



מרצה : ד"ר. סרגי זלטיין
מתרגל: גנדי שייחט
תאריך הבחינה: 08.09.2006

כתיב

מס' תלמיד _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות - 096324

מועד א' - סמסטר אביב תשס"ו 2006

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- **המבחן בחומר סגור.**
- המבחן כולל 22 עמודים, כולל עמוד זה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות **רק אם** התבקשתם במפורש לעשות זאת.

- ניקוד:** שאלה 1 _____ מתוך 12 נקודות **מודלים אמפיריים**
- שאלה 2 _____ מתוך 12 נקודות **תהליך מופע למוקד שירות טלפוני. חיזוי קצב הגעה**
- שאלה 3 _____ מתוך 15 נקודות **משכי שהיה בבית חולים. התפלגויות Phase-Type**
- שאלה 4 _____ מתוך 7 נקודות **סבלנות לקוחות במוקדי שירות טלפוני**
- שאלה 5 _____ מתוך 9 נקודות **תור M/M/1**
- שאלה 6 _____ מתוך 15 נקודות **מערכות תורים, 4CallCenters**
- שאלה 7 _____ מתוך 18 נקודות **תחומים תפעוליים במערכת שירות**
- שאלה 8 _____ מתוך 12 נקודות **מודלים של נוזלים**

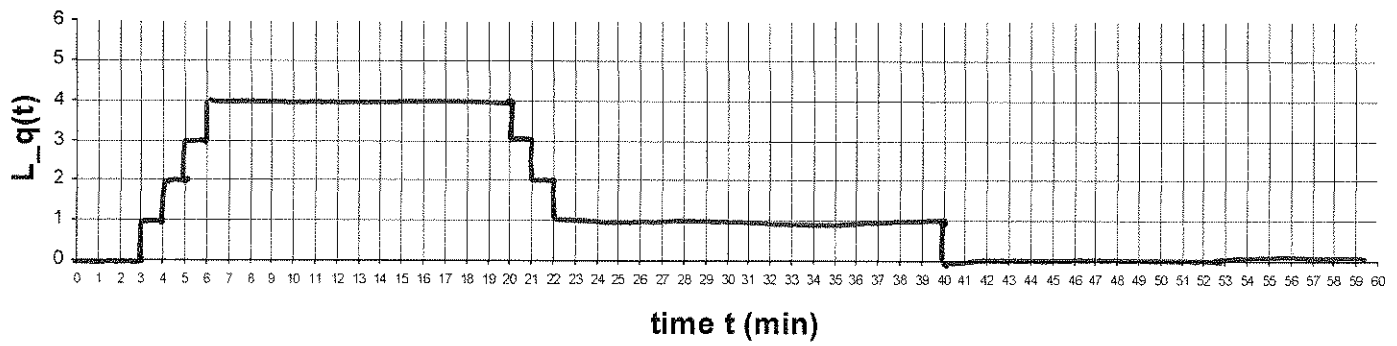
סה"כ _____ מתוך 100 נקודות

בהצלחה!

שאלה 1. מודלים אמפיריים (12 נקודות)

מרכז הדפוס באוניברסיטה מקבל הזמנות לצילומים של חומרי לימוד שונים. במרכז נמצאות N מכונות צילום זהות וידוע כי זמן ביצוע של כל הזמנה הוא 20 דקות בדיוק. בכל שעה מגיעות למרכז 7 הזמנות צילום, כאשר כולן (נניח לצורך שאלה זו) מגיעות מתחילת הדקה הראשונה ועד סיום הדקה ה-6-ית, עם מרווחי זמן של דקה בין הזמנות עוקבות (ז"א, הזמנות מגיעות בזמנים $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, כאשר t מייצג זמן בדקות מתחילת כל שעה).

1.1 נניח מעתה כי $N=3$. עבור זמן $0 \leq t$ מתחילת כל שעה נגדיר $L_q(t)$ - סה"כ מספר העבודות בתור, בזמן t . ציירו את הפונקציה L_q במשך שעה שלימה.



1.2 מה הוא EW_q - ממוצע זמן המתנה בתור.

סה"כ קצוות: 7

תשובה:

$$\int_0^{60} L_q(s) ds = 37 + 18 + 16 + 14 = 85 \text{ מ"ד}$$

$$\lambda = 7$$

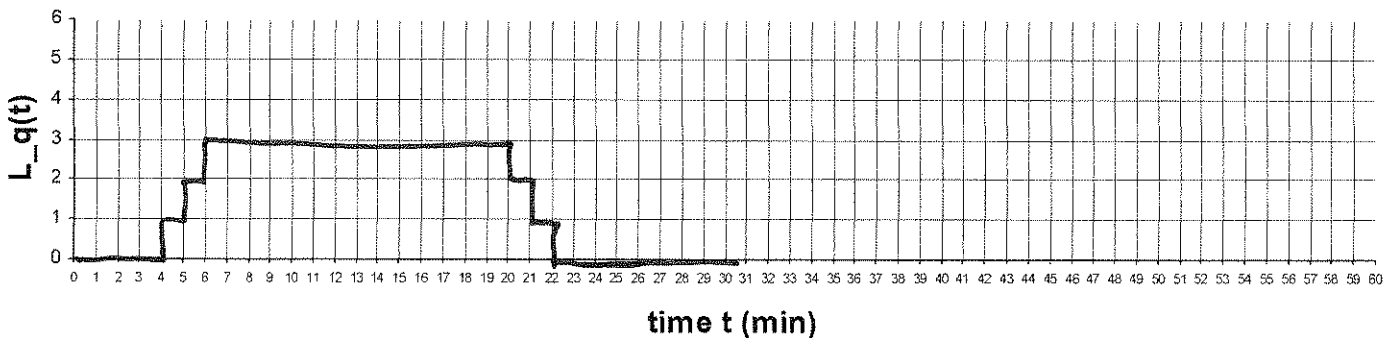
$$EW_q = \frac{\overline{L_q}}{\lambda} = \frac{85}{7} = 12.14 \text{ מ"ד}$$

1.3 נניח כי הוצאות המרכז הם

$$EW_Q + 5 \cdot N$$

בדקו, האם הוספה של מכונה רביעית תקטין את ההוצאות של המרכז עם שלוש מכונות צילום?

תשובה:



$$\frac{85}{7} + 5 \cdot 3 = \underline{\underline{27.14}}$$

3 = N ק"צ 111

$$\int_0^{\infty} L_q(s) ds = 18 + 16 + 14 = 48 \quad \text{ס"כ המותנה: קצות} \quad 4 = N \text{ ק"צ}$$

$$EW_q = \frac{48}{7}$$

$$\frac{48}{7} + 5 \cdot 4 = \underline{\underline{26.86}} \quad \text{111 ק"צ}$$

לכן, קוסמת של מכונה רביעית נ"פ"א 111 ק"צ 111

1.4 מה הוא ה-N המינימלי המבטיח שבסופה של כל שעה אף הזמנה לא נשארת במרכז (בתור או בטיפול)?

תשובה:

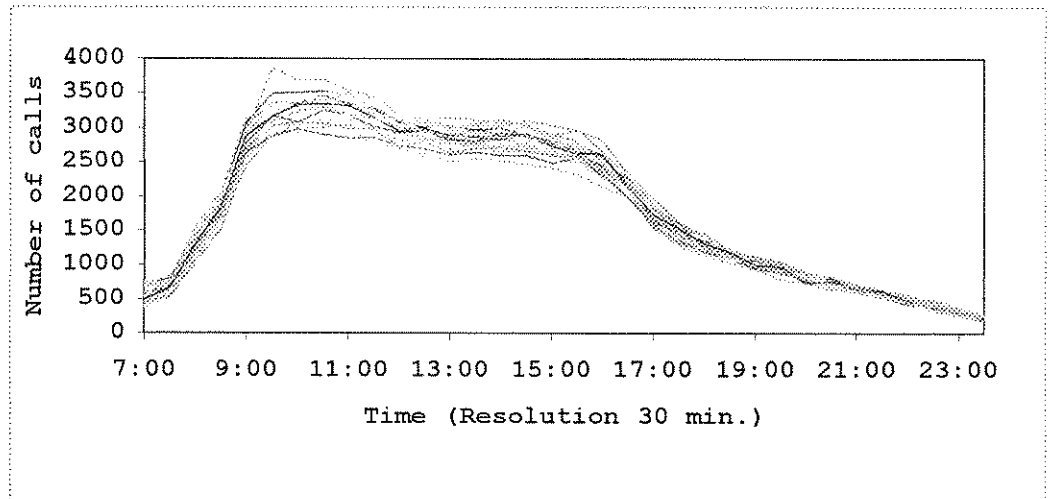
ל"א' 111 N=3-e פ'ס"מ

$$R = \lambda \cdot E[S] = 7 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \quad \text{העומס הממוצע של המערכת}$$

R > 2 פ'ס"מ N=2

לכן N=3

שאלה 2. תהליך מופע למוקד שירות טלפוני. חיזוי קצב הגעה (12 נקודות)



למעלה מתואר קצב מופע של לקוחות שפנו למוקד שירות טלפוני במהלך 25 ימי חול בחודש מסוים.

2.1 על סמך הגרף למעלה וחומר ההרצאות, סמנו ע"י עגול את המודל שמתאר בצורה המדויקת ביותר את תהליך המופעים למוקד השירות הטלפוני ביום מסוים:

- מודל נוזלים;
- תהליך פואסון עם קצב קבוע;
- תהליך פואסון עם קצב שמשתנה בזמן;
- תהליך חידוש.

2.2 כדי להשתמש במודלים של תורים לקביעת רמת איוש נדרשת, אנו מניחים שתהליך המופע על פני תקופות של חצי שעה הוא תהליך פואסון עם קצב קבוע (על פני חצי השעה). במוקד שמתואר ע"י הגרף למעלה, באיזה תקופה של יום החנחה הזאת היא בעייתית ביותר? נמקו.

תשובה:

בתקופה בין 7:30 - 9:00, כאשר קצב המופע גדול במיוחד.

2.3 נתחנו מדגם שכולל את 25 מספרי המופעים במהלך מחצית השעה 13:00-13:30. חישובו שהממוצע של המדגם שווה ל-2,842 והשונות שווה ל-24,539.

איזה מסקנה ניתן להסיק מהבדיקה הזאת לגבי תהליך המופע בתקופה 13:00-13:30? סמנו ע"י עגול את המסקנה הנכונה.

- תהליך המופע ביום מסוים אינו תהליך פואסון.
- תהליכי המופע בימים שונים הם תהליכי פואסון עם אותו קצב בכל הימים.
- אם תהליך המופע הוא תהליך פואסון, יש לו קצב שונה בימים שונים.

ההשערה השנייה שאנחנו רוצים לחזות את מספר המופעים ביום מסוים על סמך מידע מימים קודמים. נסמן ב- K את מספר אינטרוולים של חצי שעה במהלך יום עבודה. נניח ש- F_k הוא ערך התחזית למספר המופעים באינטרוול k , $1 \leq k \leq K$. N_k הוא מספר המופעים האמיתי במשך אינטרוול k .

2.4 נניח שאנו רוצים לחזות את מספר המופעים ביום מסוים על סמך מידע מימים קודמים. נסמן ב- K את מספר אינטרוולים של חצי שעה במהלך יום עבודה. נניח ש- F_k הוא ערך התחזית למספר המופעים באינטרוול k , $1 \leq k \leq K$. N_k הוא מספר המופעים האמיתי במשך אינטרוול k .

נניח שתהליך המופע על פני תקופות של חצי שעה הוא כן תהליך פואסון עם קצב קבוע ונניח שהצלחנו לחזות בוודאות בקצב שלו λ_k במשך אינטרוול k מסוים. באיזה ערך של F_k אתם מציעים להשתמש במקרה הזה? האם תצפו ש- $N_k = F_k$? נמקו תשובתכם.

תשובה:

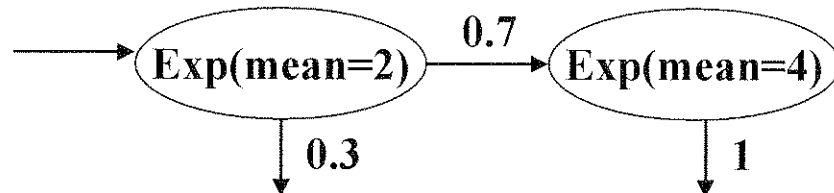
$$F_k = \lambda_k = E[\text{Poisson}(\lambda_k)]$$

$$N_k = F_k$$

בהסתברות לקבלת מספר מסוים של מופעים יחידה שווה ל-1.

שאלה 3. משכי שהיה בבית חולים. התפלגויות Phase-Type (15 נקודות)

נמצא שמשכי שהיה במחלקת טיפול נמרץ מתפלגים Phase-Type לפי התרשים הבא:



במילים חולה שמגיע למחלקה נכנס לפזה ראשונה ונמצא בה יומיים בממוצע. בהסתברות 0.3 החולה עוזב את המחלקה בסוף הפזה הזאת (נפטר או עובר למחלקת טיפול נמרץ בבית חולים אחר). בהסתברות 0.7 מצבו של החולה מתייצב והוא עובר לפזה שנייה שאורכה 4 ימים בממוצע. בסוף הפזה השנייה החולה עובר למחלקה רגילה בבית חולים.

3.1 חשבו את תוחלת זמן שהיה במחלקה.

תשובה:

$$2 \cdot 0.3 + (2+4) \cdot 0.7 = 0.6 + 4.2 = 4.8 \quad \mu'$$

3.2 סמנו בעגול את השם הנכון להתפלגות זמן שהיה במחלקה:

אקספוננציאלי, נורמלי, Erlang(Gamma), Coxian.

3.3 חולים חדשים נכנסים למחלקה בקצב של 5 חולים ביום. למה שווה ממוצע מספר החולים במחלקה בטווח ארוך?
תחת איזה הנחות נכונה תשובתך?

תשובה

$$L = \lambda \cdot W = 4.8 \cdot 5 = 24$$

מערכת צריכת עסקים במצב ג'3'

3.4 נניח שקובעים את מספר המיטות במחלקה כך שניצילות ממוצעת של מיטה לא תעלה על 80%. בהמשך לסעיף 3.3, מהו מספר המיטות המינימלי שמאפשר לעמוד ביעד הזה?

תשובה:

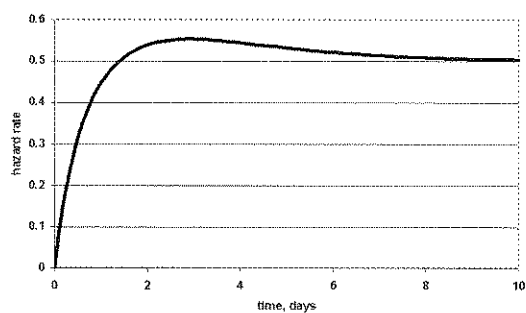
אם במחלקה יהיו 24 חופים במצב ג'3' ו- $\frac{24}{N}$

כאשר N - מספר מיטות.

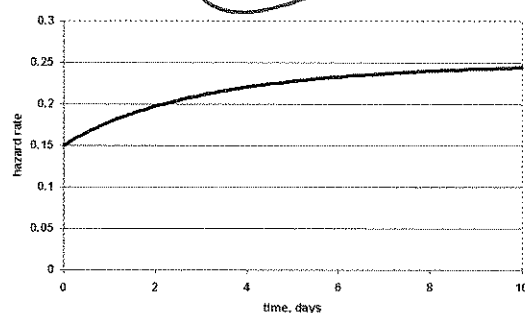
ל-3' חופים 80% $N=30$

3.5 בהמשך ציירנו שלושה גרפים של פונקציות קצב סיכון (hazard rates) שמתאימות לשלוש התפלגויות שונות. סמנו בעגול את הגרף שמתאר את פונקציות קצב הסיכון של זמן השחיה במחלקה לטיפול נמרץ, כפי שתואר בתחילת השאלה.

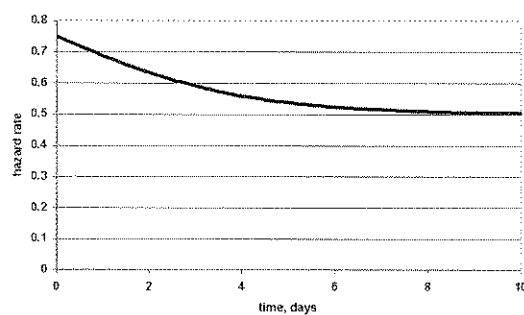
גרף B



גרף A



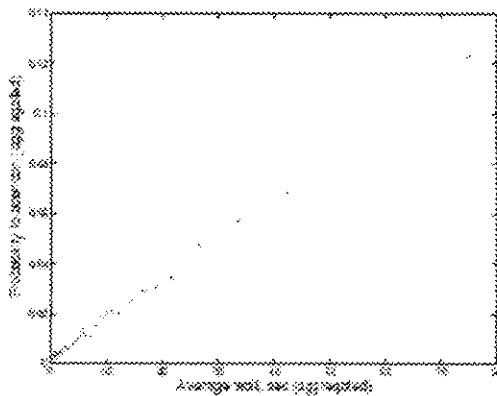
גרף C



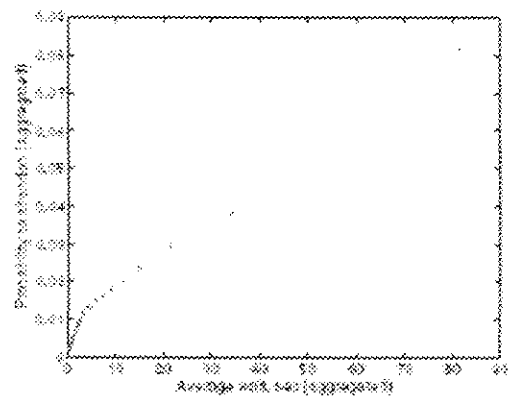
שאלה 4. סבלנות לקוחות במוקדי שירות טלפוני (7 נקודות)

בהמשך ציירנו ארבע הגרפים המתארים את הקשר בין אחוז הנטישות וזמן ההמתנה הממוצע, לכמה סוגי לקוחות במוקדי שירות טלפוני. נקודות בגרפים מתאימות לשעות מסוימות במהלך היום.

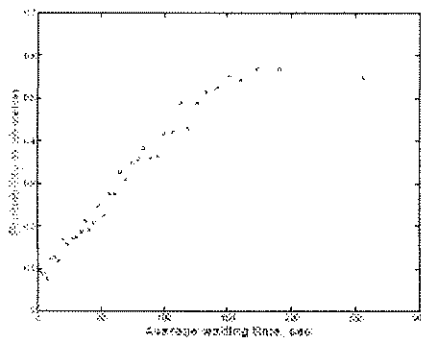
גרף B



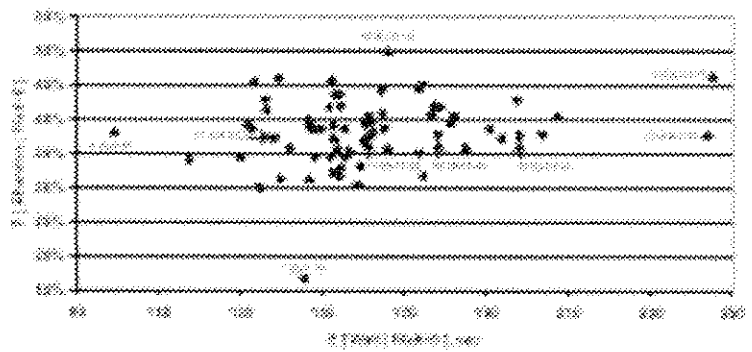
גרף A



גרף D



גרף C



4.1 איזה גרף מתאים לכל אחד מהתרחישים המתוארים להלן:

- לקוחות הם בעלי סבלנות אקספוננציאלית.

הגרף הנכון הוא B

- חלק מלקוחות נוטשים מייד אם נתקלים בתור, ולחלק האחר של הלקוחות יש סבלנות אקספוננציאלית.

הגרף הנכון הוא D

- לקוחות מסתגלים למצב במערכת: אם זמן המתנה ממוצע יותר גדול, גם סבלנות יותר גדולה.

הגרף הנכון הוא C.

- סבלנות הלקוחות איננה אקספוננציאלית. פונקצית קצב הסיכון (hazard rate) של הסבלנות מקבלת ערכים גבוהים בשניות ראשונות של ההמתנה ואחר כך יורדת ומתייצבת.

הגרף הנכון הוא A.

4.2 במקרה של סבלנות אקספוננציאלית, חשבו אמד של תוחלת הסבלנות על סמך הגרף שסימנתם בסעיף 4.1. תארו את דרך חישובכם.

תשובה:

במקרה של סבלנות אקספוננציאלית
(ערף B) אמד תוחלת סבלנות:

$$\frac{80}{0.14} \approx 570 \text{ מ"ל}$$

שאלה 5. תור M/M/1 (9 נקודות)

נתון מודל $M/M/1$ לתחנת שירות, עם הפרמטרים λ ו- μ . נניח ש- $\lambda < \mu$ ושהתחנה נמצאת במצב יציב. נסמן (כרגיל) :

- L = מספר הלקוחות במערכת (בתור או בשירות) במצב יציב.
- W = משך השהיה במערכת (בתור או בשירות) ללקוח במצב יציב.

5.1 הסבירו מדוע מתקיים השוויון בהתפלגות הבא:

$$W \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{L+1} S_i$$

כאשר $\stackrel{d}{=}$ מסמן שוויון בהתפלגות, והסדרה $\{S_1, S_2, \dots\}$ היא סידרת משתנים מקריים בלתי-תלויים שווי התפלגות אקספוננציאליים עם פרמטר μ .

חסבר : דפי PASTA דקוה "רואק" ל דקוהות בזמן קטן.
 קוא נמצא במערכת עז דקוהות האדא קבד
 ע'רות ובנוסף עז קוא קבד ערות בזמן.
 (גדעס אוסר זכרון עכא חשוג עס קוא אהו נמצא
 באמצע ערות ברעז
 הומועז)

5.2 חישבו בכיתה שהתפלגות L היא גיאומטרית עם פרמטר p . מהו p ?

תשובה:

נעזר לעזות ערות $\rho = \lambda / \mu$

ברמטר $\rho = 1 - p$

5.3 מהי ההתפלגות של W ? תנו תשובה מדויקת ככל שתוכלו.

תשובה:

$$W = \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{\mu(1-p)}\right)$$

7207

$$1-p \quad \gamma \Gamma \gamma \gamma \quad p \delta \quad \text{Geom}_p(1-\delta h/n) \quad \varepsilon \delta \varepsilon n \quad L+1$$

$$\sum_{i=1}^{\text{Geom}_2(1-p)} \exp(\text{mean} = \frac{1}{M}) = \exp(\text{mean} = \frac{1}{M(1-p)})$$

י' ע"ח פ' ממנו הסתברות פ' כ"ז ע"ה

$p'' \delta K' z \perp \perp \partial O P K \quad N^N \quad \delta e \quad \rightarrow CN / CL$

ה'תק"ל י"ב י"ג י"ד י"ה י"ו י"ז י"ח י"ט

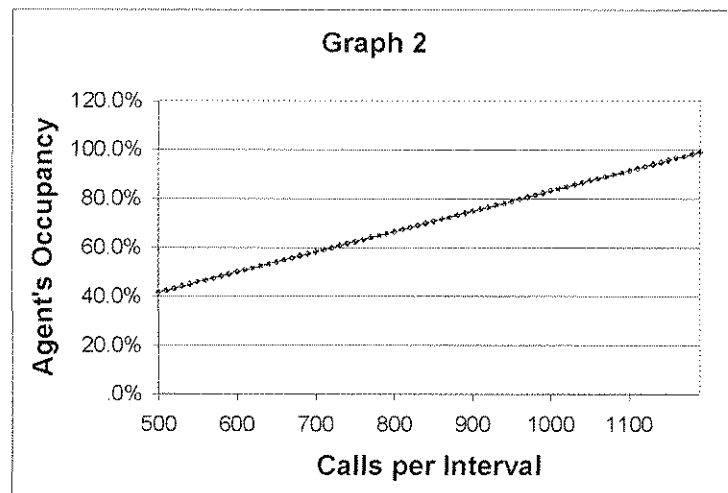
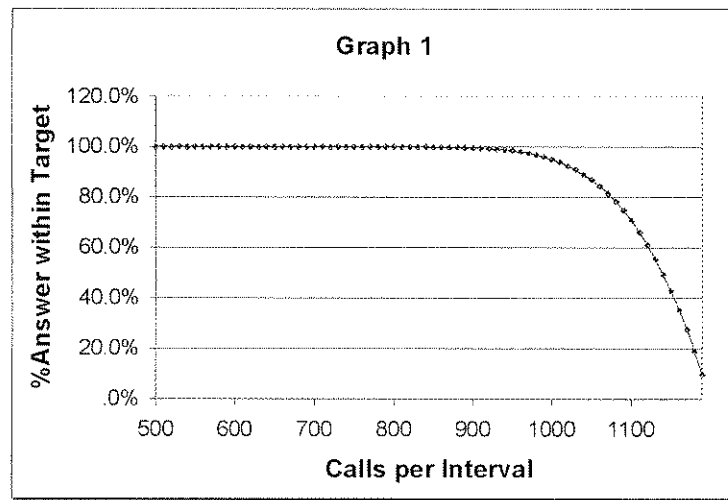
שאלה 6. מערכות תורים, 4CallCenters (15 נקודות)

הערה. סעיפים 6.1, 6.2 ו-6.3 להלן בלתי קשורים זו בזו.

6.1 לפניכם שני גרפים שהתקבלו בעזרת התוכנה 4CallCenters, עבור מודל $M/M/1000$.

גרף 1 מתאר הסתברות לקבלת תשובה מיידית (Target time = 0) כנגד קצב מופע הלקוחות לשעה.

גרף 2 מתאר נצילות השרתים כנגד קצב מופע הלקוחות לשעה.



6.1.1 על סמך גרף 2, מהו ממוצע מספר הלקוחות בשירות כאשר קצב מופע הלקוחות לשעה הוא 1000?

תשובה:

אם $\lambda = 1000$ ו-80% השרתים

ממוצע מספר הלקוחות בשירות

$$L_{service} = n\rho = 1000 \cdot 0.8 = \underline{800}.$$

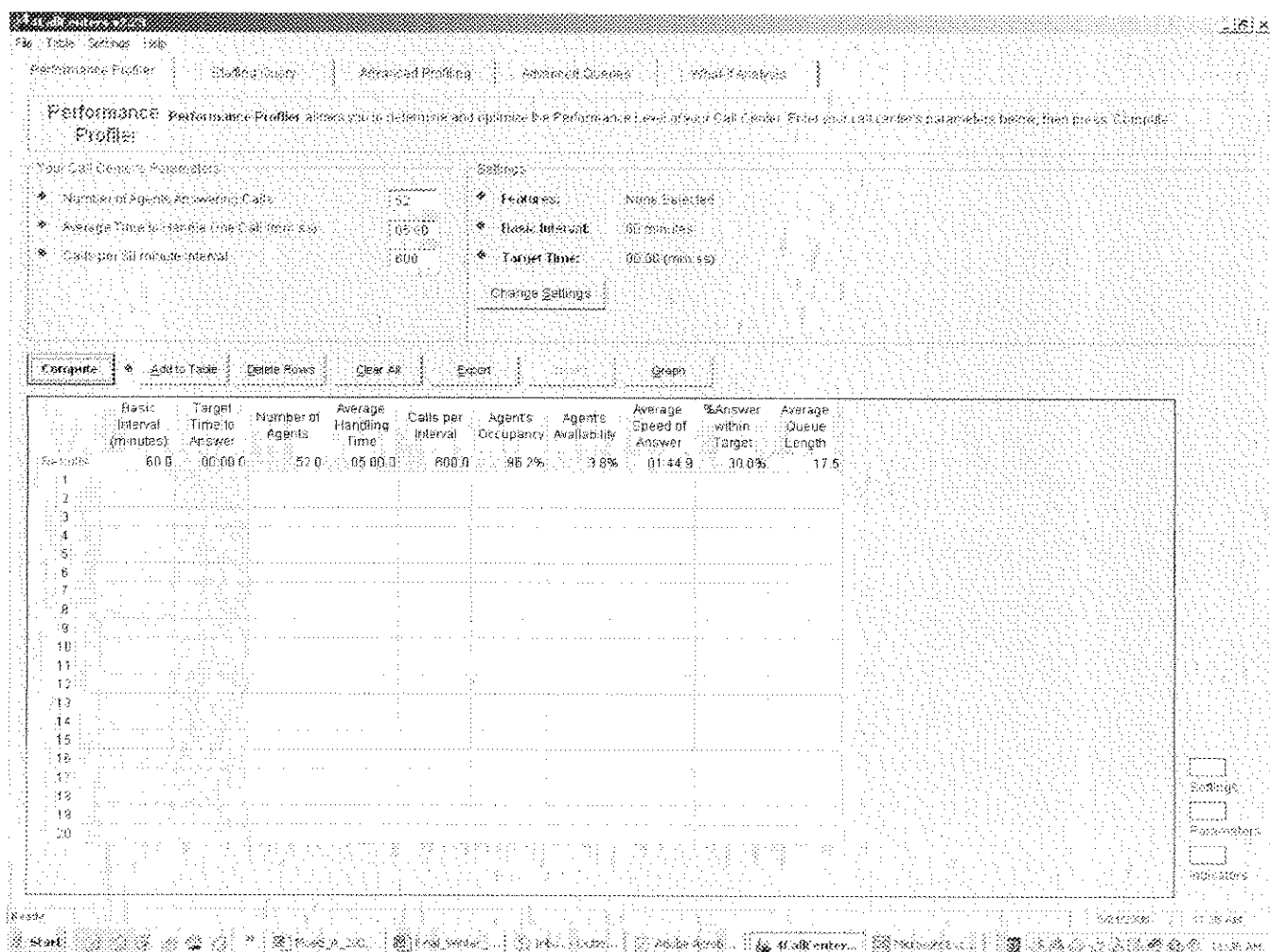
6.1.2 על סמך שני הגרפים הנ"ל, ציינו מתי (ז"א, עבור אילו ערכים של קצב מופע הלקוחות לשעה) ניתן, בעזרת הגרפים בלבד, לקבל את ממוצע סה"כ מספר הלקוחות במערכת. הסבירו.

תשובה:

$$\lambda \leq 900 \quad 7128$$

הסבר:

במקרה זה כושר מקבלי שירות מ"ק, מכין אין מר ומס העדוהות במערכת שווה למסבר העדוהות בשירות שאפשר להשיג
כמו ב 6.1.1 . 6.2 הטבלה הבאה מחווה פלט מ-4CallCenters.



6.2.1 על איזו מערכת תורים נעשה הפלט הניילי? תנו תשובה מדויקת עד כמה שאפשר (כולל הפרמטרים של המודל הנידון).

תשובה:

$$M/M/n$$

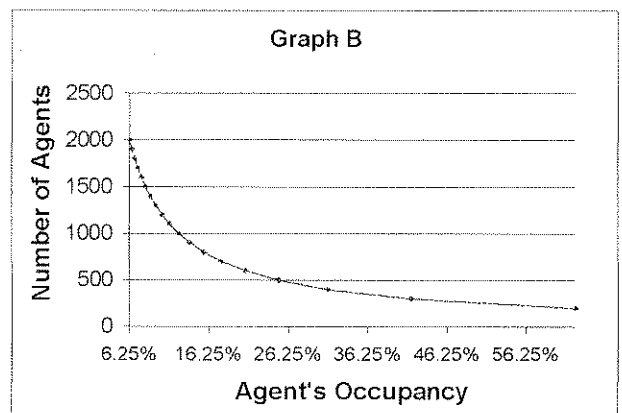
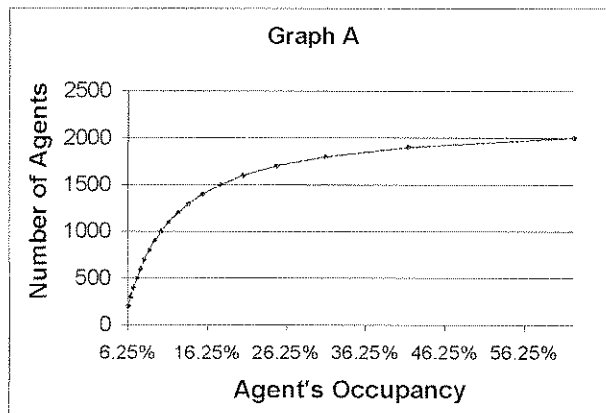
$\lambda = 600/\text{שע}$ קצב מ"ש
 $\mu = 12$ קצב שירות
 $n = 52$ מספר עוזרים

6.2.2 על סמך הטבלה הנייל חשבו את ממוצע מספר האנשים במערכת.

תשובה:

$$L = L_q + \rho = 17.5 + 52 \cdot 0.982 = 68.56$$

6.3 לפניכם שני גרפים כך שאחד מהם מתאר את מספר השרתים במודל $M/M/N$ כתלות בנצילות השרתים. הניחו שקצב מופע וקצב שירות הם קבועים.



ציינו, איזה גרף הוא הנכון. נמקו בקצרה

הגרף הנכון הוא B.

הסבר:

$\rho = \frac{\lambda}{n\mu}$, $\rho < 1$ צריך להיות צריכה $\rho < 1$
 כאשר n עולה.

שאלה 7. תחומים תפעוליים במערכת שירות (18 נקודות)

להלן נתונות 3 דוגמאות של דו"חות ACD ממוקד שירות טלפוני בארץ.

דו"ח 1

Time	Arrivals	Average Service Time (sec)	Offered Load	Number of Agents	Fraction Abandoning (%)	Average Wait (sec)	Served Immediately (%)
22:00	476	160.1	42.3	34.3	21.8	104.4	0.8
22:30	416	196.5	45.4	28.9	38.7	163.2	0.4
23:00	346	194.0	37.3	24.8	41.0	171.1	0.9

דו"ח 2

Time	Arrivals	Average Service Time (sec)	Offered Load	Number of Agents	Fraction Abandoning (%)	Average Wait (sec)	Served Immediately (%)
13:30	859	70.9	33.8	53.6	0.0	0.0	100.0
14:00	768	75.1	32.0	57.3	0.0	0.0	100.0
14:30	700	80.2	31.2	52.8	0.0	0.0	100.0
15:00	596	84.5	28.0	39.0	0.0	1.6	88.1

דו"ח 3

Time	Arrivals	Average Service Time (sec)	Offered Load	Number of Agents	Fraction Abandoning (%)	Average Wait (sec)	Served Immediately (%)
13:00	176	202.2	19.8	18.8	5.7	30.6	23.5
13:30	154	207.1	17.7	20.1	1.9	9.5	54.2
14:00	169	196.3	18.4	20.9	1.8	5.4	74.7

7.1 חסבירו את דרך חישוב של העומס המוצע (offered load), בעזרת הפרמטרים האחרים בדו"חות.

הסבר:

העומס המוצע (offered load)

$$R = \frac{\lambda \cdot E[S]}{1800}$$

λ - מספר קווי שירות (מספר סוכנים)

$E[S]$ - זמן שירות ממוצע (בדקות)

1800 - מספר שניות לדקה (60 * 30)

7.2 הסבירו כיצד יכול להיות שמספר השרתים בדו"ח (number of agents) הוא איננו מספר שלם.

הסבר:

כנראה, מס' השרתים השתנה במהלך חצי
שנה ובקו"ח אף רואץ ממוצע מספר השרתים
במהלך חצי שנה.

7.3 סמנו תחום תפעולי שלדעתכם מתאים לכל אחד מהדו"חות (QED, Quality-Driven, Efficiency-Driven)

ED דו"ח 1

QD דו"ח 2

QED דו"ח 3

7.4 בהמשך לסעיף 7.3, כתבו את כלל איוש שנראה מתאים ביותר לכל דו"ח, המקשר בין העומס המוצע (offered load) R ומספר שרתים n. חישבו דרגות שירות (ערכי הפרמטרים של כללי איוש) עבור השורה השניה של כל דו"ח.

$n = R - \gamma R, \gamma > 0$ דו"ח 1

עבור השורה השנייה
 $\gamma = 1 - \frac{n}{R} = 1 - \frac{28.9}{45.4} = 0.36$

$n = R + \gamma R, \gamma > 0$ דו"ח 2

$\gamma = \frac{n}{R} - 1 = \frac{57.3}{32} - 1 = 0.79$

דו"ח 3

$n = R + \beta \sqrt{R}, -\infty < \beta < \infty$

$\beta = \frac{n - R}{\sqrt{R}} = \frac{20.1 - 17.7}{\sqrt{17.7}} = 0.57$

7.5 נניח שעבור כל האינטרוולים המיוצגים בדו"חות, מספר המופעים היה גדל פי 9 וגם מספר השרתים היה גדל פי 9. עבור השורה השניה של דו"חות 1 ו-2 תנו הערכה לממוצע זמן המתנה תחת תרחיש שכזה.

דו"ח 1

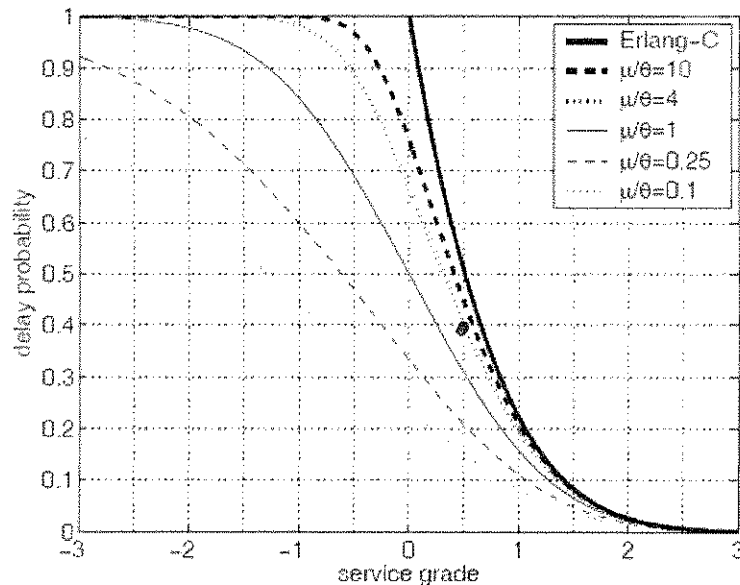
163 שניות. בתחילת דף 1 מן המתנה
מתכנסם עקבות.

דו"ח 2

0. בתחילת דף 2 מן המתנה מתכנסם
עקבות.

סעיף 7.6 להלן בלתי קשור בסעיפים קודמים.

7.6 נניח שבמוקד שירות מסוים 100 שיחות מגיעות לדקה ו-105 מוקדנים נותנים שירות טלפוני ללקוחות. נניח שזמן שירות ממוצע שווה לדקה אחת והסבלנות הממוצעת שווה ל-4 דקות. בעזרת הגרף להלן תנו הערכה לאחוז הלקוחות המקבלים שירות מייד ברגע מופעם. (μ שווה לקצב שירות ו-θ שווה לקצב נטישה)



תשובה:

$$\frac{\mu}{\theta} = \frac{1/E[time | no T]}{1/E[time | delay]} = 4, \quad R = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{100}{1} = 100$$

$$\beta = \frac{n-R}{\sqrt{R}} = \frac{105-100}{\sqrt{100}} = 0.5$$

$$P\{W > 0\} = 40\% \quad \text{כך } \delta \text{ } \delta \text{ } \delta$$

$$P\left\{ \frac{\delta \Delta P \delta}{\mu \theta e} \right\} = 60\%$$

שאלה 8. מודלים של נזלים (12 נקודות)

נתונה מערכת תורים עם סוג אחד של לקוחות, כאשר קצב המופע הוא λ וקצב השירות μ .

נבנה מודל נזלים למערכת זו עבור:

$$X(t) = \text{סה"כ מספר לקוחות במערכת (בשירות או בתור)}, \text{ בזמן } 0 \leq t.$$

8.1 נניח כי $X(0) = 0$ ומספר השוטים במערכת אינו מוגבל (דהיינו, כל לקוח המופיע מקבל שירות מייד).

כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $X(t)$, $0 \leq t$.

תשובה:

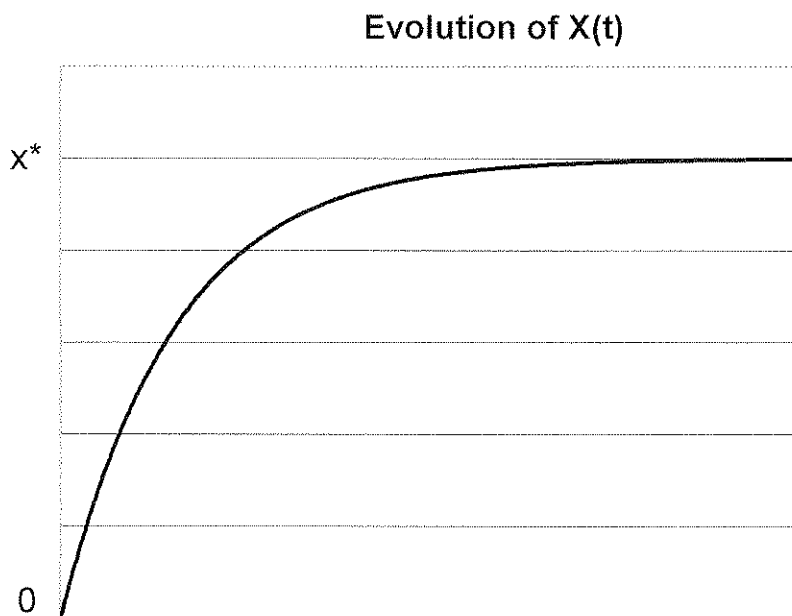
$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = \lambda - \mu X(t) \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

8.2 בהמשך לסעיף 8.1, כתבו משוואת ההפרשים המתאימה עבור $t_0, t_1, t_2, \dots$.

תשובה:

$$X(t_n) - X(t_{n-1}) = \lambda(t_n - t_{n-1}) - \mu X(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})$$

8.3 בגרף שלהלן מצויר $X(t)$, עבור $0 \leq t$, עבור $X(0) = 0$.



מה הוא הערך x^* , אליו מתכנס $X(t)$?

תשובה:

$$x^* = \frac{\lambda}{\mu}$$

אם $X(t) = x^*$, כלומר $\lambda = \mu x^*$, אז $x^* = \frac{\lambda}{\mu}$.
עונה על שאלה 8.3.

8.4. בהמשך לסעיף הקודם, ציינו מה היה קורה לדינמיקה של $X(t)$, עבור $X(0) = x^*$. הסבירו.

תשובה:

$$X(t) = x^*, t \geq 0 \quad \delta \circ \delta \quad p' \delta \supset pN \quad \sqcup'' \cap$$

הסבר:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda - \mu \frac{x}{M} = 0, \quad X(t) = x^* = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{PIC}$$

7812P 10'7 X(4) 7'3P5121