



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגל: ד"ר סרגיי זלטיין

תאריך הבחינה: 25.02.2007

פתרון

מס' תלמיד _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות - 096324

מועד א' - סמסטר חורף תשס"ז 2007

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור, וללא מחשבון.
- המבחן כולל 19 עמודים, כולל עמוד זה.
- ניתן להשאיר תשובות מספריות ללא חישובן הסופי, או לעגל חישובים באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

ניקוד: שאלה 1	_____ מתוך 10 נקודות	הרצאות/תרגולים
שאלה 2	_____ מתוך 10 נקודות	תרגילי בית
שאלה 3	_____ מתוך 15 נקודות	יישום
שאלה 4	_____ מתוך 10 נקודות	תיאוריה

סה"כ _____ מתוך 45 נקודות

בהצלחה!

שאלה 1 הרצאות\תרגולים (10 נקודות)

חלק 1. מופעים למערכת שירות

1.1 להלן מתוארים מופעים למוקד שירות טלפוני בארץ, בימים שונים של השבוע: הגרף הראשון מתאר מספר מופעים לחצי שעה והשני את מספר מופעים זה ביחס לממוצע היוםי (באחוזים). בהנחה שהמופע למוקד הוא פואסון לא הומוגני

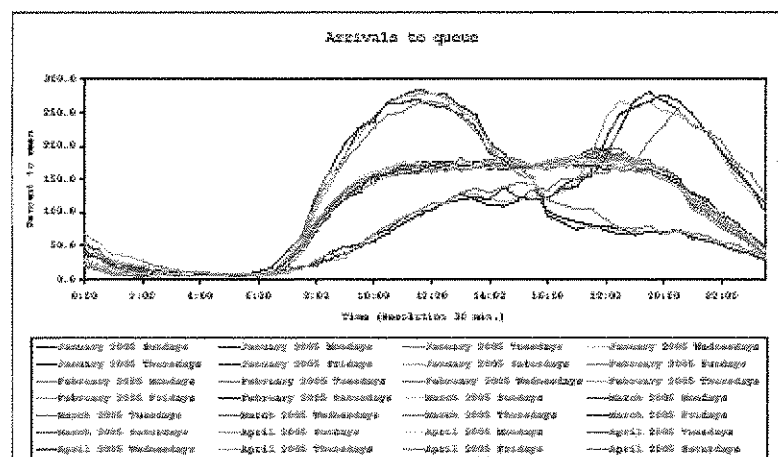
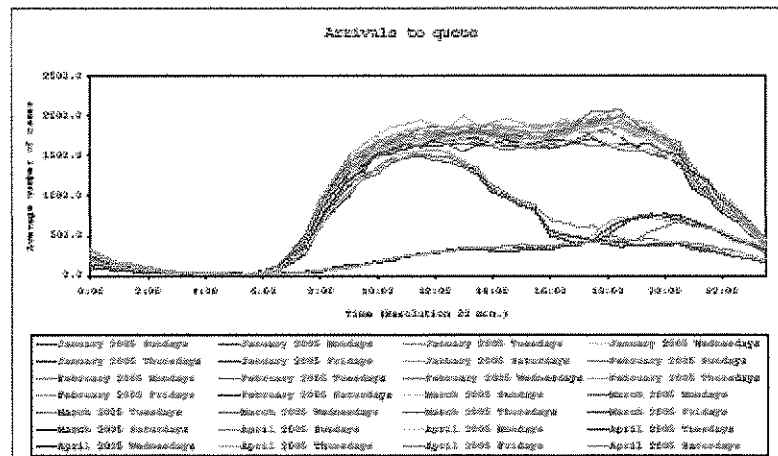
בזמן, באיזה מודל מתמטי לקצב המופע $\lambda(t)$ הייתם ממליצים להשתמש, ובאיזה שיטות הייתם חוזים אותו?

7epo, $\lambda(t) = C \lambda_{q_0}(t)$ definiert eine p3'dMN 1/c.

הנ"ל - מספר מופעים ב'ר' מ'ס' ופונקציה $\lambda_{\%}(f)$ ד"ר
 עם המופעים שנה ד"ר, 'נ'ש' ופונקציות.
 'ע'ות מתוך פונקציות ע'מית ד"ר עם C.
 כ'ר' ע'מית במצב פ' פונקציה ד"ר כ'ר' פונקציה $\lambda_{\%}(f)$

Arrival Patterns. Israeli Telecom. 2005

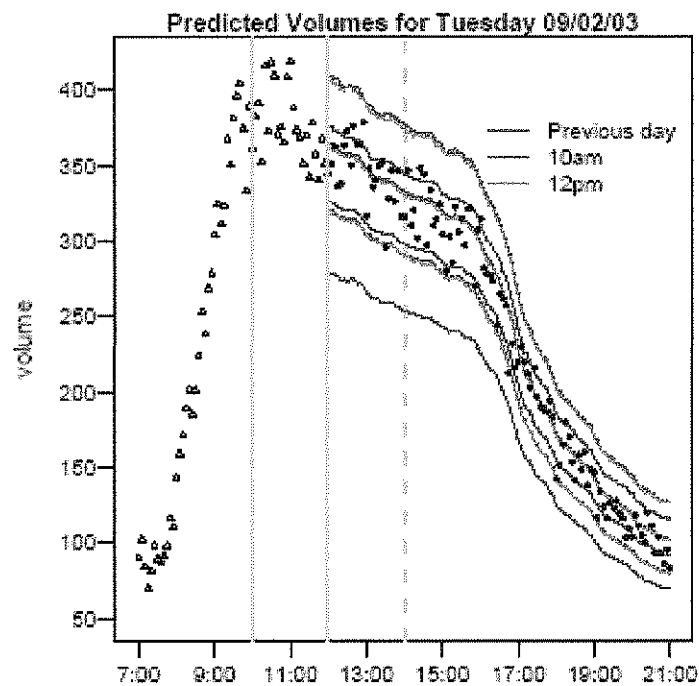
Arrival Patterns, Israeli Telecom, 2005



1.2 להלן מתוארים שלשה ניסיונות לחזות קצב מופע למוקד שירות טלפוני בארה"ב. התחזית היא למספר המופעים החל משעה 12:00. הנקודות מתארות את המספר האמיתי. סכמו בקצרה את המסקנות העיקריות הנובעות מדוגמה זו.

• נתון מהבוקר מאפשר לשפר סיכוי
 של הא'ל' בפרק מנחות (פ'הם קמח'ל)
 (א' מא'ם ז'ר יל' ק'פ)
 • אין הבדל מנחות ב'ן תח' ו'ת ע'ס סמך
 • 12am ק'פ ק'פ ק'פ ק'פ

Comparison between Day-Ahead and Within-Day Predictions (Weinberg, Brown, Stroud, 2005)



חלק 2. משכי שירות

1.3 הגדירו יחס סדר סטוכסטי בין שני משתנים מקריים X ו- Y . (לצורך ההגדרה, השתמשו בסימונים F_x ו- F_y עבור

פונקציות ההתפלגות של X ו- Y בהתאמה.)

הגדרה:

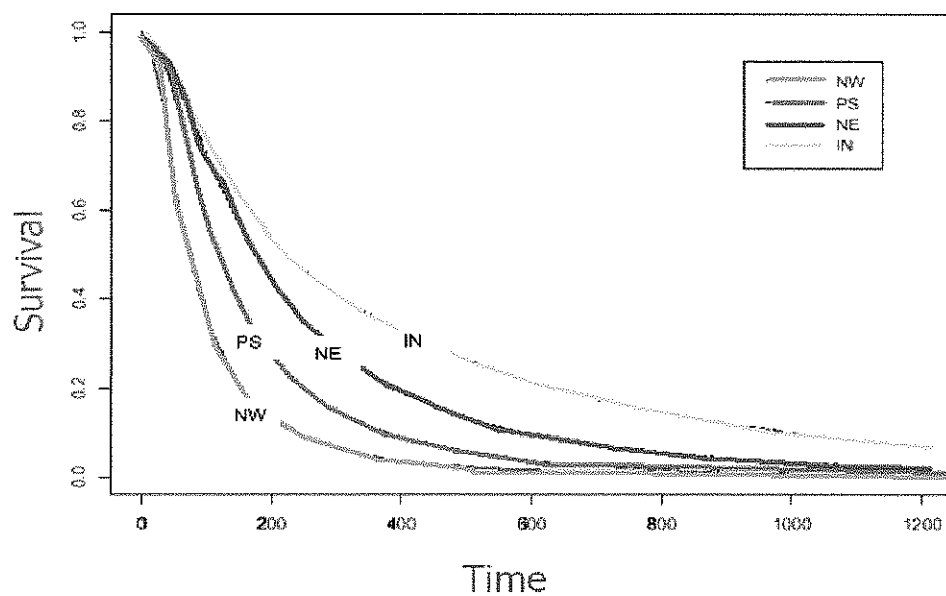
משתנה מקרי X עקום סטוכסטי ממנה
מקרי Y אם מתקיים $F_x(t) \geq F_y(t)$ לכל t בסך
 $F = 1 - F$ - פונקציה ח' קלות. (survival)

1.4 הגרף הבא מתאר את פונקציית ההישרדות (survival function) של משך השירות, עבור כל אחד מארבעת סוגי

השירות במוקד שהכרנו בקורס.

Service Time

Survival curve, by Types



נסמן ב- T_{PS} משתנה מקרי בעל התפלגות משך השירות של לקוחות מסוג PS (פעילות שוטפת) וב- T_{NE} התפלגות משך השירות של לקוחות מסוג NE (חדשים).
 מי גדול יותר: $E[T_{PS}]$ או $E[T_{NE}]$? נמקו במדויק, תוך ציטוט העובדות המתמטיות בהן אתם משתמשים.

תשובה:

$$E(T_{NE}) > E(T_{PS})$$

נימוק:

מהתמונה אלו רואים $\bar{F}_{NE} > \bar{F}_{PS}$ e
 אדם מקבל ח'ב' ז' מתק"פ ע'ו"י
 $E(Z) = \int_0^\infty \bar{F}_Z(t) dt$ (משפט השני)

חלק 3. סבלנות

1.5 בכיתה הוסבר שאמד לממוצע הסבלנות של לקוח, המבוסס על נתונים קטומים (מצונזרים) ניתן על ידי

$$\text{ממוצע הסבלנות} = \frac{\text{סך הכל זמן ההמתנה (של משורתיים או נושעים)}}{\text{מספר הנושעים}}$$

הסבירו כיצד ניתן להסיק מהאמד הנ"ל את ההצגה:

$$\begin{array}{l} \text{ממוצע הסבלנות} = \text{ממוצע זמן ההמתנה} + \text{ממוצע זמן ההמתנה} \times \text{אינדקס הסבלנות} \\ \text{של נושעים} \quad \text{של משורתיים} \end{array}$$

עבור הסברכם, הגדירו במדויק את אינדקס הסבלנות.

הגדרת אינדקס הסבלנות:

$$\frac{\text{מספר משורתיים}}{\text{מספר הנושעים}}$$

הסבר:

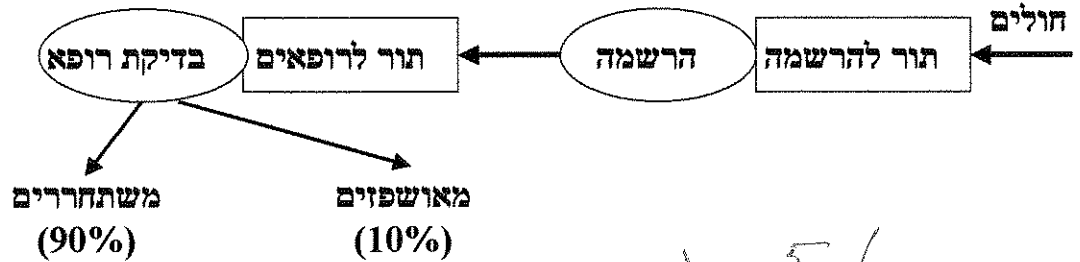
$$\frac{\text{סה"כ זמן המתנה (של משורתיים או נושעים)}}{\text{מספר הנושעים}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{זמן המתנה של נושעים}}{\text{מס' הנושעים}} + \frac{\text{זמן המתנה של משורתיים}}{\text{מס' הנושעים}} \times \frac{\text{מס' משורתיים}}{\text{מס' הנושעים}} \\ &= \frac{\text{זמן המתנה של נושעים}}{\text{מס' הנושעים}} + \frac{\text{זמן המתנה של משורתיים}}{\text{מס' משורתיים}} \times \frac{\text{מס' משורתיים}}{\text{מס' הנושעים}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{ממוצע זמן המתנה של נושעים}}{\text{ממוצע מס' הנושעים}} + \frac{\text{ממוצע זמן המתנה של משורתיים}}{\text{ממוצע מס' משורתיים}} \times \frac{\text{ממוצע מס' משורתיים}}{\text{ממוצע מס' הנושעים}}$$

שאלה 2 תרגילי בית (10 נקודות)

חולים הפונים לחדר מיון בבית חולים מסוים עוברים תהליך של **בדיקה ראשונית**. בסופו של התהליך, רופא בודק וממין את החולים. חלק מהחולים **מאושפזים** בבית-החולים וחלק מקבלים טיפול והוראות להמשכו (למשל מרשמים) ואז **משתחררים**. מדידות מראות שבממוצע 50 חולים פונים בשעה לחדר המיון ו-10% מהם מאושפזים. בממוצע, 30 חולים ממתנים **בתור להרשמה** לבדיקה הראשונית ו-40 חולים ממתנים **בתור לרופאים** לבדיקה אחרי ההרשמה. תהליך ההרשמה של חולה נמשך 2 דקות בממוצע. חולים משתחררים נמצאים בממוצע 5 דקות אצל רופא ואלה המאושפזים נבדקים ע"י הרופא בממוצע 30 דקות.



$$\lambda = \frac{5}{6} \text{ דקות}$$

2.1 כמה חולים בממוצע נמצאים בבדיקה אצל הרופאים?

1- תור בחדר מיון: 50 חולים
2- תור לרופאים: 40 חולים
3- תור להרשמה: 30 חולים
4- בדיקת רופא: 10 חולים

$$W_1 = \frac{L_1}{\lambda} = \frac{30}{5/6} = 36$$

$$L_2 = \lambda \cdot W_2 = \frac{10}{6}$$

$$W_3 = \frac{L_3}{\lambda} = \frac{40}{5/6} = 48$$

$$W_4 = 5 \cdot 90\% + 30 \cdot 10\% = 7.5$$

2.2 כמה זמן בממוצע נמצא חולה בחדר המיון?

$$L_4 = \lambda \cdot W_4 = \frac{5}{6} \cdot 7.5 = 6.25$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 36 + 2 + 48 + 7.5 = 93.5$$

2.3 מה מספר החולים הממוצע בחדר המיון?

$$L = \lambda \cdot W = \frac{5}{6} \cdot 93.5 = 77.9$$

מנהל בית החולים החליט לשנות את תהליך הטיפול בחדר המיון. תהליך ההרשמה יופעל באותה אופן כקודם. אחרי ההרשמה, יעברו חולים בדיקה אצל אחיות שמסווגות אותם למשתחררים פוטנציאליים (המקבלים הוראות וטיפול ולא מאושפדים) או למאושפדים פוטנציאליים. אחר כך, שני סוגי החולים מחכים בתורים נפרדים לקראת בדיקת רופא. מתכנני המערכת מעריכים שבדיקת אחות תיקח 3 דקות. הם גם מעריכים ש-20 חולים ימתינו בתור להרשמה ו-5 חולים ימתינו בתור לאחות. בנוסף, תור המשתחררים הפוטנציאליים לקראת בדיקת רופא יהיה כ-15 חולים בממוצע ותור המאושפדים הפוטנציאליים יהיה רק חולה אחד. משכי בדיקת רופא הם, כקודם, 5 דקות למשתחררים פוטנציאליים ו-30 דקות למאושפדים פוטנציאליים, בממוצע. נניח שאחיות המיון לא עושות טעויות וממינות 100% של החולים בצורה נכונה. כקודם, 50 פונים למיון בממוצע לשעה, 90% מהחולים משתחררים ו-10% מאושפדים.

2.4 תחת התכנון החדש, כמה זמן בממוצע ישהה חולה בחדר המיון?

$$L_1 = 20, W_1 = \frac{L_1}{\lambda} = 29 \text{ מ"פ}$$

$$W_2 = 2, L_2 = \lambda \cdot W_2 = 10/6$$

$$L_3 = 5, W_3 = \frac{L_3}{\lambda} = 11.7 \text{ מ"פ}$$

$$W_4 = 3, L_4 = \lambda \cdot W_4 = 2.5$$

$$L_5 = 15 + 1 = 16, W_5 = \lambda \cdot W_5 = \frac{L_5}{\lambda} = 19.2 \text{ מ"פ}$$

$$W_6 = 7.5 \text{ מ"פ}$$

8 כלי נציג 6 נכנסים
1- תור הרשמה
2- תור אחות
3- תור הרשמה
4- תור רופא
5- תור רופא
6- תור רופא

2.5 כמה זמן בממוצע ישהו מאושפדים פוטנציאליים בחדר המיון?

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 = 11.7 \text{ מ"פ}$$

$$W_{5, \text{פוטנציאלי}} = \frac{L_{\text{פוטנציאלי}}}{\lambda_{\text{פוטנציאלי}}} = \frac{1}{5/6 \cdot 10\%} = 12 \text{ מ"פ}$$

$$W_{6, \text{פוטנציאלי}} = 30 \text{ מ"פ}$$

$$W_{\text{פוטנציאלי}} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_{5, \text{פוטנציאלי}} + W_{6, \text{פוטנציאלי}} = 77 \text{ מ"פ}$$

2.6 כמה חולים בממוצע יהיו סה"כ בחדר המיון?

$$L = \lambda \cdot W = \frac{5}{6} \cdot 61.7 = 51.4$$

2.7 מהו מספר הפקידים המינימלי בעמדת ההרשמה שיאפשר מצב שבו נצילותם לא תעלה על 80%.

$$R = \lambda \cdot E[S] = \frac{5}{6} \cdot 2 = \frac{10}{6}$$

$\boxed{h=3}$ מס' פקידים מינימלי הוא

$$\frac{R}{h} = \frac{5}{9} \quad \text{מיליון}$$

2.8 מהו מספר הרופאים המינימלי שנדרש כדי להבטיח את יציבות המערכת?

$$R_{\text{מחזורי}} = \lambda \cdot 90\% \cdot 5 = 3.75$$

צריכים 4 יחידות

$$R_{\text{דשדש}} = \lambda \cdot 10\% \cdot 30 = 2.5$$

צריכים 3 יחידות

$\boxed{7}$ סה"כ צריכים 7 יחידות

שאלה 3 יישום (15 נקודות)

חלק 1. ניתוח ראשוני של דו"ח ACD.

להלן נתון חלק של דו"ח ACD ממוקד שירות טלפוני בארץ. (משכי זמן מוצגים בשניות).

Time Interval	Arrivals	Service Time	Agents	Average Wait	%Abandon	% Wait=0
07:00-07:30	81	190.4	12.1	1.7	0.00	92.59
07:30-08:00	162	134.8	17.6	0.6	0.62	98.14
08:00-08:30	302	167.7	27.6	3.2	0.66	78.00
08:30-09:00	362	164.3	33.1	20.7	1.66	45.22
09:00-09:30	447	192.6	40.8	53.0	12.75	16.71
09:30-10:00	487	193.7	46.3	51.9	11.70	7.44
10:00-10:30	527	179.3	50.9	29.8	5.12	31.98
10:30-11:00	525	176.9	52.5	30.8	6.29	36.76
11:00-11:30	581	173.9	58.3	29.3	5.85	16.00
11:30-12:00	555	176.5	56.2	16.0	1.98	30.40
12:00-12:30	593	169.1	53.5	9.3	2.70	56.91
12:30-13:00	511	169.6	52.9	5.5	1.76	71.21

3.1.1 חשבו את העומס המוצע (offered load) ואת נצילות השרתים לאינטרוול 09:00-09:30.

$$p = \frac{R(1 - P\{AB\})}{n} = \frac{47.8 \cdot 0.8725}{40.8} \approx 100\%, \quad R = \frac{\lambda \cdot E[S]}{1800} = \frac{447 \cdot 192.6}{1800} = 47.8$$

3.1.2 תנו אומד טוב ככל שתוכלו לאורך התור הממוצע במשך האינטרוול 09:30-10:00. מדוע יכולה תשובתכם להיות חרוקה מהערך האמיתי?

$$L = \lambda \cdot E[W] = \frac{487 \cdot 51.9}{1800} = 14.0$$

3.1.3 הדו"ח הנ"ל מכסה 12 אינטרוולים. הניחו שחישבתם את אורכי התור $Q_1, Q_2, \dots, Q_{12}$ ל-12 אינטרוולים אלו.

האם $Q = \frac{\sum_{i=1}^{12} Q_i}{12}$ היא הדרך הנכונה לחישוב אורך התור הממוצע בין 7:00 ל-13:00. אם לא, תארו את הדרך הנכונה. (אין צורך בחישוב מספרי.)

10

$$P\{Ab\} = \frac{\sum_{i=1}^{12} P_i\{Ab\}}{12}$$

3.1.4 סמנו ע"י $P_1\{Ab\}, P_2\{Ab\}, \dots, P_{12}\{Ab\}$ את אחוזי הנטישה במהלך 12 האינטרוולים. האם $P\{Ab\} = \frac{\sum_{i=1}^{12} P_i\{Ab\}}{12}$ היא הדרך הנכונה לחישוב אחוזי הנטישה בין 7:00 ו-13:00. אם לא, תארו את הדרך הנכונה. (אין צורך בחישוב מספרי.)

ס"א, הפקן הפכונק ה"ט

$$P\{Ab\} = \frac{\sum_{i=1}^{12} \lambda_i P_i\{Ab\}}{\sum_{i=1}^{12} \lambda_i}$$

כאן λ_i - 23 פ' מועד

3.1.5 בהרצאות נידונו שלושה תחומים תפעוליים: QED, ED ו-QD. מיינו את 12 האינטרוולים לפי תחומים האלה.

7-7:30, 7:30-8 QD

9:30, 9:30-10 ED

QED - 8 חל' פ' -

3.1.6 מה המלצתכם לשיפור החשוב ביותר בתפעול המוקד, בהינתן הדו"ח הנ"ל? ענו במשפט קצר יחיד.

אנו מצ' פ' ס' פ' א' ו' ז' צ' ג' ו' ת'
 כמות הב' צ' ו' פ' ס' המערכ' מ' א'
 א' מ' ו' מ' א' מ' ב' מ' א'.

חלק 2. איוש ותחומים תפעוליים.

נתונה להלן תחזית לקצב מופע (ממוצע מספר המופעים לחצי שעה) בבוקרו של יום מסוים. נתון שמשך השירות מתפלג מעריכית עם ממוצע 3 דקות. נתבקשתם להביא לכך שבכל אינטרוול של זמן, לפחות 50% מהלקוחות יקבלו שירות מידי, ללא המתנה. מטרתכם לקבוע את רמת האיוש המינימאלית שתשיג יעד זה.

Time Interval	Arrivals Forecast	Service Time Estimate, sec
07:00-07:30	55	180
07:30-08:00	99	180
08:00-08:30	177	180
08:30-09:00	239	180
09:00-09:30	300	180
09:30-10:00	328	180

3.2.1 הניחו שלקוחות המערכת לא נוטשים (בעלי סבלנות אין סופית). חשבו את רמת האיוש המינימאלית לאינטרוול 09:30-09:00.

$$R = \frac{\lambda \cdot E[ST]}{1800} = 30$$

$$n = \lceil R + 0.5 \sqrt{R} \rceil = 33$$

3.2.2 חזרו על סעיף 3.2.1, עתה תחת ההנחה שלקוחות אכן נוטשים וממוצע סבלנותם היא כ-3 דקות.

$$\beta = 0$$

$$n = R = 30$$

3.2.3 נניח שחישבתם את רמת האיוש המינימאלית לכל 6 האינטרוולים הנ"ל, בהנחה שממוצע הסבלנות שווה ל-3 דקות. רמת איוש זו משיגה אחוז ממתנינים שהוא יציב בזמן וקרוב ל-50%. האם בתרחיש שכזה, גם אחוז הנוטשים יהיה יציב מאינטרוול לאינטרוול? אם כן, נמקו. אם לא, באיזה אינטרוול יהיה אחוז הנוטשים מכסימלי ובאיזה יהיה מינימאלי? נמקו בקצרה.

לכך. אחוז הנוטשים יהיה פחות נמוך

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \delta$$

07:00-07:30 נמוך

09:30-10:00 גבוה

3.2.4 נניח שרמת האיוש היא כפי שחישבתם בסעיף 3.2.2 (וממוצע הסבלנות הוא 3 דקות). התחזית, לעומת זאת, היא שקצב המופע באינטרוול 09:30-09:00 יהיה 100 בהסתברות 50% ו-500 בהסתברות 50%. (שימו לב שהממוצע נשאר 300). מה הערכתכם לאחוז הממתנים, אחוז הנוטשים וממוצע משך ההמתנה לשירות.

$$\text{ED } p \text{ בה } \lambda = 100 \quad P\{W_q > 0\} \approx 0 \quad P\{AB\} \approx 0 \quad E[W_q] \approx 0$$

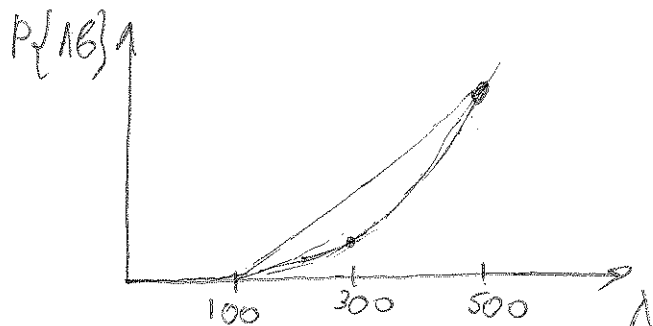
$$\text{ED } p \text{ בה } \lambda = 500 \quad R = 50, n = 30$$

$$n = R(1-\gamma) \quad P\{W_q > 0\} \approx 1 \quad P\{AB\} \approx 40\% \quad E[W_q] = 3 \cdot 0.4 = 1.2 \text{ דקות}, \gamma = 0.4$$

$$P\{W_q > 0\} \approx 50\%, \quad P\{AB\} \approx 20\% \quad E[W_q] = 0.6 \text{ דקות} \quad 100$$

3.2.5 נעזרנו בתכנה 4CallCenter כדי לחשב את אחוז הנוטשים ומשך ההמתנה הממוצע, במודל Erlang-A עם הפרמטרים מסעיף 3.2.2, דהיינו: קצב מופע ממוצע 300 לחצי שעה, משך שרות ומשך סבלנות ממוצעים של 3 דקות, ורמת איוש כפי שחישבתם ב- 3.2.2. קיבלנו שאחוז הנוטשים הוא 7.3% ומשך ההמתנה הממוצע הוא 13.1 שניות, שהם נמוכים מהערכתכם בסעיף 3.2.4. הסבירו בקצרה מדוע?

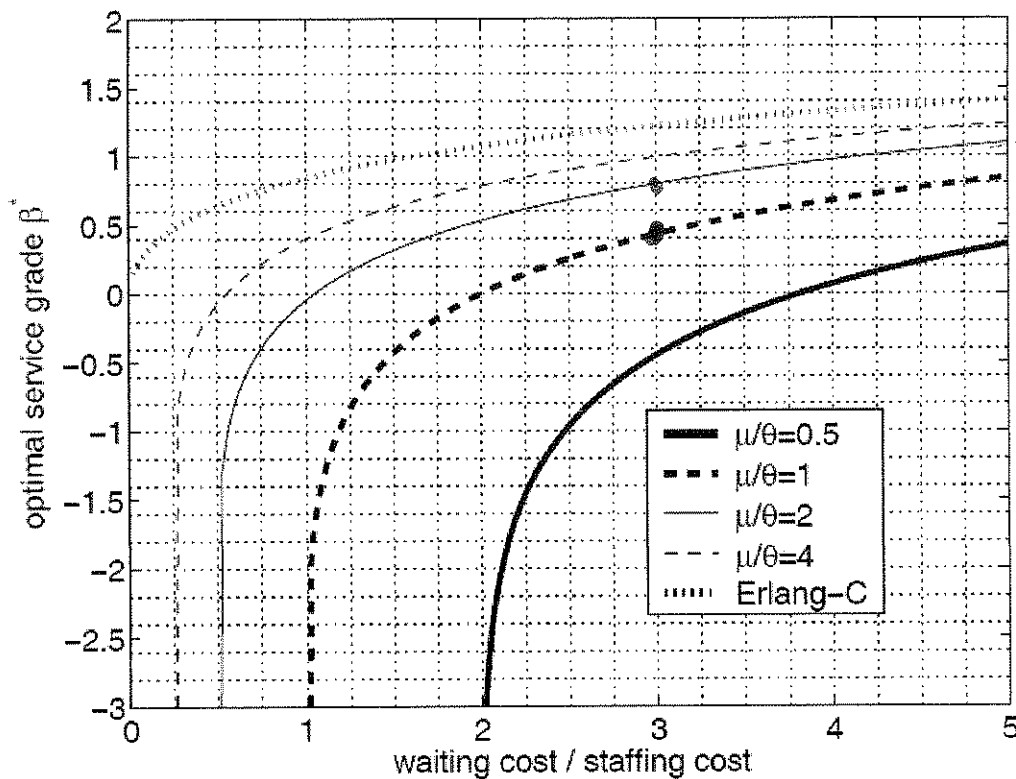
בדרך כלל הוסבר
אפקטיות מב' אפ
סרמה שירות יותר
מאובב במאכלכת



(מתמטית, התופעה נובעת מקטניות
של הסתברות קליטה כפונקציה של λ
בהיחוד $[100, 500]$)

חלק 3. איוש אופטימלי.

בחלק הזה נתרכז באינטרוול 09:00-09:30 מהטבלה בחלק הקודם. נזכיר שממוצע קצב המופע שווה ל-300 מופעים לחצי שעה, וממוצעי משך השירות ומשך הסבלנות שווים שניהם ל-3 דקות. נניח בנוסף שנציגי שירות (מוקדנים) מרוויחים 30 ₪ לשעה ושעלות זקת המתנה של לקוח מוערכת ב-1.5 ₪.



3.3.1 תחת ההנחות הנ"ל, חשבו את רמת האיוש האופטימלית N^* שמביאה למינימום את עלות תפעול המערכת. השתמשו בגרף הנתון לעיל.

$$\frac{M}{\theta} = 1 \quad \text{ע"פ } \mu/\theta = 0.5 \quad \text{נניח } \mu/\theta = 1$$

$$3 = \frac{\rho \rho / h'' e^{1.5}}{\rho \rho / h'' e^{0.5}} = \frac{\text{waiting cost}}{\text{staffing cost}}$$

$$\beta^* = 0.4 \quad \text{נניח}$$

$$N^* = \lceil R + \beta \sqrt{R} \rceil = \lceil 30 + 0.4 \sqrt{30} \rceil = 33$$

3.3.2 נניח שממוצע משך השירות יורד מ-3 ל-2 דקות וכל יתר הפרמטרים נשארו ללא שינוי. האם עלות תפעול המערכת תעלה/תורד/לא-תשתנה? נמקו בקצרה.

עלות תפעול המערכת תרד
משום שרמת השירות תעלה ודקות תרד
במחיר

3.3.3 בנוסף להנחות הנ"ל, נניח גם שהרווח הממוצע מכל שירות הוא 6 ש"ח. מהי עתה רמת האיוש האופטימלית שמביאה למקסימום את ממוצע הרווח?

בקורס קוסבר מהג'מ האיוש האופטימלי
עקום ע"מ"ה שמצביע על 6 ש"ח נ"ה
במקרה זה

$$Cost = C_s \cdot N + \lambda \cdot C_w \cdot E[W_q] + \lambda \cdot P\{AB\} \cdot C_{ab} =$$

$$= C_s \cdot N + \lambda (C_w + C_{ab} \cdot \theta) E[W_q]$$

$$\theta = 1/3 \quad \frac{C_w + C_{ab} \theta}{C_s} = \frac{1.5 + 2}{0.5} = 7 \quad \beta^* \approx 1.1, \quad \mu^* = \lceil 30 + 1.1 \cdot 50 \rceil = 36$$

3.3.4 תחת הנחות של סעיף 3.3.3, עד כמה ניתן להעלות את משכורת המוקדנים כך שתפעול המוקד יהיה עדין רווחי (רווחים גדולים מעלויות)?

אם המוקד קרוי ה' האיוש האופטימלי
ע"מ"ה בתהליך QED

$$Revenue = \pi_a \cdot \lambda \cdot (1 - P\{AB\}) - C_w \cdot \lambda \cdot E[W_q] - C_s \cdot N$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\lambda} Revenue = \pi_a - 1 - P\{AB\} - E[W_q] - \frac{C_s}{\lambda}$$

$$Revenue \approx \pi_a \cdot \lambda - C_s \cdot N \approx \lambda \left(\pi_a - \frac{C_s}{\lambda} \right)$$

$$C_s < \mu \pi_a = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \text{ ש"ח} = 120 \text{ ש"ח/שעה}$$

שימו לב: לא הטווינו $\frac{1}{\mu} \cdot C_s < \pi_a$ יש הסבר אינטואיטיבי בנס. μ קצב שירות / π_a מחיר שירות
הוא מחיר שירות / μ קצב שירות

שאלה 4 תאוריה (10 נקודות)

חלק 1. אמידה מוטה.

נניח שזמנים בין-מופעים של אוטובוסים לתחנה הם בלתי-תלויים, שווי-התפלגות, ומתוארים על ידי משתנה מקרי (מ"מ)

S . נניח שלמ"מ S יש תוחלת סופית $E(S)$ ושונות סופית $\sigma^2(S)$. בכתה הראינו שעבור נוסע המופיע באקראי

לתחנה, הזמן S_e מרגע מופע הנוסע עד רגע מופע האוטובוס הבא הוא בעל תוחלת:

$$E(S_e) = \frac{1}{2} E(S) \cdot [1 + C^2(S)]$$

כאשר $C(S)$ הוא מקדם ההשתנות של המ"מ S . (בהקשרים של שירות, S_e נקרא גם "זמן שארית השירות").

4.1 הסבירו בקיצור את התופעה המתוארת על ידי הנוסחה ל- $E(S_e)$ (אותה כינינו "אמידה מוטת"), תוך שימוש

במקרה פרטי (התפלגות מיוחדת) הממחיש אותה.

התאספה: בקימה של אינטנאל צמן על ידו בחירה של מקום צמן בו, קרחת
 פהליה לאגת אינטנאל צמן אלוכיס.

פרק 1: טור: הוסיף/אילוסטרוס בן אברהם טל וואלבוס, היינטיק
 $\exp =$ אסימטרי, נתיב ממוצע, ממוצע של 1000 מ"ר (מחזורי)
 סך כל מסר זכרון; טיפוס נאוי היה קורה ממילא של 1000 מ"ר.

חלק 2. $M, |G|_\infty$

במערכת שירות $M_1 | G | \infty$, המופע הוא פואסוני לא הומוגני בזמן עם קצב מופע $\{\lambda(t), t \geq 0\}$, ומשכי השירות S הם

בלתי-תלויים, שווי התפלגות, ובלתי תלויים במופע. נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t ויהי $R(t)$ ממוצע

מספרם: $R(t) = EL(t)$

ניתן להראות ש- $R(t)$ נתון על ידי כל אחד משני ההביטויים הבאים:

$$R(t) = E \left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du \right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

מטרת שני הסעיפים 4.2.1-4.2.2 להוכיח את הנוסחאות הנ"ל במקרה פרטי של משך שירות דטרמיניסטי.

4.2.1 נניח שמשך השירות S הוא דטרמיניסטי $S=D$: $S=D$. הוכיחו את השוויון בין שתי ההצגות של $R(t)$ למקרה זה, ז"א:

$$\int_{t-D}^t \lambda(u) du = D \cdot E(\lambda(t-S_e))$$

כאשר S_e הוא זמן שארית השירות המתאים ל- S דטרמיניסטי D .

$$S_e \stackrel{d}{=} U(0, D) \quad , \quad [0, D] \text{ מתפלג אחיד}$$

$$\begin{aligned} \text{כאן } B_k &= D \cdot E\lambda(t-S_e) = \int_0^D \frac{1}{D} \cdot \lambda(t-x) dx \\ &= \int_0^D \lambda(t-x) dx \stackrel{\substack{\uparrow \\ u=t-x}}{=} \int_{t-D}^t \lambda(u) du = B_k \text{ ממילא} \end{aligned}$$

4.2.2 הוכיחו שמתקיים:

$$R(t) = \int_{t-D}^t \lambda(u) du$$

$$\int_{t-D}^t \lambda(u) du = \int_0^t \lambda(u) du - \int_0^{t-D} \lambda(u) du$$

רמז:

$$\text{נסמן } A(t) = \text{מספר האירועים המצטברים עד לזמן } t, \text{ אז}$$

$$L(t) = A(t) - A(t-D)$$

כי כנס t נמצא במרווח $(t-D, t]$ האירועים $> t$ בלבד.

$$\text{כאן } A(t) \stackrel{d}{=} \text{Poisson} \left(\int_0^t \lambda(u) du \right)$$

$$R(t) = EL(t) = \int_0^t \lambda(u) du - \int_0^{t-D} \lambda(u) du = \int_{t-D}^t \lambda(u) du.$$

חלק 3. עומס מוצע.

בכתה הוסבר ש- $R(t)$ הנייל משמש כהגדרת העומס המוצע (Offered Load) למערכת שירות בזמן t , כאשר המופע אליה ומשכי השירות בה הם כמתואר בחלק 2 הנייל. (כזכור, $R(t)$ נמדד ב-Erlang).

4.3. הסבירו בקצרה מדוע אכן ההגדרה מתאימה. את הסברכם חלקו לשלושה חלקים:

4.3.1 המקרה הפרטי של מופע פואסוני בקצב קבוע $(\lambda(t) \equiv \lambda)$: מהו $R(t)$ במקרה זה ומדוע הגדרתו מתאימה?

במקרה זה $R(t) = \lambda \cdot E(s) \equiv R$, וזאת תלוי ב- t .
 λ = מס' המאות של המוזק ליחידת זמן. כל אחת מהן היא כמאות $E(s)$
 עוקבת עבודה, הנמדדת באח-זמן-יחידות. לכן $R =$ כמות העבודה המועצת
למערכת ליחידת זמן, כאשר עבודה נמדדת במאות זמן יחידות.

4.3.2 דוגמא של חדר מיון בבית חולים, שבו משך השהיה הממוצע 6 שעות: מדוע ההגדרה מסעיף 4.3.1 איננה מתאימה למקרה שכזה?

כאשר S מקבל זיכוי יחסית קבוע, כמות העבודה בזמן t במערכת מולדת
 עבודה שהגיעה זמן זה נחשבת לזמן t , ואם קרה האדם מתנה, כמו בחור
 מיון, קרה אדם הועדה לטע זמן זה יעלה להיות טווח ההיבדח הקרה האדם
 קטן t .

4.3.3 המקרה הכללי: מדוע הגדרת $R(t)$ בחלק 2 הנייל אכן מתאימה?

במקרה זה 4.3.2, $R(t) =$ כמות העבודה הנמדדת במאות זמן t ,
 עבודה נמדדת ביחידות זמן יחידות, או לחלופין
 מס' יחידות זמן-יחידות הנדרשות לטיפול. לכן

$$R(t) = E L(t)$$

$$E \int_{t-s}^t \lambda(u) du = R(t)$$

ממחיש יטה את העקרון שמת העבודה בזמן t
 כוללת עבודה שהגיעה לפני t , בקצב תלוי-
 זמן $\lambda(t)$.

4.4 הסבירו כיצד ניתן להרחיב את המקרה הדטרמיניסטי ב- 4.2.1 הנ"ל למקרה של S כללי, דהיינו כיצד מוכיחים שאכן:

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = E(S) \cdot E(\lambda(t-S_e))$$

רמז: ניתן לקרב כל משתנה מקרי, בדיוק רב כרצונכם, על ידי משתנה מקרי המקבל מספר סופי של ערכים (מ"מ דיסקרטי).

נניח $S = \sum p_i D_i$, כאשר p_i היא ההסתברות של D_i ו- D_i הוא ערך מספר טבעי.

אז $S_e = \sum p_i D_i$, ו- U_i הוא זמן המתנה של D_i , ו- $\frac{p_i D_i}{E(S)}$ הוא משקל.

נכתוב $\lambda(u) = \sum p_i \lambda_i(u)$, כאשר $\lambda_i(u) = \lambda(u - U_i)$, ו- $U_i = D_i$.

אז $E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = \sum p_i \int_{t-D_i}^t \lambda(u) du = \sum p_i \int_{t-D_i}^t \lambda_i(u) du = \sum p_i E\lambda_i(t - U_i) =$

$= E(S) \sum \frac{D_i p_i}{E(S)} E\lambda(t - U_i) = E(S) E\lambda(t - S_e) =$ הנ"ל

ניתן להראות (על ידי שינוי משתני אינטגרציה בלבד) שמתקיים:

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = \int_{-\infty}^t \lambda(u) [1 - G(t-u)] du$$

כאשר $G(\cdot)$ היא פונקציית ההתפלגות של משך השירות S . שימו לב ליחס:

$$1 - G(t-u) = P\{S > t-u\}$$

היעזרו בעובדות אלו כדי לחדד את הסברכם בסעיף 4.3.3, וז"א תנו הסבר מדויק יותר לעובדה ש- $R(t)$ הוא אכן ההגדרה המתאימה לעומס המוצע (Offered Load) בזמן t .

1. $\lambda(u)$ = קצב המופע בזמן u . $\lambda(u) du$ הוא מספר המופעים במשך $(u, u+du)$.

2. $1 - G(t-u)$ = % המופע בזמן u שעדיין נמצא במערכת בזמן t .

3. $[1 - G(t-u)] \cdot [\lambda(u) du]$ כמות המופעים במערכת בזמן t שמקורה במופע P שהתרחש במשך $(u, u+du)$.

4. $\int_{-\infty}^t \lambda(u) [1 - G(t-u)] du$ = כמות המופעים במערכת בזמן t שגורמת להם.