



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגלת : שמרית ממון

תאריך הבחינה : 04.05.2008

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד א' – סמסטר חורף תשס"ח 2008

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 27 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

ניקוד: שאלה 1	_____ מתוך 12 נקודות	תרגילי בית
שאלה 2	_____ מתוך 13 נקודות	הרצאות/תרגילים/בחינות קודמות
שאלה 3	_____ מתוך 15 נקודות	יישום
שאלה 4	_____ מתוך 10 נקודות	תיאוריה

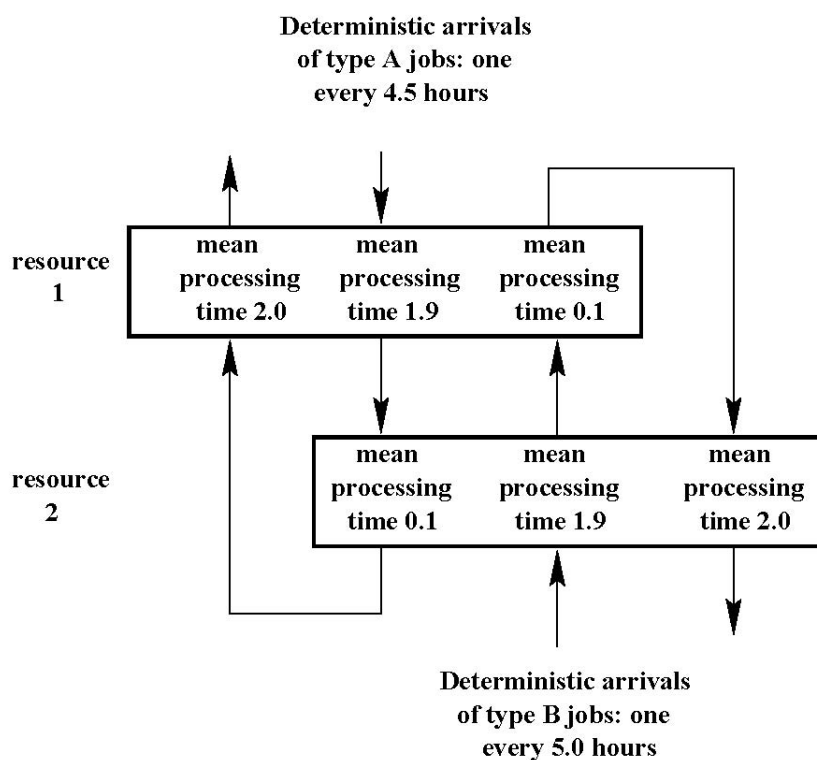
סה"כ _____ מתוך 50 נקודות

בהצלחה!

שאלה 1 תרגילי בית (12 נקודות)

חלק 1. ניתוח קיבולת

הניחו תהליך בו מעובדים שני סוגים של עבודות- סוג A וסוג B. בתהליך העיבוד משתתפים שני משאבים – משאב 1 ומשאב 2. מבנה התהליך, קצבי ההגעות וממוצעי זמני השירות, עבור שני סוגי העבודות, מתוארים בתרשים הבא :



1.1.1 חשבו את נצילות שני המשאבים במצב יציב, אם יש כזה. אם המערכת לא מתייצבת, הסבירו מדוע.

תשובה:

$$U_1 = \frac{2.0+1.9}{4.5} + \frac{0.1}{5} = 0.887$$

$$U_2 = \frac{2.0+1.9}{5} + \frac{0.1}{4.5} = 0.802$$

1.1.2 הניחו כעת כי עבודה מסוג A מגיעה כל 3.5 שעות (במקום 4.5 שעות). חשבו את נצילות המשאבים תחת הנחה זו.

תשובה:

$$U_1 = \frac{2.0+1.9}{3.5} + \frac{0.1}{5} = 100\%$$

המערכת לא עומדת בעומס ו"מתפוצצת".

נצילות משאב 2 תלויה במדיניות העדיפויות הניתנות לתת התהליכים של משאב 1. לדוגמא, אם תת התהליך עם משך השירות הממוצע של שעתיים במשאב 1 מקבל את העדיפות הנמוכה ביותר אזי

$$U_2 = \frac{2.0+1.9}{5} + \frac{0.1}{3.5} = 0.728$$

לעומת זאת, אם תת התהליך שמשכו הממוצע 1.9 שעות מקבל את העדיפות הגבוהה ביותר ותת התהליך שמשכו הממוצע 0.1 שעות מקבל את העדיפות הנמוכה ביותר אזי לא יגיעו עבודות לתת התהליך במשאב 2 שמשכו שעתיים ומתקיים

$$U_2 = \frac{1.9}{5} + \frac{0.1}{3.5} = 0.408$$

חלק 2. מודלים אמפיריים

להלן נתון חלק מדו"ח call by call data של בנק ישראלי מיום ה-1 לאוגוסט 1999. בנוסף, מצורפת טבלה הכוללת נתוני הגעות מצטברות ועזיבות מצטברות מהמערכת, מהתנור ומהשירות. שעות פעילות המוקד ביום זה הן 00:00-07:00.

לנוחיותכם, הדוחות מצורפים גם בשני העמודים האחרונים של הבחינה, כדי שתוכלו לתלוש עמודים אלו ולהשתמש בהם למענה על השאלות הבאות.

customer_id	priority	type	date	vrn_entry	vrn_exit	vrn_time	q_start	q_exit	q_time	outcome	ser_start	ser_exit	ser_time	server
23703994	1	PS	990801	09:12:53	09:12:58	5	09:12:58	09:13:42	44	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
57918849	1	NE	990801	09:12:59	09:13:05	6	09:13:05	09:16:58	233	AGENT	09:16:57	09:22:22	325	NAAMA
0	0	NW	990801	09:13:37	09:13:46	9	09:13:46	09:14:36	50	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
42477224	2	PS	990801	09:13:46	09:13:52	6	09:13:52	09:14:18	26	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
1382043	2	PS	990801	09:14:05	09:14:11	6	09:14:11	09:14:52	41	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
58273764	2	PS	990801	09:14:45	09:14:51	6	09:14:51	09:19:31	280	AGENT	09:19:30	09:20:50	80	ANAT
38345369	1	PS	990801	09:14:48	09:14:53	5	09:14:53	09:20:56	363	AGENT	09:20:55	09:22:06	71	ANAT
58641838	2	PS	990801	09:15:28	09:15:34	6	09:15:34	09:19:35	241	AGENT	09:19:35	09:30:17	642	DORIT
14264295	2	PS	990801	09:15:31	09:15:37	6	09:15:37	09:19:40	243	AGENT	09:19:39	09:22:05	146	AVI
67710418	2	PS	990801	09:15:46	09:15:53	7	09:15:53	09:22:29	396	AGENT	09:22:27	09:23:34	67	NAAMA
50270297	2	PS	990801	09:16:07	09:16:12	5	09:16:12	09:16:12	0	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
3968047	2	PS	990801	09:16:38	09:16:43	5	09:16:43	09:22:40	357	AGENT	09:22:39	09:27:26	287	AVNI
0	0	IN	990801	09:16:46	09:17:03	17	00:00:00	00:00:00	0	AGENT	09:17:03	09:35:51	1128	YIFAT
22761092	1	PS	990801	09:16:51	09:16:57	6	09:16:57	09:17:28	31	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
43329655	2	PS	990801	09:16:53	09:16:59	6	09:16:59	09:22:10	311	AGENT	09:22:08	09:23:54	106	AVI
52586328	1	PS	990801	09:17:01	09:17:07	6	09:17:07	09:17:28	21	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
22761092	1	NE	990801	09:18:02	09:18:07	5	09:18:07	09:23:59	352	AGENT	09:23:57	09:28:40	283	AVI
0	0	NW	990801	09:18:08	09:18:17	9	09:18:17	09:19:41	84	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
3267788	2	PS	990801	09:18:27	09:18:33	6	09:18:33	09:23:40	307	AGENT	09:23:38	09:29:07	329	NAAMA
29566940	1	PS	990801	09:18:39	09:18:44	5	09:18:44	09:26:52	488	AGENT	09:26:51	09:33:06	375	AVI
25165374	1	PS	990801	09:19:01	09:19:07	6	09:19:07	09:20:11	64	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
55476253	2	NE	990801	09:19:47	09:19:53	6	09:19:53	09:30:16	623	AGENT	09:30:01	09:34:18	257	YITZ
1161660	2	PS	990801	09:19:56	09:20:03	7	09:20:03	09:26:46	402	AGENT	09:26:44	09:30:16	212	VICKY
0	0	NW	990801	09:20:06	09:20:15	9	09:20:15	09:26:39	384	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
58886011	2	PS	990801	09:20:18	09:20:23	5	09:20:23	09:21:32	69	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
54042171	2	NE	990801	09:21:02	09:21:08	6	09:21:08	09:29:14	486	AGENT	09:29:13	09:35:19	366	NAAMA
0	0	NW	990801	09:21:40	09:21:50	10	09:21:50	09:30:57	547	AGENT	09:30:56	09:34:33	217	STEREN
1460617	2	PS	990801	09:21:47	09:21:53	6	09:21:53	09:27:33	340	AGENT	09:27:33	09:29:52	139	AVNI
28934784	2	PS	990801	09:21:59	09:22:04	5	09:22:04	09:26:06	242	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
0	0	IN	990801	09:22:25	09:22:34	9	09:22:34	09:22:51	17	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
34531269	1	PS	990801	09:22:29	09:22:35	6	09:22:35	09:24:42	127	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
0	0	NW	990801	09:22:49	09:22:58	9	09:22:58	09:23:27	29	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
306948266	2	PS	990801	09:23:02	09:23:08	6	09:23:08	09:26:54	166	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
53394052	2	PS	990801	09:23:15	09:23:21	6	09:23:21	09:30:28	427	AGENT	09:30:27	09:34:22	235	AVNI

time	Arr_sys	Dep_sys	Arr_q	Dep_q	Arr_ser	Dep_ser
09:00	189	174	150	140	137	132
09:01	190	177	151	144	138	132
09:02	195	179	156	145	139	134
09:03	197	183	158	150	142	136
09:04	198	184	158	151	143	137
09:05	201	186	162	153	145	139
09:06	204	189	165	155	145	140
09:07	206	193	167	160	148	142
09:08	207	195	167	162	149	143
09:09	214	199	174	164	149	145
09:10	214	199	175	166	151	145
09:11	215	200	176	167	151	145
09:12	217	204	178	170	152	147
09:13	226	206	186	172	153	148
09:14	228	212	189	178	154	149
09:15	231	217	192	183	155	150
09:16	234	220	195	187	159	153
09:17	239	223	199	190	161	155
09:18	240	225	200	192	162	155
09:19	244	225	204	192	162	155
09:20	247	228	206	196	165	157
09:21	249	230	209	198	166	158
09:22	253	232	212	200	167	159
09:23	256	237	216	204	170	163
09:24	265	240	225	207	172	165
09:25	267	244	227	211	172	165
09:26	270	247	229	214	173	165
09:27	274	254	233	221	175	167
09:28	279	257	238	224	176	168
09:29	281	260	239	227	176	168
09:30	286	267	245	232	177	171
09:31	292	270	251	237	182	174
09:32	297	274	256	241	183	175
09:33	303	276	262	243	183	175
09:34	307	286	266	253	186	178
09:35	313	294	272	261	191	183
09:36	321	301	278	267	193	186
09:37	324	307	282	273	196	189
09:38	328	309	287	275	196	189
09:39	332	314	290	281	199	191
09:40	338	322	297	288	202	195
09:41	345	325	304	292	204	196
09:42	347	327	305	294	206	198
09:43	349	332	307	298	209	202
09:44	353	336	311	302	212	205
09:45	357	341	316	307	215	208
09:46	359	345	318	310	217	211
09:47	365	346	323	312	218	211
09:48	369	350	328	314	218	213
09:49	371	354	330	320	222	215
09:50	376	357	335	324	224	216
09:51	380	364	338	329	228	222
09:52	381	370	340	336	231	224
09:53	385	371	343	336	231	225

1.2.1 הניחו כי לקוחות מקבלים שירות לפי מדיניות שירות First Come First Served. השתמשו במודל נוזלים כדי לאמוד את זמן ההמתנה לפני קבלת שירות של לקוח "וירטואלי" המגיע לתור ב- 09:20. לאחר מכן, השוו בין התוצאה שקיבלתם לבין זמני ההמתנה של לקוחות שהגיעו למערכת בסביבות 09:20. האם לדעתכם מודל הנוזלים מתאים לאמידת זמן ההמתנה של לקוח במערכת? אם לא, נסו להסביר מדוע.

תשובה: לפי מודל נוזלים, אמד לזמן ההמתנה של לקוח "וירטואלי" המגיע למערכת ב- 09:20 לפי עמודות Arr_q ו- Dep_q יהיה כ- 3.5 דקות. כעת נסתכל על נתוני לקוחות שהגיעו למערכת בין 09:19 ל- 09:21.

Arrival	type	Priority	Outcome	Waiting
09:19:07	PS	1	HANG	64
09:19:53	NE	2	AGENT	623
09:20:03	PS	2	AGENT	402
09:20:15	NW	0	HANG	384
09:20:23	PS	2	HANG	69
				308.4

ניתן לראות שזמני ההמתנה רחוקים מהערך שאמדנו (ממוצע: 308 שניות). מודל הנוזלים אינו מתאים מכיוון שחלק מהלקוחות נוטשים וכן קיום עדיפויות מפר קיום משטר FCFS.

1.2.2 נשים לב כי הנתונים אינם כוללים את מספר המוקדנים הנותנים שירות. הניחו כי רמת האיוש נשארת קבועה לאורך כל שעה והציעו גישה לאמידת מספר המוקדנים תוך שימוש בנתונים הקיימים. הסבירו. (אין צורך בחישובים)

תשובה: נציע 2 שיטות לאמידת רמת האיוש במוקד:

א. בכל שעה, נמצא את מספר הלקוחות המקסימלי שנמצאים בשירות בו-זמנית.

ב. מספר שמות המוקדנים הנותנים שירות במהלך השעה (לא ניקח בחשבון את הערך NO_SERVER).

1.2.3 אם ברשותכם היה דו"ח השיחות היומי המלא, כיצד תאמדו את ממוצע אורך השירות במהלך היום? הסבירו ופרטו את תשובתכם תוך שימוש בשמות עמודות הנתונים בהם אתם משתמשים.

תשובה: באמידת ממוצע אורך השירות אין לקחת בחשבון לקוחות שנטשו (HANG) ולכן יש לחשב ממוצע על פני עמודת ser_time ללא השיחות שאורכן 0 שניות.

1.2.4 הניחו שני סוגי ימים- "עמוס" ו-"לא עמוס". הניחו בנוסף שרמות האיוש בשני הימים זהות. נסמן ב- W_1 ו- W_2 את ממוצעי זמני ההמתנה ביום עמוס וביום לא עמוס בהתאמה; וב- W_1^+ ו- W_2^+ את ממוצעי זמני ההמתנה בהינתן המתנה.

מהו היחס בין $\frac{W_1}{W_2}$ ו- $\frac{W_1^+}{W_2^+}$ אותו תצפו לקבל? הסבירו.

תשובה:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{W_1^+}{W_2^+} \quad \text{א.}$$

$$\frac{W_1}{W_2} > \frac{W_1^+}{W_2^+} \quad \text{ב.}$$

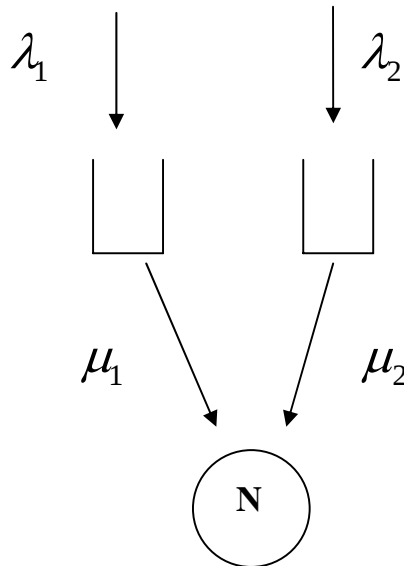
$$\frac{W_1}{W_2} < \frac{W_1^+}{W_2^+} \quad \text{ג.}$$

הסבר: נצפה ליחס $\frac{W_1}{W_2} > \frac{W_1^+}{W_2^+}$ מכיוון ש- $\frac{P_1\{Wait > 0\}}{P_2\{Wait > 0\}} > 1$. $\frac{W_1}{W_2} : \frac{W_1^+}{W_2^+} = \frac{P_1\{Wait > 0\}}{P_2\{Wait > 0\}}$.

שאלה 2 הרצאות / תרגולים / בחינות קודמות (13 נקודות)

חלק 1. מודל נוזלים

נתונה מערכת תורים בארכיטקטורת V, המתוארת בציור הבא:



הפרמטרים של מודל המערכת נתונים ע"י:

- ♦ λ_1 (λ_2) - קצבי מופע לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ μ_1 (μ_2) - קצבי שירות לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ N - מספר השרתים בתחנה

המערכת פועלת לפי מדיניות שהיא *preemptive*, ז"א ניתן בכל רגע להפסיק שירות של לקוח ולהחזירו להמתנה בתור מהסוג שלו, אבל אסור "לזרוק" לקוחות מהמערכת. בנוסף, המדיניות הינה *work conserving*, דהיינו, השרתים חייבים לשרת כאשר יש לקוחות בתור (ז"א לא ייתכן מצב שבו יש שרתים פנויים ובעת ובעונה אחת יש גם לקוחות הממתינים בתור).

לצורך בניית **מודל נוזלים** למערכת הנ"ל, נגדיר את המשתנים הבאים:

$X_1(t)$ = סה"כ מספר הלקוחות מסוג 1 במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

$X_2(t)$ = סה"כ מספר הלקוחות מסוג 2 במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

2.1.1 כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$, תחת ההנחה שהתחנה נותנת עדיפות ללקוחות מסוג 1.

תשובה:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = \lambda_1 - \mu_1(X_1 \wedge N)$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = \lambda_2 - \mu_2(X_2 \wedge (N - X_1)^+)$$

2.1.2 כתבו ביטוי למספר הכולל של הממתינים בתור בזמן t . (השתמשו ב- N , $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$).

תשובה:

$$(X_1(t) + X_2(t) - N)^+$$

כאלטרנטיבה לעדיפות הנ"ל ללקוחות מסוג 1, נגדיר מדיניות חדשה ששומרת על תורים שווים בשני הסוגים. ז"א, משרתים לקוחות מסוג 1 ומסוג 2 באופן שבכל רגע $0 \leq t$, מספר הממתינים בתור מסוג 1 שווה למספר הממתינים בתור של סוג 2.

2.1.3 כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$, תחת מדיניות אלטרנטיבית זו.

תשובה:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = \lambda_1 - \mu_1 \left(X_1 - \frac{1}{2}(X_1 + X_2 - N)^+ \right)$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = \lambda_2 - \mu_2 \left(X_2 - \frac{1}{2}(X_1 + X_2 - N)^+ \right)$$

2.1.4 תארו בקיצור איך ניתן, בעזרת גיליון אלקטרוני בלבד, לפתור בקירוב (מדויק ככל הנדרש) את המשוואות הדיפרנציאליות בסעיפים 2.1.1 ו-2.1.3.

תשובה:

נתחיל עם $X(0)$ נתון. לאחר מכן, עבור $t_n = t_{n-1} + \Delta$, $n = 1, 2, \dots$, נחשב, לדוגמה עבור סעיף 2.1.1,

$$X_1(t_n) = X_1(t_{n-1}) + \lambda_1 \Delta - \mu_1 (X_1(t_{n-1}) \wedge N) \Delta$$

$$X_2(t_n) = X_2(t_{n-1}) + \lambda_2 \Delta - \mu_2 (X_2(t_{n-1}) \wedge (N - X_1(t_{n-1})))^+ \Delta$$

ונקבל את $X(0), X(\Delta), X(2\Delta), \dots$. ככל ש- Δ קטן יותר, כך הקירוב מדויק יותר.

חלק 2. פונקצית סיכון (Hazard Rate)

2.2.1 עבור מ"מ X אי שלילי עם פונקצית התפלגות F_X ופונקצית צפיפות f_X , הגדירו את פונקצית הסיכון h_X . הסבירו בקיצור את משמעות $h_X(t)$, בזמן t כלשהו.

תשובה:

$$h_X(t) = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)}, \quad t \geq 0$$

הסבר: $h_X(t) \cdot \Delta \approx P\{X \leq t + \Delta \mid X > t\}$. כלומר, הסיכון הרגעי לחוות אירוע בזמן t בהינתן שעד זמן t לא התרחש אירוע.

נתונות N ריאליזציות (מדידות) של משתנה מקרי Z רציף וחיובי עם התפלגות לא ידועה. המטרה היא לאמוד את פונקצית הסיכון של Z על סמך מדידות אלו. נניח שכל המדידות שייכות לאינטרוול $[0, T]$. נחלק את הקטע $[0, T]$ לאינטרוולים קטנים באורך Δ כל אחד, ועבור כל אינטרוול קטן j , $(j = 1, 2, \dots)$ נגדיר:

- ♦ d_j - מספר המדידות שנפלו באינטרוול j ,
- ♦ r_{j-1} - סה"כ המדידות מתוך N , שלא שייכות ל- $j-1$ האינטרוולים הקודמים ($r_0 = 0$).

2.2.2 כתבו אמד לפונקצית הצפיפות (density) של Z באינטרוול j .

תשובה:

$$f_Z(t) = \frac{d_j}{n \cdot \Delta} \quad t \in \text{interval } j.$$

2.2.3 כתבו אמד לפונקצית השרידות (survival function) של Z באינטרוול j .

תשובה:

$$\bar{F}_Z(t) = \frac{r_{j-1} - \frac{1}{2}d_j}{n} \quad t \in \text{interval } j.$$

2.2.4 כתבו אמד לפונקצית הסיכון (hazard rate) של Z באינטרוול j .

תשובה:

$$h_Z(t) = \frac{d_j}{(r_{j-1} - \frac{1}{2}d_j) \cdot \Delta} \quad t \in \text{interval } j.$$

שאלה 3 יישום (15 נקודות)

חלק 1.

הטבלה הבאה הינה פלט מתוכנת 4CallCenters.

4CallCenters v2.23

FileTableSettingsHelp

Performance ProfilerStaffing QueryAdvanced ProfilingAdvanced QueriesWhat-if Analysis

Advanced Profiling

The **Advanced Profiling** tool allows you to enter multiple values for each of the input parameters, and produces of parameters.

ComputeAdd to TableDelete RowsClear AllExportImportGraphSettings

Input	60	00:00	List	03:00	6000				
Multi-Value			▼						
	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Agent's Occupancy	Average Speed of Answer	%Answer within Target	Average Queue Length
Results									
1	60.0	00:00.0	301.0	03:00.0	6,000.0	99.7%	02:47.5	6.9%	279.2
2	60.0	00:00.0	302.0	03:00.0	6,000.0	99.3%		13.5%	129.7
3									

3.1.1 לאיזו מערכת תורים מתאימה הטבלה הנתונה? רשמו את המודל המתמטי המתאים ואת ערכי הפרמטרים של המודל (אם יתכן יותר מערך אחד לפרמטר, רשמו את כל הערכים האפשריים).

תשובה:

$$M | M | N \quad (Erlang - C)$$

$$\lambda = 6000 \frac{\text{customers}}{\text{hour}} ; \mu = 20 \frac{\text{customers}}{\text{hour}} ; N = 301/302 \text{ agents} .$$

3.1.2 עם הנתונים של השורה השניה בטבלת 4CC הנ"ל, חשבו את ממוצע מספר הלקוחות במערכת (בתור ובשירות).

תשובה:

$$L = L_s + L_q = n\rho + L_q = 302 \cdot 0.993 + 129.7 = 429.58$$

3.1.3 באיזה תחום תפעולי מתפקדת המערכת (ED, QD, QED)? כתבו את כלל האיוש המתאים לתחום תפעולי זה וחשבו את ערך הפרמטר (QOS grade) בכלל האיוש.

תשובה:

ED – נצילות שרתים קרובה ל-100%, זמן המתנה בסדר גודל של משך שירות.

כלל האיוש: $\gamma > 0$, $N = R + \gamma$, באינטרוול הראשון $\gamma = 1$.

3.1.4 שחזרו את ערך תוחלת זמן ההמתנה באינטרוול השני.

רמז: במצב יציב מתקיים:

$$W_q | W_q > 0 \stackrel{d}{=} \exp \left(\text{mean} = E(S) \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right)$$

$$\rho = \frac{\lambda}{N\mu} \quad \text{כאשר}$$

תשובה:

$$\begin{aligned} E(W_q) &= E(W_q | W_q > 0) \cdot E_{2,N} = E(S) \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{1-\rho} \cdot E_{2,N} = \\ &= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{302 \cdot (1-0.993)} \cdot (1-0.135) = 0.0204 \text{ hour} = 1.22 \text{ minutes} \end{aligned}$$

3.1.5 העריכו מה תהיה תוחלת זמן ההמתנה אם נוסיף שרת נוסף למערכת (סה"כ 303 שרתים) כאשר שאר הפרמטרים נותרים קבועים? הסבירו את תשובתכם, תוך הסתמכות על נוסחאות מדויקות וקירוביהן.

תשובה:

לפי כלל האיוש בתחום ED במערכת Erlang-C, $N(1-\rho) = \gamma$ ולכן בתחום זה מתקיים $E(W_q) = E(S) \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot E_{2,N}$.
 נזכור כי תחת מדיניות ED, $P(W_q > 0) \approx 1$, ומכאן $E(W_q) \approx E(S) \cdot \frac{1}{\gamma}$. לכן, אם נגדיל את מספר השרתים ל-303
 ($\gamma = 3$) נקבל תוחלת זמן ההמתנה הקטנה (בערך) פי 3 מתוחלת משך השירות $\approx$ דקה.

חלק 2.

הטבלה הבאה הינה פלט מתוכנת 4CallCenters.

4CallCenters v2.23

FileTableSettingsHelp

Performance ProfilerStaffing QueryAdvanced ProfilingAdvanced QueriesWhat-if Analysis

Advanced Profiling

The **Advanced Profiling** tool allows you to enter multiple values for each of the input parameters, and produces a p of parameters.

Compute◆Add to TableDelete RowsClear AllExportImportGraph◆Settings

Input	60	00:00	140	03:00	3000	03:00				
Multi-Value										
	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Agent's Occupancy	%Abandon	Average Speed of Answer	%Answer within Target
Results										
1	60.0	00:00.0	140.0	03:00.0	3,000.0	03:00.0	99.0%	7.6%	00:13.8	19.7%
2										

3.2.1 חשבו את זמן ההמתנה הממוצע של לקוחות במערכת.

תשובה:

בתור Erlang-A

$$P\{Ab\} = \theta E(W_q)$$

$$\Rightarrow E(W_q) = 0.076 * 3 = 0.228 \text{ min.} = 13.68 \text{ sec.}$$

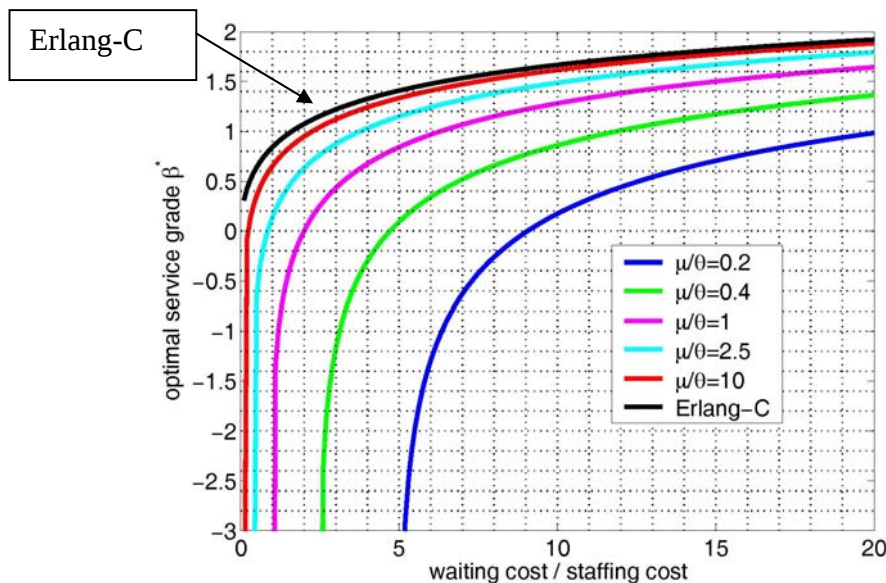
3.2.2 חשבו את זמן ההמתנה הממוצע של לקוחות שנטשו את המערכת.

תשובה:

$$E(W_q) = E(W_q | Ab)P\{Ab\} + E(W_q | Sr)P\{Sr\}$$

$$\Rightarrow E(W_q | Ab) = \frac{13.68 - 13.8 \cdot 0.924}{0.076} = 12.22 \text{ sec.} = 0.2 \text{ min.}$$

כפי שתואר בכיתה, ניתן לקבוע רמות איוש על סמך שיקולים כלכליים. לצורך זאת, פותחו מודלים מתמטיים שתוצרם בגרף הבא



בגרף זה ערכי ציר ה- X מתארים את היחס בין עלות המתנת לקוח בתור ליחידת זמן ובין עלות מוקדן ליחידת זמן

$$r = \frac{\text{delay cost}}{\text{staffing cost}}$$

וציר ה- Y מציין את ערכו האופטימלי של פרמטר רמת השירות β^* (המופיע בכלל השורש). כמו כן, כל אחת מהעקומות

בגרף מתאימה לערך אחר של היחס $\frac{\mu}{\theta}$.

בשאלות הבאות התייחסו לנתוני המערכת המופיעים בעמוד הקודם. נזכיר שממוצע קצב המופע שווה ל- 3000 מופעים לשעה, וממוצעי משך השירות ומשך הסבלנות שווים שניהם ל- 3 דקות. נניח בנוסף כי מוקדן מרוויח 45 ₪ לשעה ועלות דקת המתנה של לקוח מוערכת ב- 3 ₪. העזרו בגרף הנתון לעיל על מנת לענות על השאלות הבאות.

3.2.3 חשבו את רמת האיוש האופטימלית N^* המביאה למינימום את עלות תפעול המערכת.

תשובה:

בתור Erlang-A

$$\frac{\mu}{\theta} = 1, \frac{\text{waiting_cost}}{\text{staffing_cost}} = 4 \Rightarrow \beta^* = 0.65$$

$$\Rightarrow N^* = \left\lceil R + \beta^* \sqrt{R} \right\rceil = \left\lceil 150 + 0.65 \sqrt{150} \right\rceil = 158$$

3.2.4 הקו העליון של הגרף בעמוד הקודם מתאים למודל Erlang-C, המתאים לסבלנות אינסופית. הסבירו מדוע קו זה נמצא מעל כל הקווים המתאימים לסבלנות סופית.

תשובה:

במודל Erlang-C אין נטישות $\leq$ יותר המתנות, ולכן עבור כל ערך של יחס העלויות r יש לאייש את המוקד ביותר שרתים על מנת להשיג עלות מינימלית (ביחס למערכת עם לקוחות בעלי סבלנות סופית, כאשר שאר הפרמטרים זהים)

3.2.5 מהי עלות מוקדן שהחל ממנה $N^* = 0$? הסבירו.

תשובה:

ישתלם לאייש את המוקד המוקדנים כל עוד ממוצע עלות נטישה של הלקוח (=עלות ההמתנה עד לנטישה) גבוהה ממוצע עלות לשירות לקוח.

$$\frac{\text{waiting_cost} \cdot E(\tau)}{\text{staffing_cost} \cdot E(S)} > 1 \Rightarrow \frac{\text{waiting_cost}}{\text{staffing_cost}} > \frac{\mu}{\theta} = 1$$

$$\Rightarrow \text{staffing_cost} < \text{waiting_cost}$$

כלומר, כל עוד עלות מוקדן ליח' זמן נמוכה מעלות המתנת לקוח ליח' זמן ישתלם לאייש את המוקד.

במקרה שלנו, העלות שהחל ממנה $N^* = 0$ היא 3 ש"ל לדקה = 180 ש"ל לשעה.

חלק 3. איוש משמרות

מוקד טלפוני פתוח למתן שירות במשך 10 שעות ביום. על-ידי תחזיות של תהליך ההגעות וקצבי השירות, מחולק יום העבודה ל-3 חלקים, כאשר כל אחד מהם מאופיין ע"י קצב מופע ממוצע לשעה וממוצע זמן שירות. להלן טבלה המסכמת את קצבי המופע ומשכי השירות לאורך יום העבודה:

שעות פעילות	ממוצע קצב המופע (לקוחות לשעה) λ	ממוצע משך שירות
07:00-10:00	450	2 דקות
10:00-15:00	640	2.5 דקות
15:00-17:00	288	2 דקות

הניחו כי ניתן למדל את תהליך המופע כתהליך פואסון (עם קצב מופע קבוע כל שעה), משך השירות מפולג מעריכית וכי לקוחות לא נוטשים את המערכת.

3.3.1 נסמן ב- $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ את רמות האיוש המינימליות המבטיחות אחוז נענים מיידית של לפחות 50% (למשל, N_1 מתאים לשעה 07:00-08:00). העזרו בגרף המצורף בעמוד הבא בכדי לקבוע רמות איוש אלו לאורך היום.

תשובה:

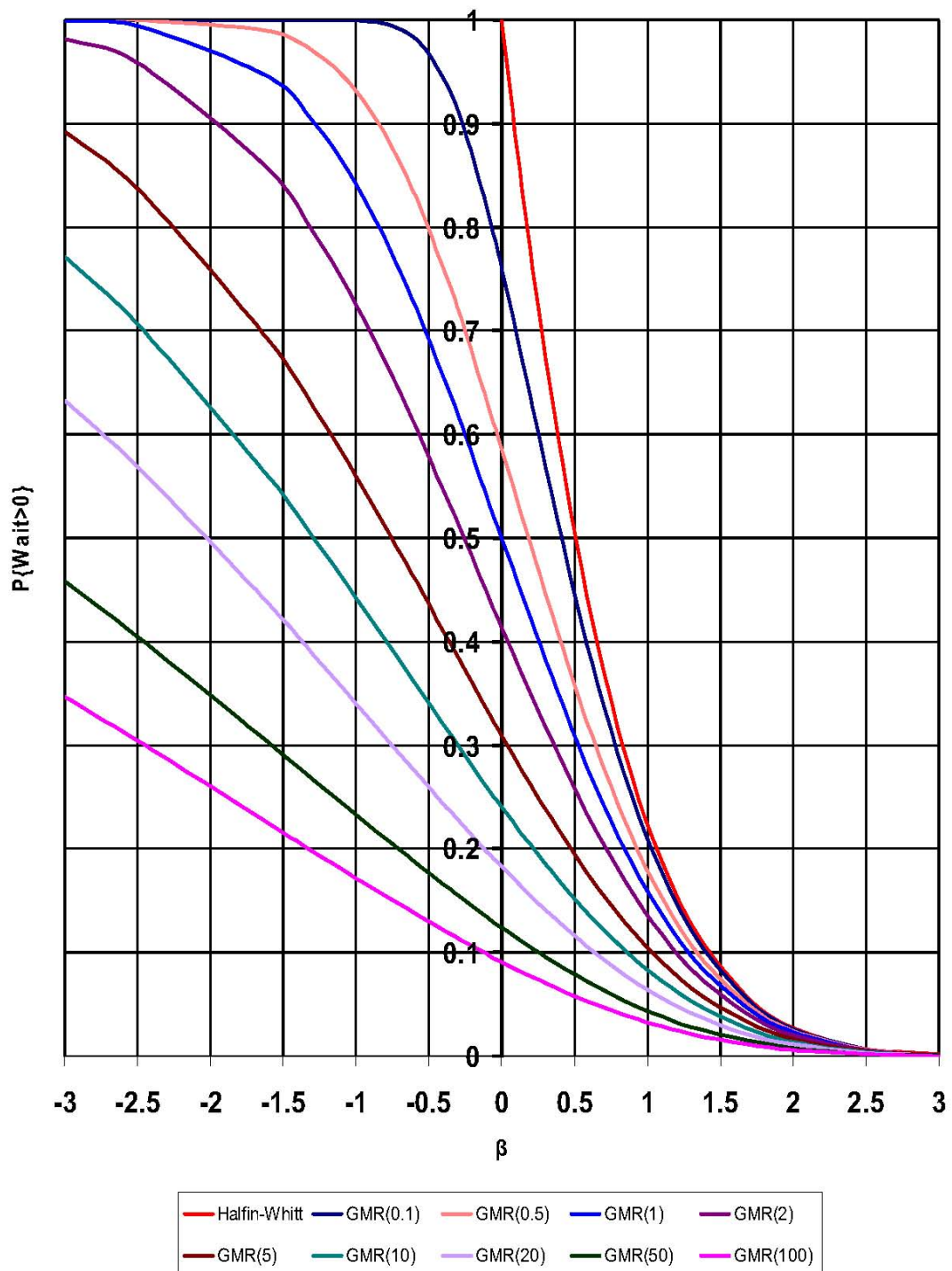
מדובר בתור Erlang-C ולכן על מנת להבטיח כי אחוז הממתינים לא יעלה על 50% נאייש לפי כלל השורש (QED) עם $\beta = 0.5$ (נקודת שבת), כלומר

$$N_1 = N_2 = N_3 = \left\lceil R_1 + 0.5\sqrt{R_1} \right\rceil = \left\lceil 15 + 0.5 \cdot \sqrt{15} \right\rceil = 17,$$

$$N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = \left\lceil R_2 + 0.5\sqrt{R_2} \right\rceil = \left\lceil 26.66 + 0.5 \cdot \sqrt{26.66} \right\rceil = 30,$$

$$N_9 = N_{10} = \left\lceil R_3 + 0.5\sqrt{R_3} \right\rceil = \left\lceil 9.6 + 0.5 \cdot \sqrt{9.6} \right\rceil = 12.$$

Erlang-A: $P\{\text{Wait} > 0\} = \alpha$ vs. β ($N = R + \beta\sqrt{R}$)



GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\frac{\theta}{\mu} = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

מנהלת המוקד מעוניינת להשיג רמת שירות כמתואר בשאלה הקודמת, אך קיימת הבעיה שלא ניתן להזמין מוקדנים רק לחלק מיום העבודה. את המשמרות האפשריות במוקד ניתן לתאר באופן הבא: משמרת חדשה מגיעה למוקד פעם בשעתיים החל מ- 07:00 ומוקדן במשמרת נותן שירות במהלך 3 השעות הראשונות של המשמרת, לאחר מכן יוצא להפסקה של שעה ואחריה חוזר לשעתיים נוספות של מתן שירות. נסמן עלות מוקדן במשמרת ה- j - ית ב - C_j . על המנהלת לכסות את 10 שעות פעילות המוקד. הינכם מתבקשים לעזור למנהלת לקבוע את רמת האיוש האופטימלית למשמרת תחת האילוצים הנ"ל, וכפי שנלמד בכיתה.

3.3.2 הגדירו מטריצה $A = [a_{ij}]$ המתארת את המשמרות האפשריות (ז"א הגדירו את אברי המטריצה a_{ij}).

תשובה:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if an agent working according to schedule } j \text{ is available during interval } i; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3.3 נסחו בעיית תכנות בשלמים, שפתרונה נותן איוש אופטימלי למשמרת עבור כל המשמרות האפשריות, דהיינו במטרה להביא למינימום את עלות האיוש היומית של המוקד.

תשובה:

משתני ההחלטה: X_j - מספר המוקדנים במשמרת ה- j .

$$\min \sum_{j=1}^4 C_j X_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} X_j \geq N_i \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$X_j \geq 0 \text{ integer}$$

נסמן ב- R_i את העומס המוצע על המערכת בשעה ה- i וב- N_i^* את מספר המוקדנים בשעה ה- i , הנובע מפתרון בעיית התכנות בשלמים, $i=1,2,\dots,10$. נזכור עוד כי סימנו ב- N_i את מספר המוקדנים המינימלי המבטיח אחוז ממתנינים שלא עולה על 50%, $i=1,2,\dots,10$.

3.3.4 קבעו מהו היחס בין זוגות המשתנים. הסבירו בקצרה.

תשובה:

• $R_i \square N_i$

בחרו ביחס המתאים: **א.** $>$ **ב.** $\geq$ **ג.** $=$ **ד.** $\leq$ **ה.** $<$ **ו.** לא ניתן לקבוע בוודאות

הסבר: מכלל השורש עם $\beta = 0.5 > 0$.

• $N_i \square N_i^*$

בחרו ביחס המתאים: **א.** $>$ **ב.** $\geq$ **ג.** $=$ **ד.** $\leq$ **ה.** $<$ **ו.** לא ניתן לקבוע בוודאות

הסבר: N_i^* התקבל תוך כדי התחשבות באילוץ זה - קודם נקבע הערך N_i ולאחר מכן נקבעו רמות האיוש של המשמרות תוך כדי האילוץ כי בכל שעה יאויש המוקד לפחות ב- N_i מוקדנים.

הניחו כעת כי קיימות נטישות מהמוקד וכי משך סבלנות של לקוח מפולג מעריכית עם פרמטר θ כלשהו.

3.3.5 חיזרו פתרו את שאלה 3.3.4 תחת הנחות אלו.

תשובה:

$$R_i \square N_i \bullet$$

בחרו ביחס המתאים: א. $>$ ב. $\geq$ ג. $=$ ד. $\leq$ ה. $<$ ו. לא ניתן לקבוע בוודאות

הסבר: כעת זהו תור Erlang-A. מהגרף שבעמוד 19 ניתן לראות כי עבור $\theta = \mu$ נקבל שיוויון, עבור $\theta < \mu$ נקבל את היחס " $<$ " ועבור $\theta > \mu$ נקבל את היחס " $>$ ".

$$N_i \square N_i^* \bullet$$

בחרו ביחס המתאים: א. $>$ ב. $\geq$ ג. $=$ ד. $\leq$ ה. $<$ ו. לא ניתן לקבוע בוודאות

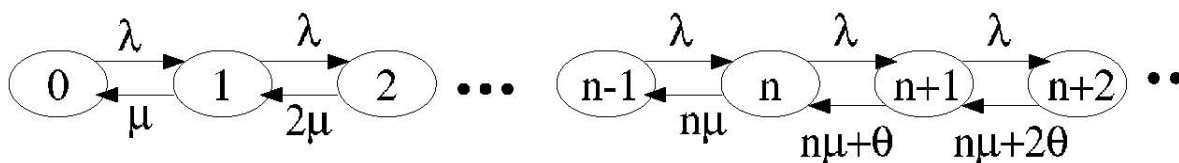
הסבר: N_i^* התקבל תוך כדי התחשבות באילוץ זה - קודם נקבע הערך N_i ולאחר מכן נקבעו רמות האיוש של המשמרות תוך כדי האילוץ כי בכל שעה יאויש המוקד לפחות ב- N_i מוקדנים.

שאלה 4 תיאוריה (10 נקודות)

נניח מודל Erlang-A עם פרמטרים N, θ, μ, λ , המתאר מערכת שירות. נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t . אזי $L = \{L(t), t \geq 0\}$ הוא תהליך לידה ומוות.

4.1 ציירו את דיאגרמת קצבי המעבר של L .

תשובה:



4.2 נניח שמופע מוצא את כל השרתים עסוקים, ובנוסף ממתניים 10 לקוחות בתור. נניח שמופע זה "מצוייד" בסבלנות אינסופית. תארו בדיוק רב ככל שתוכלו, את התפלגות זמן ההמתנה של מופע זה; דהיינו, משך הזמן עד שהמופע יכנס לשירות.

תשובה:

לפני כניסתו לשירות על המופע הנ"ל להמתין את משך הזמן שיעבור עד ש-11 לקוחות יעזבו את המערכת (לאחר שירות או ע"י נטישה):

$$V = \sum_{i=0}^{10} \exp(N\mu + i \cdot \theta)$$

4.3 נניח שמופע מוצא את כל השרתים עסוקים, ובנוסף ממתנינים j לקוחות בתור ($0 \leq j$). נניח שללקוח זה סבלנות סופית המתפלגת $\exp(\theta)$. נסמן ב- $P_j\{Sr\}$ את ההסתברות שהלקוח יקבל שירות. הוכיחו

$$P_j\{Sr\} = \frac{n\mu}{n\mu + (j+1)\theta}, \quad j \geq 0.$$

תשובה:

נוכיח באינדוקציה:

נשתמש בתכונת חוסר הזיכרון של ההתפלגות המעריכית ונקבל כי

$$P_0\{Sr\} = \frac{n\mu}{n\mu + \theta}$$

נניח כי הנ"ל מתקיים עבור $j-1$, ונוכיח באינדוקציה כי מתקיים עבור j .

$$\begin{aligned} P_j\{Sr\} &= \frac{n\mu + j\theta}{n\mu + (j+1)\theta} \times P_{j-1}\{Sr\} = \frac{n\mu + j\theta}{n\mu + (j+1)\theta} \times \frac{n\mu}{n\mu + j\theta} \\ &= \frac{n\mu}{n\mu + (j+1)\theta}, \quad j \geq 0. \end{aligned}$$

כאשר המעבר השני הוא לפי הנחת האינדוקציה.
מש"ל.

4.4 נניח ש- $\mu = \theta$. השתמשו במקרה פרטי זה כדי להסביר לסטודנט שלמד הסתברות ומודלים סטוכסטיים את

הסיבה שכלל האיוש $N = \lceil \lambda / \mu \rceil$ מביא לכך שכ- 50% מהמופעים מקבל שירות מיידית.

רמז: ההתפלגות הסטציונארית של מודל $M | M | \infty$ היא פואסונית.

תשובה:

במקרה ש- $\mu = \theta$, התפלגות מספר הלקוחות בתור Erlang-A זהה להתפלגות מספר הלקוחות בתור $M | M | \infty$ עם

קצב מופע λ וקצב שירות μ , כאשר התפלגות מספר הלקוחות בתור $M | M | \infty$ היא $Poisson(R = \lambda / \mu)$.

מהחוק החזק של המספרים הגדולים, עבור R מספיק גדול, ניתן לקרב את ההתפלגות $Poisson(R)$ על-ידי התפלגות $Normal(R, R)$. ומכאן,

$$\begin{aligned} P(W_q = 0) &\stackrel{PASTA}{=} P(L \leq R) = P\left(\frac{L - R}{\sqrt{R}} \leq \frac{R - R}{\sqrt{R}}\right) \approx \\ &= P(N(0,1) \leq 0) = 0.5 \end{aligned}$$

customer_id	priority	type	date	vr_u_entry	vr_u_exit	vr_u_time	q_start	q_exit	q_time	outcome	ser_start	ser_exit	ser_time	server
23703994	1	PS	990801	09:12:53	09:12:58	5	09:12:58	09:13:42	44	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
57918849	1	NE	990801	09:12:59	09:13:05	6	09:13:05	09:16:58	233	AGENT	09:16:57	09:22:22	325	NAAMA
0	0	NW	990801	09:13:37	09:13:46	9	09:13:46	09:14:36	50	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
42477224	2	PS	990801	09:13:46	09:13:52	6	09:13:52	09:14:18	26	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
1382043	2	PS	990801	09:14:05	09:14:11	6	09:14:11	09:14:52	41	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
58273764	2	PS	990801	09:14:45	09:14:51	6	09:14:51	09:19:31	280	AGENT	09:19:30	09:20:50	80	ANAT
38345369	1	PS	990801	09:14:48	09:14:53	5	09:14:53	09:20:56	363	AGENT	09:20:55	09:22:06	71	ANAT
58641838	2	PS	990801	09:15:28	09:15:34	6	09:15:34	09:19:35	241	AGENT	09:19:35	09:30:17	642	DORIT
14264295	2	PS	990801	09:15:31	09:15:37	6	09:15:37	09:19:40	243	AGENT	09:19:39	09:22:05	146	AVI
67710418	2	PS	990801	09:15:46	09:15:53	7	09:15:53	09:22:29	396	AGENT	09:22:27	09:23:34	67	NAAMA
50270297	2	PS	990801	09:16:07	09:16:12	5	09:16:12	09:16:12	0	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
3968047	2	PS	990801	09:16:38	09:16:43	5	09:16:43	09:22:40	357	AGENT	09:22:39	09:27:26	287	AVNI
0	0	IN	990801	09:16:46	09:17:03	17	00:00:00	00:00:00	0	AGENT	09:17:03	09:35:51	1128	YIFAT
22761092	1	PS	990801	09:16:51	09:16:57	6	09:16:57	09:17:28	31	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
43329655	2	PS	990801	09:16:53	09:16:59	6	09:16:59	09:22:10	311	AGENT	09:22:08	09:23:54	106	AVI
52586328	1	PS	990801	09:17:01	09:17:07	6	09:17:07	09:17:28	21	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
22761092	1	NE	990801	09:18:02	09:18:07	5	09:18:07	09:23:59	352	AGENT	09:23:57	09:28:40	283	AVI
0	0	NW	990801	09:18:08	09:18:17	9	09:18:17	09:19:41	84	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
3267788	2	PS	990801	09:18:27	09:18:33	6	09:18:33	09:23:40	307	AGENT	09:23:38	09:29:07	329	NAAMA
29566940	1	PS	990801	09:18:39	09:18:44	5	09:18:44	09:26:52	488	AGENT	09:26:51	09:33:06	375	AVI
25165374	1	PS	990801	09:19:01	09:19:07	6	09:19:07	09:20:11	64	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
55476253	2	NE	990801	09:19:47	09:19:53	6	09:19:53	09:30:16	623	AGENT	09:30:01	09:34:18	257	YITZ
1161660	2	PS	990801	09:19:56	09:20:03	7	09:20:03	09:26:45	402	AGENT	09:26:44	09:30:16	212	VICKY
0	0	NW	990801	09:20:06	09:20:15	9	09:20:15	09:26:39	384	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
58886011	2	PS	990801	09:20:18	09:20:23	5	09:20:23	09:21:32	69	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
54042171	2	NE	990801	09:21:02	09:21:08	6	09:21:08	09:29:14	486	AGENT	09:29:13	09:35:19	366	NAAMA
0	0	NW	990801	09:21:40	09:21:50	10	09:21:50	09:30:57	547	AGENT	09:30:56	09:34:33	217	STEREN
1460617	2	PS	990801	09:21:47	09:21:53	6	09:21:53	09:27:33	340	AGENT	09:27:33	09:29:52	139	AVNI
28934784	2	PS	990801	09:21:59	09:22:04	5	09:22:04	09:26:06	242	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
0	0	IN	990801	09:22:25	09:22:34	9	09:22:34	09:22:51	17	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
34531269	1	PS	990801	09:22:29	09:22:35	6	09:22:35	09:24:42	127	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
0	0	NW	990801	09:22:49	09:22:58	9	09:22:58	09:23:27	29	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
306948266	2	PS	990801	09:23:02	09:23:08	6	09:23:08	09:25:54	166	HANG	00:00:00	00:00:00	0	NO SERVER
53394052	2	PS	990801	09:23:15	09:23:21	6	09:23:21	09:30:28	427	AGENT	09:30:27	09:34:22	235	AVNI

time	Arr_sys	Dep_sys	Arr_q	Dep_q	Arr_ser	Dep_ser
09:00	189	174	150	140	137	132
09:01	190	177	151	144	138	132
09:02	195	179	156	145	139	134
09:03	197	183	158	150	142	136
09:04	198	184	158	151	143	137
09:05	201	186	162	153	145	139
09:06	204	189	165	155	145	140
09:07	206	193	167	160	148	142
09:08	207	195	167	162	149	143
09:09	214	199	174	164	149	145
09:10	214	199	175	166	151	145
09:11	215	200	176	167	151	145
09:12	217	204	178	170	152	147
09:13	226	206	186	172	153	148
09:14	228	212	189	178	154	149
09:15	231	217	192	183	155	150
09:16	234	220	195	187	159	153
09:17	239	223	199	190	161	155
09:18	240	225	200	192	162	155
09:19	244	225	204	192	162	155
09:20	247	228	206	196	165	157
09:21	249	230	209	198	166	158
09:22	253	232	212	200	167	159
09:23	256	237	216	204	170	163
09:24	265	240	225	207	172	165
09:25	267	244	227	211	172	165
09:26	270	247	229	214	173	165
09:27	274	254	233	221	175	167
09:28	279	257	238	224	176	168
09:29	281	260	239	227	176	168
09:30	286	267	245	232	177	171
09:31	292	270	251	237	182	174
09:32	297	274	256	241	183	175
09:33	303	276	262	243	183	175
09:34	307	286	266	253	186	178
09:35	313	294	272	261	191	183
09:36	321	301	278	267	193	186
09:37	324	307	282	273	196	189
09:38	328	309	287	275	196	189
09:39	332	314	290	281	199	191
09:40	338	322	297	288	202	195
09:41	345	325	304	292	204	196
09:42	347	327	305	294	206	198
09:43	349	332	307	298	209	202
09:44	353	336	311	302	212	205
09:45	357	341	316	307	215	208
09:46	359	345	318	310	217	211
09:47	365	346	323	312	218	211
09:48	369	350	328	314	218	213
09:49	371	354	330	320	222	215
09:50	376	357	335	324	224	216
09:51	380	364	338	329	228	222
09:52	381	370	340	336	231	224
09:53	385	371	343	336	231	225