר האנשים במערכת שירות $M_t | G | \infty$ מתפלג פואסון עם תוחלת $R(t)$. נעזרנו לשם כך בתרשים הבא :



כאשר A_i הוא זמן ההגעה של לקוח i ו- S_i הוא זמן שירות של לקוח i .
4.2.1 (2 נקודות) ציין בתרשים את האזור בו כלולים הלקוחות הנמצאים במערכת בזמן t .

תשובה :

4.2.2 (2 נקודות) הסבר מדוע ועל סמך אילו עקרונות אנו יודעים שמספר האנשים באזור זה מתפלג פואסון (אין צורך בהוכחה פורמלית).

תשובה :

חלק 2 . עומס מוצע. (8 נקודות)

בכתה הוסבר ש- $R(t)$ הנ"ל משמש כהגדרת **העומס המוצע (Offered Load)** למערכת שירות בזמן t , כאשר המופע אליה ומשכי השירות בה הם כמתואר בחלק 1 הנ"ל. (כזכור, $R(t)$ נמדד ב- Erlang).

4.3 הסבירו בקצרה מדוע אכן **ההגדרה מתאימה**. את הסברכם חלקו לשלושה חלקים :

4.3.1 (2 נקודות) **המקרה הפרטי** של מופע פואסוני **בקצב קבוע** $(\lambda(t) \equiv \lambda)$: מהו $R(t)$ במקרה זה ומדוע הגדרתו מתאימה?

תשובה :

4.3.2 (2 נקודות) **דוגמא** של חדר מיון בבית חולים, שבו משך השהיה הממוצע **6 שעות** : מדוע ההגדרה מסעיף 4.3.1 איננה מתאימה למקרה שכזה?

תשובה :

4.3.3 (2 נקודות) **המקרה הכללי**: מדוע הגדרת $R(t)$ בחלק 1 הנ"ל אכן מתאימה?

תשובה:

4.4 (2 נקודות) הסבירו כיצד ניתן **להרחיב** את המקרה הדטרמיניסטי ב- 4.1 הנ"ל למקרה של S כללי, דהיינו כיצד מוכיחים שאכן:

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

רמז: ניתן לקרב כל משתנה מקרי, בדיוק רב כרצונכם, על ידי משתנה מקרי המקבל מספר **סופי** של ערכים (מ"מ דיסקרטי).

תשובה: