



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגל : ד"ר סרגיי זלטין

תאריך הבחינה : 25.02.2007

מס' תלמיד _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות - 096324

מועד א' - סמסטר חורף תשס"ז 2007

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור, וללא מחשבון.
- המבחן כולל 19 עמודים, כולל עמוד זה.
- ניתן להשאיר תשובות מספריות ללא חישובן הסופי, או לעגל חישובים באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

הרצאות/תרגולים	מתוך 10 נקודות	שאלה 1
תרגילי בית	מתוך 10 נקודות	שאלה 2
יישום	מתוך 15 נקודות	שאלה 3
תיאוריה	מתוך 10 נקודות	שאלה 4

סה"כ _____ מתוך 45 נקודות

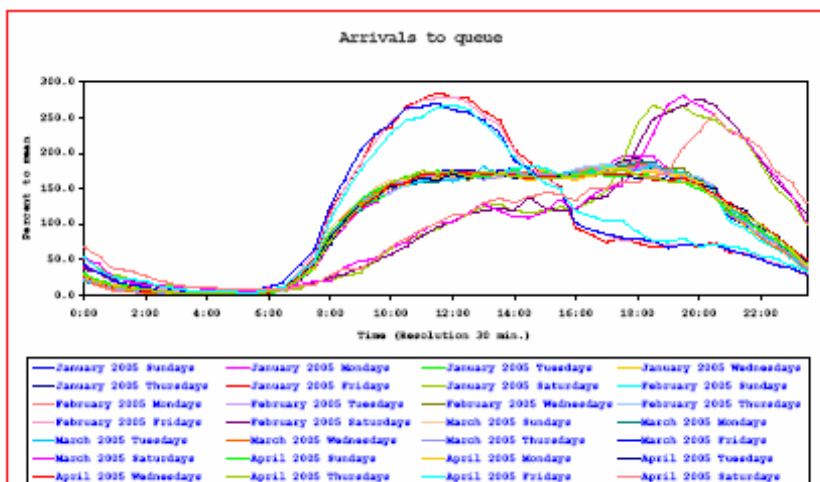
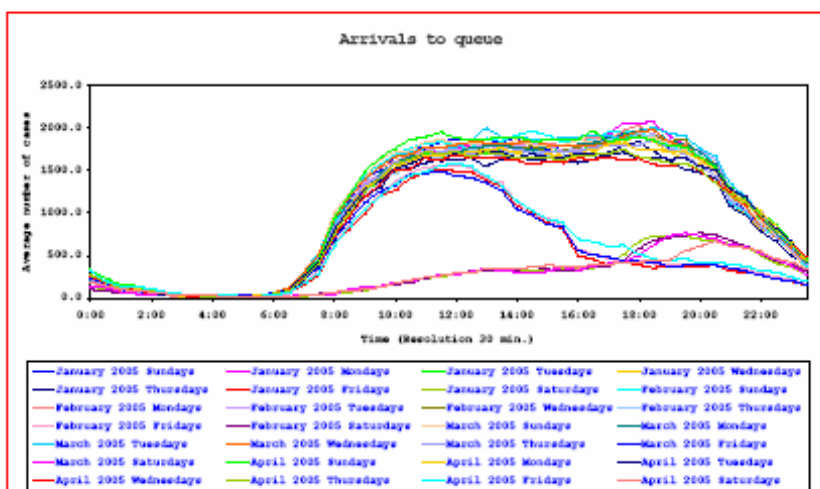
בהצלחה !

שאלה 1 הרצאות\תרגולים (10 נקודות)

חלק 1. מופעים למערכת שירות

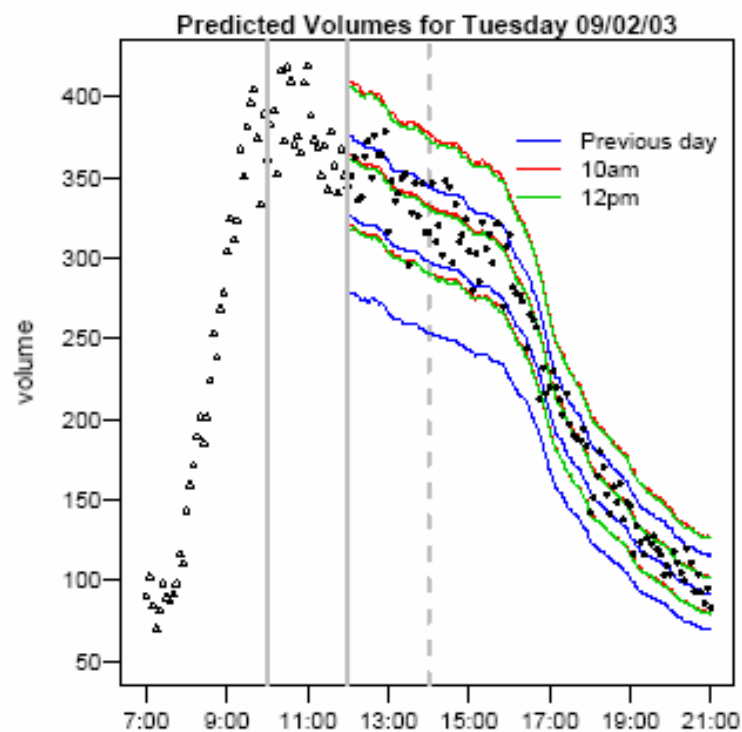
1.1 להלן מתוארים מופעים למוקד שירות טלפוני בארץ, בימים שונים של השבוע: הגרף הראשון מתאר מספר מופעים לחצי שעה והשני את מספר מופעים זה ביחס לממוצע היומי (באחוזים). בהנחה שהמופע למוקד הוא פואסון לא הומוגני בזמן, באיזה מודל מתמטי לקצב המופע $\lambda(t)$ הייתם ממליצים להשתמש, ובאיזה שיטות הייתם חוזים אותו?

Arrival Patterns, Israeli Telecom, 2005



1.2 להלן מתוארים שלשה ניסיונות לחזות קצב מופע למוקד שירות טלפוני בארה"ב. התחזית היא למספר המופעים החל משעה 12:00. הנקודות מתארות את המספר האמיתי. סכמו בקצרה את המסקנות העיקריות הנובעות מדוגמה זו.

Comparison between Day-Ahead and Within-Day Predictions (Weinberg, Brown, Stroud, 2005)



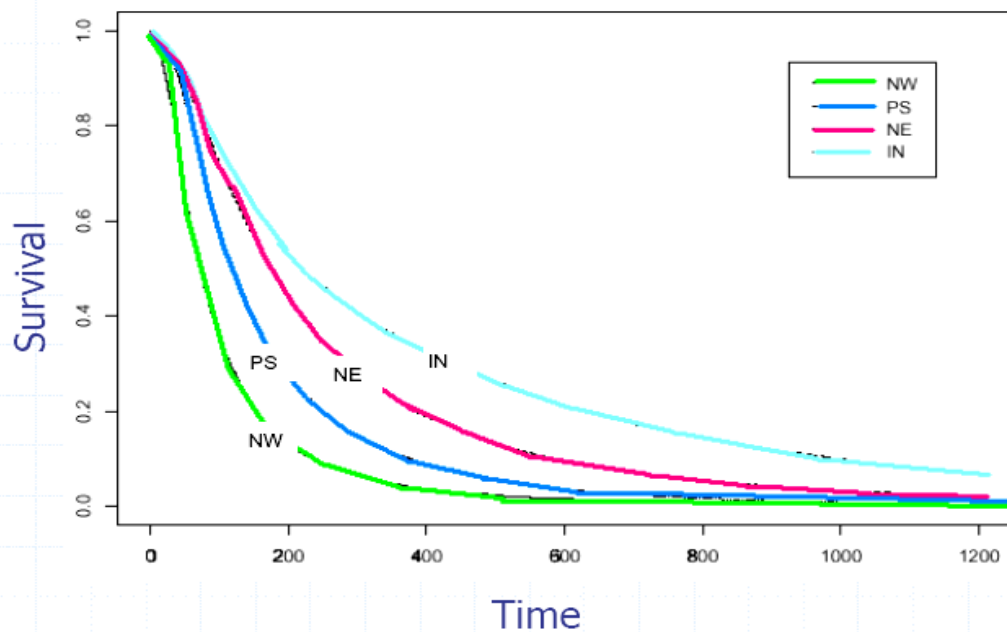
חלק 2. משכי שירות

1.3 הגדירו יחס סדר סטוכסטי בין שני משתנים מקריים X ו- Y . (לצורך ההגדרה, השתמשו בסימונים F_X ו- F_Y עבור פונקציות ההתפלגות של X ו- Y בהתאמה).
הגדרה:

1.4 הגרף הבא מתאר את **פונקציית ההישרדות** (*survival function*) של משך השירות, עבור כל אחד מארבעת סוגי השירות במוקד שהכרנו בקורס.

Service Time

Survival curve, by Types



נסמן ב- T_{PS} משתנה מקרי בעל התפלגות משך השירות של לקוחות מסוג PS (פעילות שוטפת) וב- T_{NE} התפלגות משך השירות של לקוחות מסוג NE (חדשים).
מי גדול יותר : $E[T_{PS}]$ או $E[T_{NE}]$? נמקו במדויק, תוך ציטוט העובדות המתמטיות בהן אתם משתמשים.

תשובה:

נימוק:

חלק 3. סבלנות

1.5 בכיתה הוסבר שאמד לממוצע הסבלנות של לקוח, המבוסס על נתונים קטומים (מצונזרים) ניתן על ידי

$$\text{ממוצע הסבלנות} = \frac{\text{סך הכל זמן ההמתנה (של משורתים או נוטשים)}}{\text{מספר הנוטשים}}$$

הסבירו כיצד ניתן להסיק מהאמד הנ"ל את ההצגה:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{ממוצע} & & \text{ממוצע} \\ & & \text{אינדקס} & & \text{הסבלנות} \\ \text{ממוצע הסבלנות} & = & \text{זמן ההמתנה} & + & \text{זמן ההמתנה} \\ & & \text{של נוטשים} & & \text{של משורתים} \\ & & \text{x} & & \text{הסבלנות} \end{array}$$

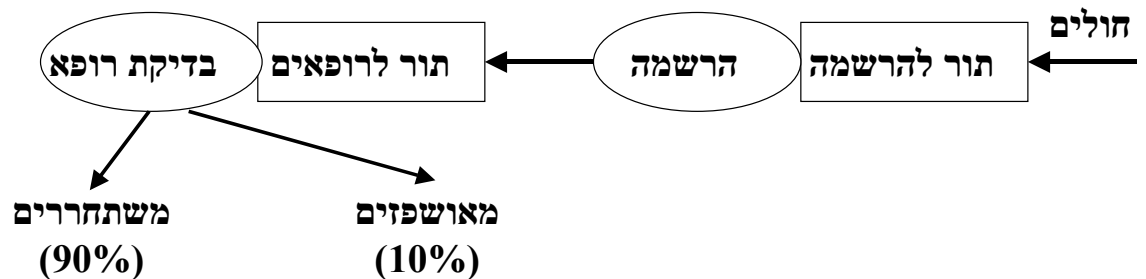
עבור הסברכם, הגדירו במדויק את אינדקס הסבלנות.

הגדרת אינדקס הסבלנות:

הסבר:

שאלה 2 תרגילי בית (10 נקודות)

חולים הפונים לחדר מיון בבית חולים מסוים עוברים תהליך של **בדיקה ראשונית**. בסופו של התהליך, רופא בודק וממין את החולים. חלק מהחולים **מאושפזים** בבית-החולים וחלק מקבלים טיפול והוראות להמשכו (למשל מרשמים) ואז **משתחררים**. מדידות מראות שבממוצע 50 חולים פונים בשעה לחדר המיון ו-10% מהם מאושפזים. בממוצע, 30 חולים ממתניים **בתור להרשמה** לבדיקה הראשונית ו-40 חולים ממתניים **בתור לרופאים** לבדיקה אחרי ההרשמה. תהליך ההרשמה של חולה נמשך 2 דקות בממוצע. חולים משתחררים נמצאים בממוצע 5 דקות אצל רופא ואלה המאושפזים נבדקים ע"י הרופא בממוצע 30 דקות.



2.1 כמה חולים בממוצע נמצאים בבדיקה אצל הרופאים?

2.2 כמה זמן בממוצע נמצא חולה בחדר המיון?

2.3 מה מספר החולים הממוצע בחדר המיון?

מנהל בית החולים החליט **לשנות את תהליך הטיפול** בחדר המיון. תהליך ההרשמה יופעל באותה אופן כקודם. אחרי ההרשמה, יעברו חולים בדיקה אצל **אחיות** שמסווגות אותם ל**משתחררים פוטנציאליים** (המקבלים הוראות וטיפול ולא מאושפזים) או ל**מאושפזים פוטנציאליים**. אחר כך, שני סוגי החולים מחכים בתורים נפרדים לקראת בדיקת רופא. מתכנני המערכת מעריכים שבדיקת אחות תיקח 3 דקות. הם גם מעריכים ש-20 חולים ימתינו בתור להרשמה ו-5 חולים ימתינו בתור לאחות. בנוסף, תור המשתחררים הפוטנציאליים לקראת בדיקת רופא יהיה כ-15 חולים בממוצע ותור המאושפזים הפוטנציאליים יהיה רק חולה אחד. משכי בדיקת רופא הם, כקודם, 5 דקות למשתחררים פוטנציאליים ו-30 דקות למאושפזים פוטנציאליים, בממוצע. נניח שאחיות המיון לא עושות טעויות וממינות 100% של החולים בצורה נכונה. כקודם, 50 פונים למיון בממוצע לשעה, 90% מהחולים משתחררים ו-10% מאושפזים.

2.4 תחת התכנון החדש, כמה זמן בממוצע ישהה חולה בחדר המיון?

2.5 כמה זמן בממוצע ישהו מאושפזים פוטנציאליים בחדר המיון?

2.6 כמה חולים בממוצע יהיו סה"כ בחדר המיון?

2.7 מהו מספר הפקידים המינימלי בעמדת ההרשמה שיאפשר מצב שבו נצילותם לא תעלה על 80%.

2.8 מהו מספר הרופאים המינימלי שנדרש כדי להבטיח את יציבות המערכת?

שאלה 3 יישום (15 נקודות)

חלק 1. ניתוח ראשוני של דו"ח ACD.

להלן נתון חלק של דו"ח ACD ממוקד שירות טלפוני בארץ. (משכי זמן מוצגים בשניות).

Time Interval	Arrivals	Service Time	Agents	Average Wait	%Abandon	% Wait=0
07:00-07:30	81	190.4	12.1	1.7	0.00	92.59
07:30-08:00	162	134.8	17.6	0.6	0.62	98.14
08:00-08:30	302	167.7	27.6	3.2	0.66	78.00
08:30-09:00	362	164.3	33.1	20.7	1.66	45.22
09:00-09:30	447	192.6	40.8	53.0	12.75	16.71
09:30-10:00	487	193.7	46.3	51.9	11.70	7.44
10:00-10:30	527	179.3	50.9	29.8	5.12	31.98
10:30-11:00	525	176.9	52.5	30.8	6.29	36.76
11:00-11:30	581	173.9	58.3	29.3	5.85	16.00
11:30-12:00	555	176.5	56.2	16.0	1.98	30.40
12:00-12:30	593	169.1	53.5	9.3	2.70	56.91
12:30-13:00	511	169.6	52.9	5.5	1.76	71.21

3.1.1 חשבו את העומס המוצע (offered load) ואת נצילות השרתים לאינטרוול 09:00-09:30.

3.1.2 תנו אמד טוב ככל שתוכלו לאורך התור הממוצע במשך האינטרוול 09:30-10:00. מדוע יכולה תשובתכם להיות רחוקה מהערך האמיתי?

3.1.3 הדו"ח הנ"ל מכסה 12 אינטרוולים. הניחו שחישבתם את אורכי התור $Q_1, Q_2, \dots, Q_{12}$ ל-12 אינטרוולים אלו.

האם $Q = \frac{\sum_{i=1}^{12} Q_i}{12}$ היא הדרך הנכונה לחישוב אורך התור הממוצע בין 7:00 ל-13:00. אם לא, תארו את הדרך הנכונה. (אין צורך בחישוב מספרי).

3.1.4 סמנו ע"י $P_1\{Ab\}, P_2\{Ab\}, \dots, P_{12}\{Ab\}$ את אחוזי הנטישה במהלך 12 האינטרוולים. האם $P\{Ab\} = \frac{\sum_{i=1}^{12} P_i\{Ab\}}{12}$ היא הדרך הנכונה לחישוב **אחוזי הנטישה** בין 7:00 ו-13:00. אם לא, תארו את הדרך הנכונה. (אין צורך בחישוב מספרי.)

3.1.5 בהרצאות נידונו שלושה תחומים תפעוליים: QED, ED ו-QD. מיינו את 12 האינטרוולים לפי תחומים האלה.

3.1.6 מה **המלצתכם לשיפור החשוב ביותר** בתפעול המוקד, בהינתן הדו"ח הנ"ל? ענו במשפט קצר יחיד.

חלק 2. איוש ותחומים תפעוליים.

נתונה להלן **תחזית** לקצב מופע (ממוצע מספר המופעים לחצי שעה) בבוקרו של יום מסוים. נתון שמשך השירות מתפלג מעריכית עם ממוצע 3 דקות. נתבקשתם להביא לכך שבכל אינטרוול של זמן, לפחות 50% מהלקוחות יקבלו **שירות מיידי**, ללא המתנה. מטרתכם לקבוע את רמת האיוש המינימאלית שתשיג יעד זה.

Time Interval	Arrivals Forecast	Service Time Estimate, sec
07:00-07:30	55	180
07:30-08:00	99	180
08:00-08:30	177	180
08:30-09:00	239	180
09:00-09:30	300	180
09:30-10:00	328	180

3.2.1 הניחו שלקוחות המערכת לא נוטשים (בעלי סבלנות אין סופית). חשבו את **רמת האיוש המינימאלית** לאינטרוול **09:30-09:00**.

3.2.2 חזרו על סעיף 3.2.1, עתה תחת ההנחה שלקוחות **אכן נוטשים** וממוצע סבלנותם היא כ-3 דקות.

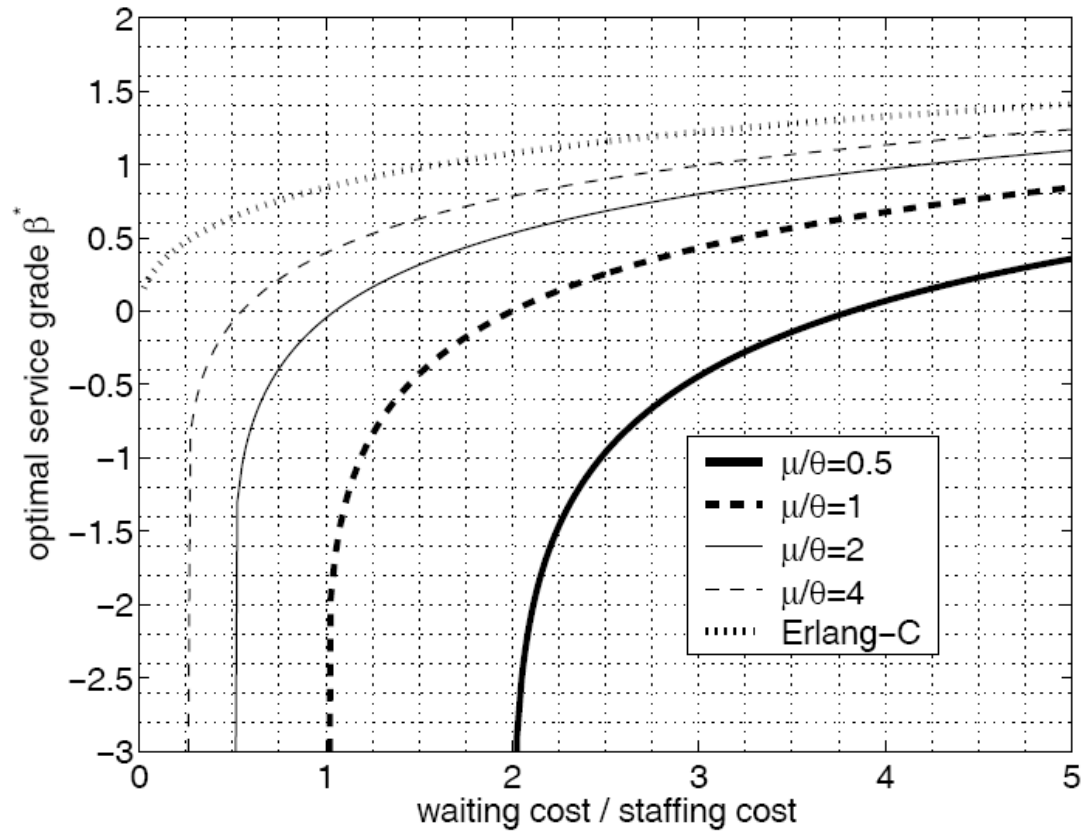
3.2.3 נניח שחישבתם את רמת האיוש המינימאלית לכל 6 האינטרוולים הנ"ל, בהנחה שממוצע הסבלנות שווה ל-3 דקות. רמת איוש זו משיגה אחוז ממתנים שהוא יציב בזמן וקרוב ל-50%. האם בתרחיש שכזה, גם **אחוז הנוטשים** יהיה **יציב** מאינטרוול לאינטרוול? אם כן, נמקו. אם לא, באיזה אינטרוול יהיה אחוז הנוטשים מכסימלי ובאיזה יהיה מינימאלי? נמקו בקצרה.

3.2.4 נניח שרמת האיוש היא כפי שחישבתם בסעיף 3.2.2 (וממוצע הסבלנות הוא 3 דקות). התחזית, לעומת זאת, היא שקצב המופע באינטרוול **09:30-09:00** יהיה 100 בהסתברות 50% ו-500 בהסתברות 50%. (שימו לב שהממוצע נשאר 300). מה הערכתכם לאחוז הממתינים, אחוז הנוטשים וממוצע משך ההמתנה לשירות.

3.2.5 נעזרנו בתכנה **4CallCenter** כדי לחשב את אחוז הנוטשים ומשך ההמתנה הממוצע, במודל **Erlang-A** עם הפרמטרים **מסעיף 3.2.2**, דהיינו: קצב מופע ממוצע 300 לחצי שעה, משך שרות ומשך סבלנות ממוצעים של 3 דקות, ורמת איוש כפי שחישבתם ב- 3.2.2. קיבלנו שאחוז הנוטשים הוא 7.3% ומשך ההמתנה הממוצע הוא 13.1 שניות, שהם **נמוכים** מהערכתכם בסעיף **3.2.4**. הסבירו בקצרה מדוע?

חלק 3. איוש אופטימלי.

בחלק הזה נתרכז באינטרוול 09:00-09:30 מהטבלה בחלק הקודם. נזכיר שממוצע קצב המופע שווה ל-300 מופעים לחצי שעה, וממוצעי משך השירות ומשך הסבלנות שווים שניהם ל-3 דקות. נניח בנוסף שנציגי שירות (מוקדנים) מרוויחים 30 ₪ לשעה ושעלות דקת המתנה של לקוח מוערכת ב-1.5 ₪.



3.3.1 תחת ההנחות הנ"ל, חשבו את רמת האיוש האופטימלית N^* שמביאה למינימום את עלות תפעול המערכת. השתמשו בגרף הנתון לעיל.

3.3.2 נניח שממוצע משך השירות ירד מ-3 ל-2 זקות וכל יתר הפרמטרים נשארו ללא שינוי. האם עלות תפעול המערכת תעלה/תרד/לא-תשתנה? נמקו בקצרה.

3.3.3 בנוסף להנחות הנ"ל, נניח גם שהרווח הממוצע מכל שירות הוא 6 ₪. מהי עתה רמת האיוש האופטימלית שמביאה למקסימום את ממוצע הרווח?

3.3.4 תחת הנחות של סעיף 3.3.3, עד כמה ניתן להעלות את משכורת המוקדנים כך שתפעול המוקד יהיה עדין רווחי (רווחים גדולים מעלויות)?

שאלה 4 תאוריה (10 נקודות)

חלק 1. אמידה מוטה.

נניח שזמנים בין-מופעים של אוטובוסים לתחנה הם בלתי-תלויים, שווי-התפלגות, ומתוארים על ידי משתנה מקרי (מ"מ)

S . נניח שלמ"מ S יש תוחלת סופית $E(S)$ ושונות סופית $\sigma^2(S)$. בכתה הראינו שעבור נוסע המופיע באקראי

לתחנה, הזמן S_e מרגע מופע הנוסע עד רגע מופע האוטובוס הבא הוא בעל תוחלת:

$$E(S_e) = \frac{1}{2}E(S) \cdot [1 + C^2(S)]$$

כאשר $C(S)$ הוא מקדם ההשתנות של המ"מ S . (בהקשרים של שירות, S_e נקרא גם "זמן שארית השירות").

4.1 הסבירו בקיצור את **התופעה** המתוארת על ידי הנוסחה ל- $E(S_e)$ (אותה כינינו "אמידה מוטה"), תוך שימוש

במקרה פרטי (התפלגות מיוחדת) הממחיש אותה.

חלק 2. $M_t | G | \infty$

במערכת שירות $M_t | G | \infty$, המופע הוא פואסוני לא הומוגני בזמן עם קצב מופע $\{\lambda(t), t \geq 0\}$, ומשכי השירות S הם

בלתי-תלויים, שווי התפלגות, ובלתי תלויים במופע. נסמן ב- $L(t)$ את **מספר האנשים במערכת** בזמן t ויהי $R(t)$ **ממוצע**

מספרם: $R(t) = EL(t)$.

ניתן להראות ש- $R(t)$ נתון על ידי כל אחד משני הביטויים הבאים:

$$R(t) = E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

מטרת שני הסעיפים 4.2.1-4.2.2 להוכיח את הנוסחאות הנ"ל במקרה פרטי של משך שירות דטרמיניסטי.

4.2.1 נניח שמשך השירות S הוא **דטרמיניסטי** $D : S=D$. הוכיחו את השוויון בין שתי ההצגות של $R(t)$ למקרה זה, ז"א:

$$\int_{t-D}^t \lambda(u) du = D \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

כאשר S_e הוא זמן שארית השירות המתאים ל- S דטרמיניסטי D .

4.2.2 הוכיחו שמתקיים:

$$R(t) = \int_{t-D}^t \lambda(u) du$$

$$\int_{t-D}^t \lambda(u) du = \int_0^t \lambda(u) du - \int_0^{t-D} \lambda(u) du \quad \text{רמז:}$$

חלק 3 . עומס מוצע.

בכתה הוסבר ש- $R(t)$ הנ"ל משמש כהגדרת **העומס המוצע (Offered Load)** למערכת שירות בזמן t , כאשר המופע אליה ומשכי השירות בה הם כמתואר בחלק 2 הנ"ל. (כזכור, $R(t)$ נמדד ב-Erlang).

4.3 הסבירו בקצרה מדוע אכן **ההגדרה מתאימה**. את הסברכם חלקו לשלושה חלקים:

4.3.1 **המקרה הפרטי** של מופע פואסוני **בקצב קבוע** ($\lambda(t) \equiv \lambda$): מהו $R(t)$ במקרה זה ומדוע הגדרתו מתאימה?

4.3.2 **דוגמא** של חדר מיון בבית חולים, שבו משך השהיה הממוצע **6 שעות**: מדוע ההגדרה מסעיף 4.3.1 איננה מתאימה למקרה שכזה?

4.3.3 **המקרה הכללי**: מדוע הגדרת $R(t)$ בחלק 2 הנ"ל אכן מתאימה?

4.4

הסבירו כיצד ניתן להרחיב את המקרה הדטרמיניסטי ב- 4.2.1 הנ"ל למקרה של S כללי, דהיינו כיצד מוכיחים

שאכן :

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

רמז : ניתן לקרב כל משתנה מקרי, בדיוק רב כרצונכם, על ידי משתנה מקרי המקבל מספר **סופי** של ערכים (מ"מ דיסקרטי).

4.5

ניתן להראות (על ידי שינוי משתני אינטגרציה בלבד) שמתקיים :

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = \int_{-\infty}^t \lambda(u) [1 - G(t - u)] du$$

כאשר $G(\cdot)$ היא פונקציית ההתפלגות של משך השירות S . שימו לב ליחס :

$$1 - G(t - u) = P\{S > t - u\}$$

היעזרו בעובדות אלו כדי **לחדד** את הסברכם בסעיף 4.3.3, ז"א תנו הסבר מדויק יותר לעובדה ש- $R(t)$ הוא אכן

ההגדרה המתאימה לעומס המוצע (Offered Load) בזמן t .