



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגל : גנדי שייחט

תאריך הבחינה : 13.02.2005

הנדסת מערכות שירות - 096324

מועד א' - סמסטר חורף תשס"ה 2005

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- **המבחן בחומר סגור, וללא מחשבון.**
- המבחן כולל 20 עמודים, כולל עמוד זה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מחותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

מגפת השפעת	מתוך 10 נקודות	שאלה 1	ניקוד:
דיאגרמות מלאי - Little	מתוך 8 נקודות	שאלה 2	
זמני שירות, CV	מתוך 4 נקודות	שאלה 3	
המתנה וסבלנות	מתוך 5 נקודות	שאלה 4	
מודל נוזלים	מתוך 6 נקודות	שאלה 5	
QED Q's, 4CC	מתוך 9 נקודות	שאלה 6	
פונקציות סיכון	מתוך 5 נקודות	שאלה 7	
משוואת Lindley	מתוך 3 נקודות	שאלה 8	
	מתוך 50 נקודות	סה"כ	

בהצלחה !

שאלה 1 (10 נקודות)

עקב שפעות החורף, מצוקת האישפוז בבתי החולים בכלל ובמחלקות הפנימיות בפרט, נמצאת בראש כותרות החדשות. נתון מרכזי המצוטט רבות כדי להמחיש מצוקה זו הוא "תפוסת המחלקה הפנימית", שם מאושפזים חולי השפעת. בין היתר, נאמר ש"סטנדרט אישפוז מערבי מינימלי הוא 90% תפוסה ממוצעת למחלקה". מאידך התפוסות המצוטטות בימים אלו יכולות להגיע ל-150% ויותר, בלויי צילומים של מאושפזים השוכבים במסדרונות, כאשר חדרי המחלקה מלאים עד אפס מקום.

דרך מקובלת לחישוב "תפוסת המחלקה", על פני N ימים, היא

$$\text{תפוסה ביום } i = \frac{\text{מספר מיטות תפוסות בשעה } 23:00, \text{ ביום } i}{\text{מספר מיטות כולל במחלקה}}$$

$$\text{תפוסת מחלקה} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\text{תפוסה ביום } i]$$

1.1 תנו שתי סיבות (עיקריות לדעתכם), אחת מהיבט המנהל ואחת מהיבט הפציינט המטופל, מדוע סטנדרט "תפוסת המחלקה" לוקה בחסר, כמדד עיקרי או יחיד המתאר את תפעולה של המחלקה.

סיבה 1 (מנהל) : ביום בודד, סביר ש- 23:00 לא מייצג את כל היום. על פני תקופה, הממוצע מסתיר ימים עמוסים יותר ופחות.

לכן: 90% תפוסה על N ימים, פרושו שסביר שקיימים ימים נניח עם תפוסה של 110% ב-23:00 ואז במשך יום שכזה סביר שקיימים שעות עם תפוסה 150%.

סיבה 2 (פציינט) : התפוסה מתעלמת מרמת שירות תפעולית, למשל, זמני המתנה עד קבלה למחלקה ועוד...

1.2 תנו דוגמא לתרחיש שיכול להביא לתפוסת מחלקה ביום מסוים של 150%.

דוגמא: מגפת שפעת, כאשר הרבה אנשים מגיעים למחלקה בו זמנית. אזי, כדי לאשפז את כולם, מוסיפים יותר מיטות במסדרונות. התפוסה היא 150% כאשר, למשל, יש בחדרי המחלקה 18 מיטות ובמסדרון 9 מיטות.

1.3 במחלקה פנימית שבה 50 מיטות, נמדד בתקופת השפעת (כ-100 ימים) שעברו דרכה 500 חולים, וממוצע משך השהייה של חולה במחלקה היה 9 ימים.

1.3.1 בעזרת נתונים אלו, תנו אמד לתפוסת המחלקה הפנימית:

חישוב האמד: לפי Little : קצב המעבר $\lambda = \frac{500}{100}$. ממוצע זמן שהיה $W = 9$ ימים. אזי ממוצע מספר

$$\text{חולים ביום} = L = \lambda W = \frac{500}{100} \times 9 = \frac{4500}{100} = 45 \text{ מס' מיטות}$$

1.3.2 האם, לפי דעתכם, המחלקה הפנימית עומדת ב"סטנדרט האישפוז המערבי המינימלי"? (הניחו שהסטנדרט מחושב בדרך המקובלת, כפי שהוגדר בתחילת שאלה 1). הסבירו בקצרה.

תשובה: כן \ לא \ אולי, עם סבירות יותר ל-"כן"

הסבר: תלוי אם שעה 23:00, ביחס ליתר היום, היא שעת עומס נמוך \ גבוה \ מייצג.

מכיוון שממוצע זמן שהיה הוא 9 ימים, סביר כי שעה 23:00 אכן מייצגת את התפוסה הימית.

באופן פורמלי: ניתן לחשב את L לפי

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [i \text{ ביום } 23:00, \text{ מספר מיטות תפוסות בשעה } 23:00]$$

$$= \frac{L}{\text{מספר מיטות כולל במחלקה}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{i \text{ ביום } 23:00, \text{ מספר מיטות תפוסות בשעה } 23:00}{\text{מספר מיטות כולל במחלקה}} \right]$$

= ההגדרה של תפוסת מחלקה מתחילת השאלה.

1.4 במחלקה פנימית של בית חולים קטן יש 5 מיטות אשפוז. נתון שהתפוסה הממוצעת במחלקה במשך תקופת מגפת השפעת עמדה על 90%.

באיזו תחום פעילות תיפעולי (ED, QD, QED), יש לצפות, עובדת מחלקה זו? ובהתאם, מה ההשלכות שיש לתחום זה על החולים המיועדים למחלקה?

תחום תפעולי: Efficiency-Driven (ED)

השלכות: כמעט כולם יצטרכו להמתין עד שיאושפזו במחלקה (למשל, יעוכבו במיון).

1.5 מנהל מחלקה פנימית נדרש לענות על השאלה המורכבת הבאה :
 במשמרת (8 שעות), בעיצומה של מגפת השפעת כאשר כל המיטות תפוסות, כמה רופאים נדרשים להיות נוכחים
 במחלקה כדי שהמחלקה תתפקד ברמה נאותה?
 1.5.1 הגדירו " תתפקד ברמה נאותה " בעזרת רמת שירות תפעולית מתאימה.

הגדרה: למשל, ניתן להגדיר בצורה הבאה :

לפחות 90% מהקריאות לרופא נענו תוך 10 דקות מרגע הקריאה.

1.5.2 באיזו מודל תורים שלמדנו, ניתן להשתמש כדי לעזור לענות על השאלה למנהל המחלקה? הסבירו בקצרה את
 אופן השימוש במודל.

מודל: $M / M / N$, כאשר N – מספר הרופאים.

הסבר: קיימות נוסחאות סגורות למודל $M/M/N$, או ניתן להשתמש ב- $4CallCenters$, כדי לחשב את ה-
 N המינימלי עבורו רמת השירות הנ"ל מושגת.

1.5.3 מהם הפרמטרים שנדרשים כדי להפעיל את המודל? מה משמעות כל אחד מהם, בהקשר של שימוש המודל?
 (הפרמטר λ הוכנס כדוגמא לחלק מהתשובה).

<u>משמעות</u>	<u>פרמטר</u>	
<u>קצב פניות חולים לרופאים</u>	λ	1.
<u>קצב טיפול בחולים באישפוז</u>	μ	2.
<u>מספר רופאים</u>	N	3.

1.5.4 כיצד תאמדו כל אחד מהפרמטרים מסעיף 1.5.3 ?

<u>שיטת אמידה</u>	<u>פרמטר</u>
1. $\hat{\lambda} = \frac{\text{מספר הפונים ב- } K \text{ יחידות זמן}}{K}$, עבור K מספיק גדול	λ
2. $\hat{\mu} = \frac{L}{\text{סכום } L \text{ זמני הבראה של חולים}}$, עבור L מספיק גדול	μ

הערה: סביר לקחת את יחידת הזמן כשעה, ואת הממוצע לחשב על פני השעות העמוסות במשמרת.

שאלה 2 (8 נקודות)

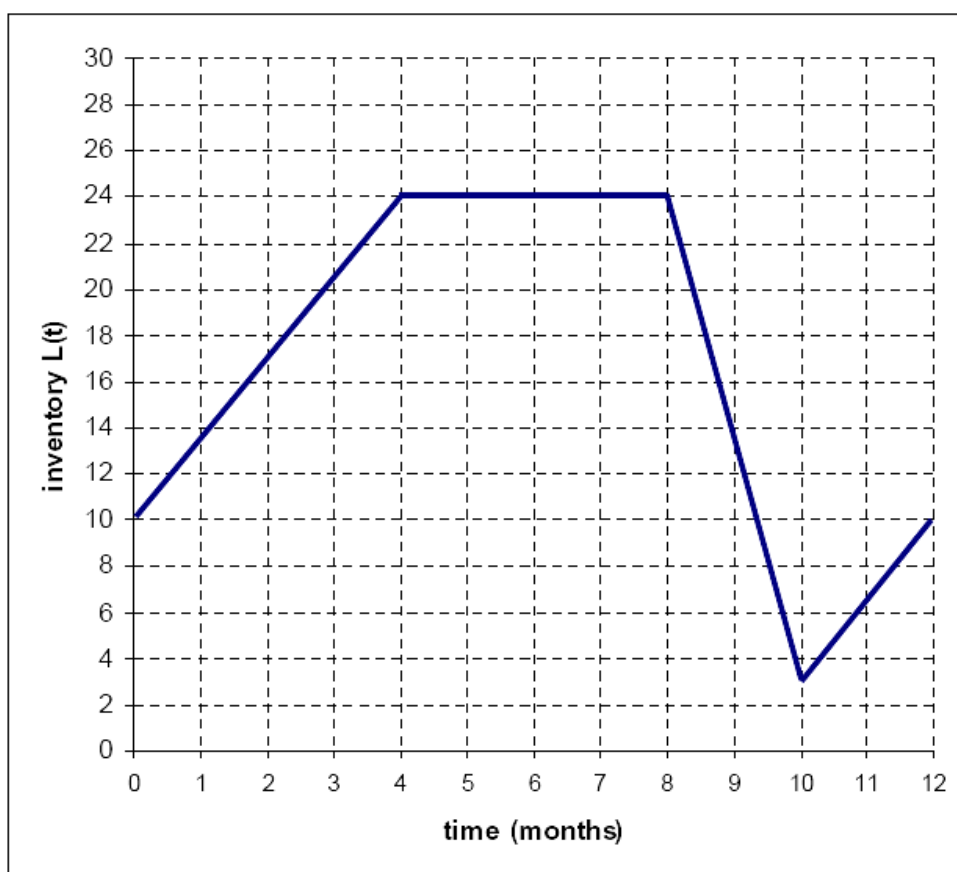
בשנה אופיינית, סופרמרקט מקבל אספקת דגים בקצבים הממוצעים הבאים :

- 14 טון לחודש, בחודשים ינואר-אפריל,
- 10.5 טון לחודש, בחודשים מאי-אוגוסט,
- 0 טון לחודש, בחודשים ספטמבר-אוקטובר,
- 14 טון לחודש, בחודשים נובמבר-דצמבר.

- הדגים נשארים במקפא (*freezer*) , לצורך מכירה במשך השנה.
- קצב מכירת הדגים קבוע ונתון על-ידי 10.5 טון לחודש.
- נניח שבתחילת שנה אופיינית יש 10 טון דגים במקפא.

2.1 ציירו דיאגרמת מלאי ממוצע $L(t)$ במקפא, כפונקציה של הזמן, לאורך שנה (12 חודשים).

דיאגרמת מלאי



2.2 מהי הרמת המוצעת של מלאי על פני שנה?

חישוב:

$$\begin{aligned} 17 \times \frac{4}{12} + 24 \times \frac{4}{12} + 13.5 \times \frac{2}{12} + 6.5 \times \frac{2}{12} &= \\ \frac{17}{3} + 8 + \frac{27}{12} + \frac{13}{12} &= 17. \end{aligned}$$

2.3 מהו משך השהיה הממוצעת של דג במקפא? הסבירו תשובתכם, והצדיקו את ההנחות הנדרשות כדי שתשובתכם תהיה קבילה. (שימו לב שהמלאי בתחילת השנה אינו 0).

הנחות: ניתן להשתמש ב- *Little*, כיוון שכל תקופה מתחילה ומסתיימת באותו ערך 10.

חישוב: קצב כניסה = קצב הגעה, אזי $\lambda = 10.5$. מסעיף 2.2 קיבלנו $L = 17$.

$$W = L / \lambda = 1.62 \quad \text{אזי לפי } Little :$$

שאלה 3 (4 נקודות)

הגרפים בשני בעמודים הבאים מתארים זמנים של ניתוחי יום ללא אשפוז (גרף 1) לעומת ניתוחים המחייבים אשפוז (גרף 2)

3.1 הגדירו מקדם השתנות (מסומן ב-CV, או C) של התפלגות.

$$\underline{\text{הגדרה:}} \quad C = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)} = \frac{SD(X)}{E(X)} = \frac{\text{סטית תקן}}{\text{ממוצע}}$$

3.2 הסבירו מדוע מקדם ההשתנות הוא מדד טבעי להשתנות סטוכסטית (ומתאים יותר מהשונות או סטית התקן).
תנו דוגמא מספרית להסברכם. השתמשו בגרפים 1 ו-2 כדי להדגים תשובתכם.

הסבר: כדי למדוד פיזור יחסי סביב הממוצע (יחסי – ביחס לגודל הממוצע).

דוגמא מספרית: למשל $SD = 1$, $E = 10^6$, נותנים $C = 10^{-6}$ ז"א השתנות סטוכסטית זניחה ביחס לממוצע.

גרף 1: ניתוחי יום – CV קטן מ-0.4

גרף 2: ניתוחים מורכבים – CV גדול מ-1.9

נניח כי עליכם לקרב את התפלגויות זמני הניתוחים על ידי אחת משתי התפלגויות: Erlang או Hyper-Exponential. איזו התפלגות מתאימה לניתוחי יום, ואיזו לניתוחים המחייבים אשפוז? נמקו תשובתכם במשפט יחיד.

Erlang ניתוחי יום ללא אשפוז (גרף 1):

Hyper-Exponential ניתוחי יום המחייבים אשפוז (גרף 2):

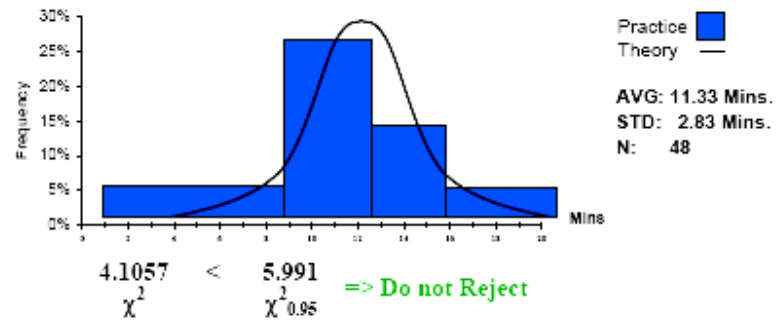
נימוק:

ל- Erlang יש $CV \geq 1$

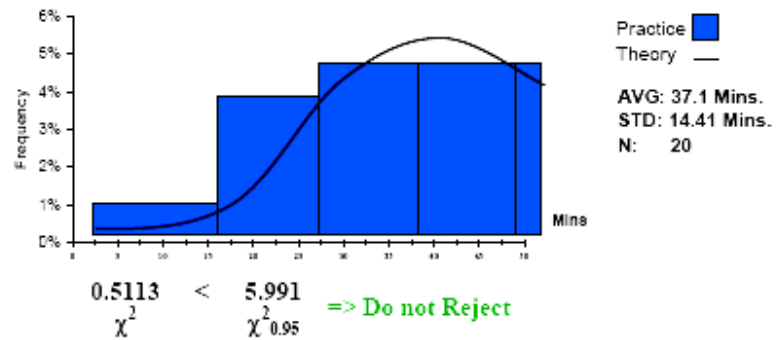
ל- Hyper-Exponential יש $CV \leq 1$

Ambulatory Operations Time Production of Health

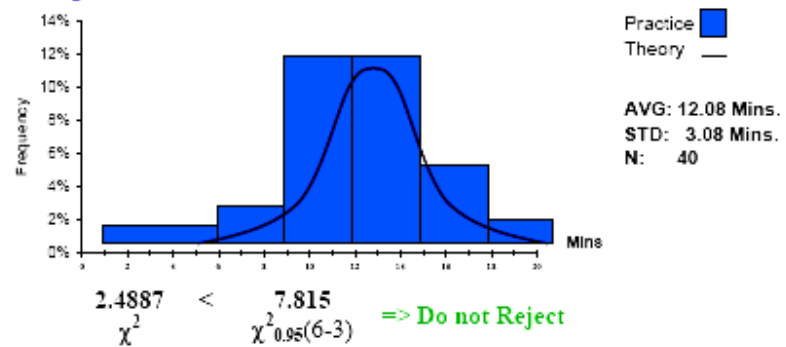
Cystoscopy:



TURT / TURP:



Curettage:



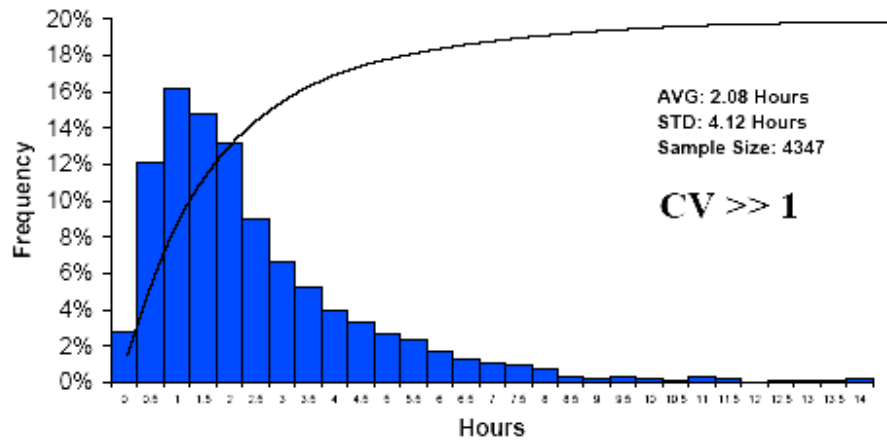
CV << 1

37

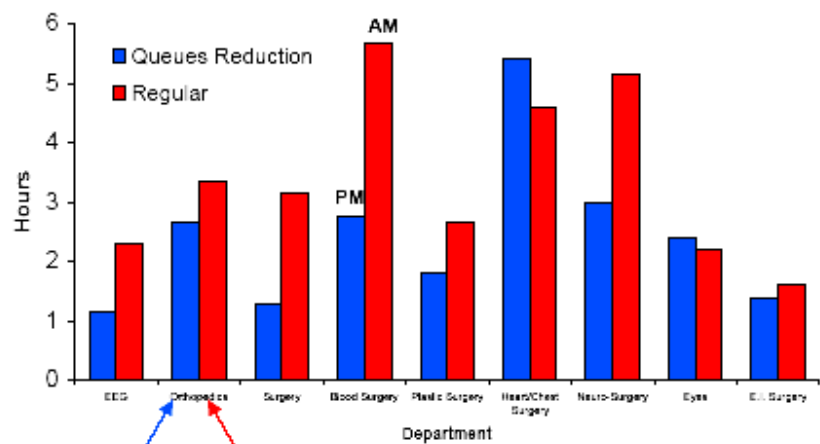
Graph Number 1

Operations Time In a Hospital

Operations Time Histogram:



Operations Time - Morning vs. Afternoon:



Afternoon,
by Case

Morning,
by Hour

Ethical?

Even Doctors Can Manage!

39

Graph Number 2

שאלה 4 (5 נקודות)

את חווית ההמתנה של לקוח במרכז טלפוני סיכמנו באופן הבא :

- הזמן שלקוח מצפה להמתין
- הזמן שלקוח מוכן להמתין
- הזמן שלקוח נדרש להמתין
- הזמן שלקוח למעשה המתין
- הזמן שלקוח הרגיש שהמתין

4.1 מודל *Erlang-A* דורש כקלט את הממוצע של אחד מחמשת הזמנים הנ"ל : מהו?

תשובה: הזמן שלקוח מוכן להמתין - R

4.2 מודל *Erlang-A* נותן כפלט התפלגות של שניים מחמשת הזמנים הנ"ל : מהם?

תשובה:

1. הזמן שלקוח נדרש להמתין V

2. הזמן שלקוח למעשה המתין W

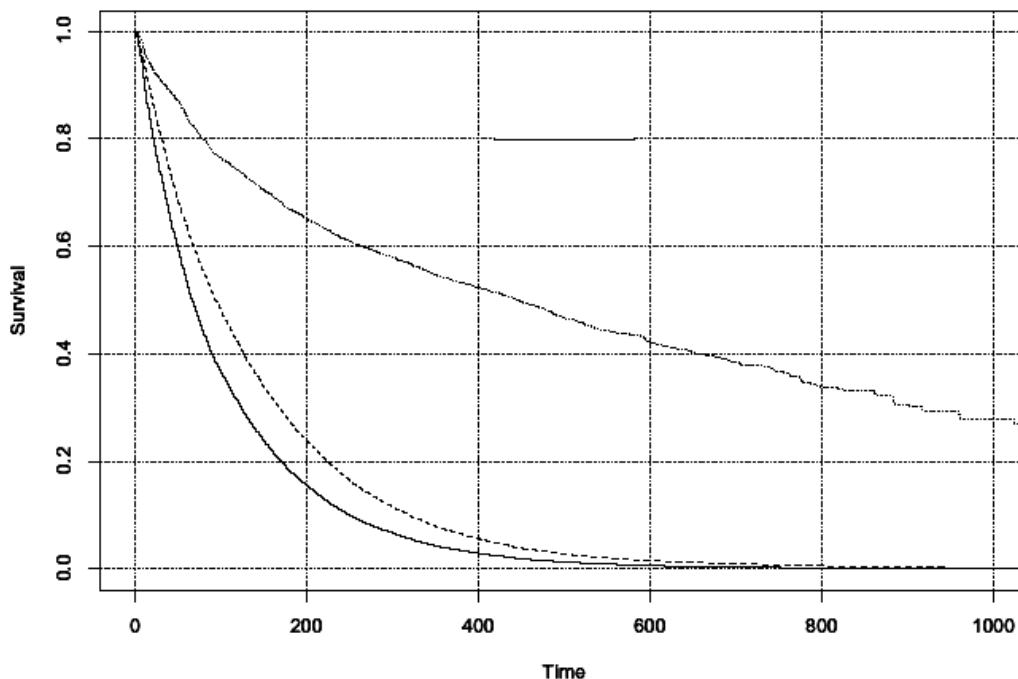
4.3 כאשר לקוחות הם מנוסים ורציונליים, סביר להניח שחמשת הזמנים הנ"ל מיוצגים בעצם ע"י שלשת הזמנים מסעיפים 4.1 ו-4.2. הסבירו בקצרה הנחה זו.

הסבר:

לקוחות מנוסים, אזי מצפה = נדרש

לקוחות רציונליים, לכן סביר כי למעשה = הרגיש

4.4 הגרף הבא מתאר שלוש פונקציות שרידות (Survival Functions) אמפיריות של שלושת הזמנים מסעיפים 4.1 ו-4.2, כפי שנאמדו במוקד טלפוני.



4.4.1 לאיזה זמן מתאים הגרף התחתון? הסבירו בקצרה.

תשובה: הזמן שלקוח למעשה המתין

הסבר: כיוון ש $W = \min\{R, V\}$, ראה סעיפים 4.1-4.2 להגדרת ה- V, R ו- W .

A קטן סטוכסטית גם מ-R וגם מ-V.

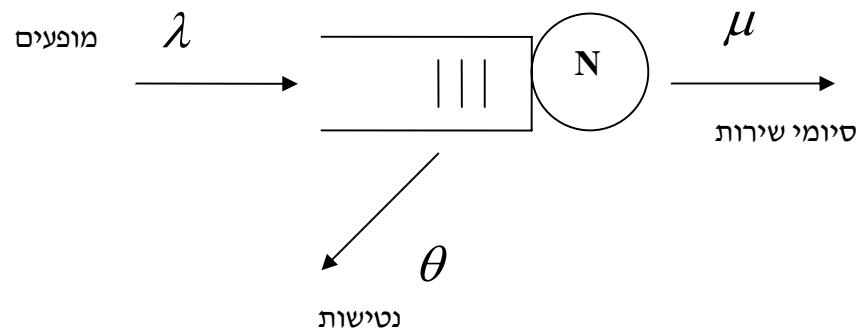
4.4.2 נתון שבמוקד הטלפוני שבו נמדדו פונקציות השרידות, הלקוחות מאוד סבלניים. לאיזה זמן מתאים אז הגרף העליון? הסבירו בקצרה.

תשובה: הזמן שלקוח מוכן להמתין

הסבר: סבלנות גבוהה, ולכן סביר להניח שהזמן, שלקוח מוכן להמתין, גדול סטוכסטית מהזמן שנדרש להמתין.

שאלה 5 (6 נקודות)

נתונה מערכת שירות המתוארת סכמטית בציור הבא:



כדי לבנות **מודל נוזלים** למערכת, נדרשים הפרמטרים הבאים:

- λ - קצב מופע,
 - μ - קצב שירות
 - θ - קצב נטישה אינדיבידואלי (ממוצע הסבלנות = $\frac{1}{\theta}$)
 - N - מספר השרתים

5.1 מודל הנוזלים מאופיין ע"י $0 \leq t, X(t)$, כאשר $X(t)$ מתאר את סה"כ מספר הלקוחות במערכת בזמן $0 \leq t$.
כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $0 \leq t, X(t)$.

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda - (X(t) \wedge N)\mu - (X(t) - N)^+ \theta$$

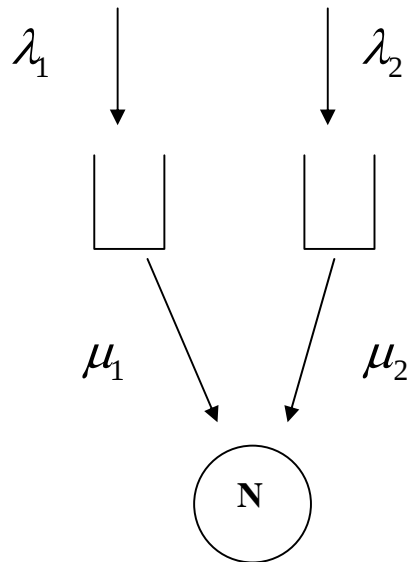
5.2 הסבירו בקצרה כיצד ניתן לפתור נומרית את המשוואה הדיפרנציאלית באמצעות גליון אלקטרוני?

הסבר: מתחילים עם $X(0)$ נתון. אחרי זה, עבור $X(t)$ נתון, מחשבים

$$X(t + \Delta) = X(t) + \Delta\lambda - \Delta\mu(X(t) \wedge N) - \Delta\theta(X(t) - N)^+$$

ולכן מקבלים את $X(0), X(\Delta), X(2\Delta), X(3\Delta), \dots$ ככל ש- Δ קטן יותר, כך הקירוב מדויק יותר.

כעת נתונה מערכת תורים בארכיטקטורת V, המתוארת בציור הבא:



הפרמטרים של מודל המערכת נתונים ע"י:

- λ_1 (λ_2) - קצבי מופע לקוחות מסוג 1 (2),
- μ_1 (μ_2) - קצבי שירות לקוחות מסוג 1 (2),
- N - מספר השרתים

5.3 גם כאן ננסה לאפיין מודל נזלים של המערכת בעזרת $X(t)$, $0 \leq t$,

כאשר $X(t) =$ סה"כ מספר הלקוחות במערכת, מסוג 1 ומסוג 2 ביחד.

האם ניתן לכתוב משוואה דיפרנציאלית עבור $X(t)$? אם כן – כתבו אותה, ואם לא – הסבירו מדוע לא.

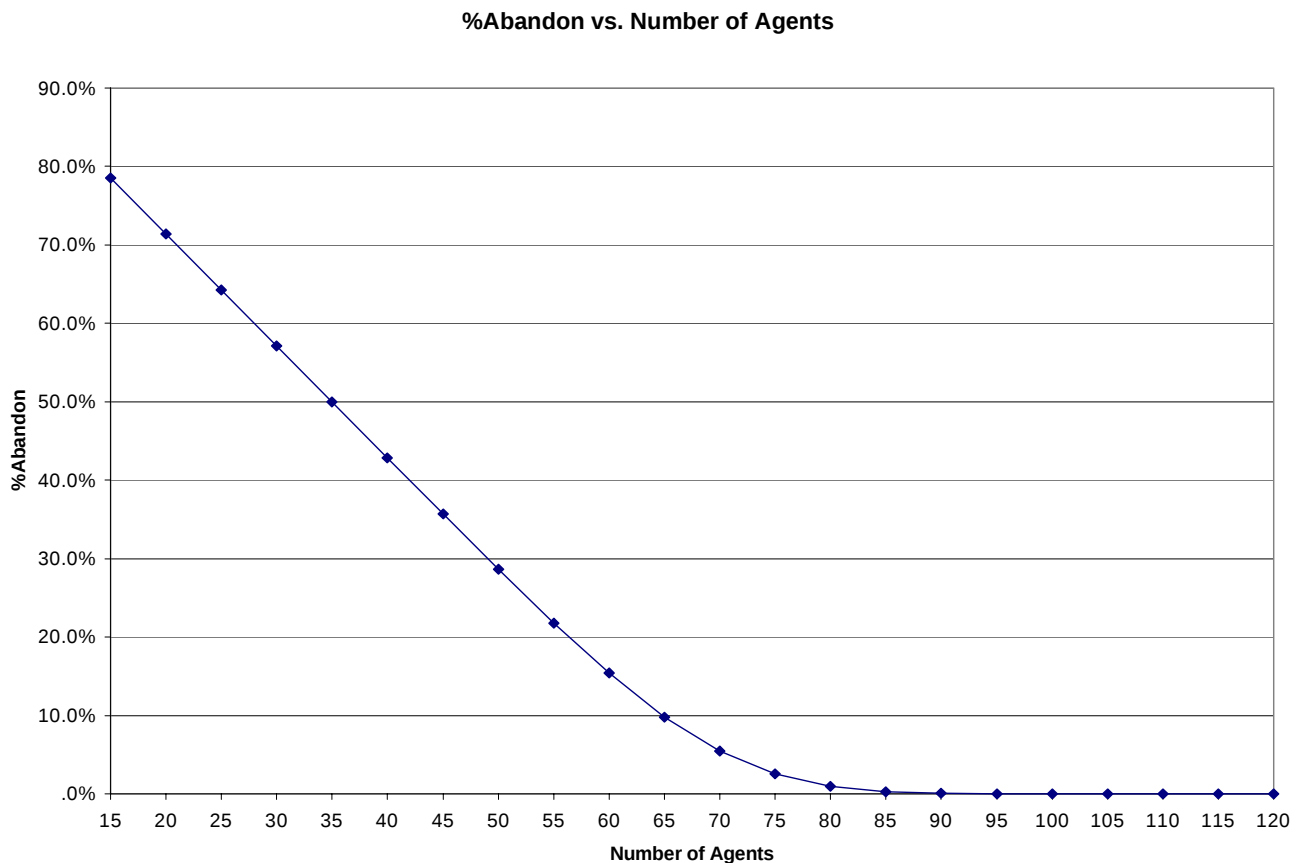
משוואה דיפרנציאלית או הסבר:

לא ניתן לכתוב משוואה דיפרנציאלית יחידה עבור $X(t)$, מאחר ונדרשת לכך אינפורמציה נוספת, למשל מדיניות שירות הלקוחות.

שאלה 6 (9 נקודות)

נתונה מערכת תורים $(Erlang-A) M / M / N + M$. המערכת מאופיינת על ידי ממוצע משך שירות 3:30 דקות, ממוצע סבלנות 2:00 דקות, וקצב מופע של 1200 לשעה. שעת עבודה של שרת יחיד עולה 50 ₪, ואילו כל נטישה גורמת נזק של 100 ₪.

6.1 נניח כי מספר השרתים $N = 50$. עיני שימוש בגרף הבא, שנוצר עיני התוכנה *4CallCenters*, חשבו את העלות הממוצעת ליחידת זמן, עבור תפעול המערכת.



חישוב העלות הממוצעת ליחידת זמן:

הנוסחה לחישוב עלות ממוצעת לשעה היא:

$$Cost = N \cdot 50 + 1200 \cdot P_{Ab} \cdot 100$$

במקרה שלנו: עבור $N = 50$, מתקיים $P_{Ab} = 0.3$ ולכן

$$Cost \approx 50 \cdot 50 + 1200 \cdot 0.3 \cdot 100 = 2500 + 36,000 = 38,500$$

6.2 רמת האיוש $N = 50$ איננה אופטימלית. למעשה, רמת איוש של $N^* = 87$ נותנת עלות של כ- 4550 ₪ לשעה, וניתן להראות שזו העלות המינימלית. תארו בקצרה איך ניתן למצוא את N^* ע"י שימוש בגרף הנ"ל וגיליון אלקטרוני.

תאור מציאת N^* בזרת 4CallCenters לחשב את P_{Ab} עבור N שונים. אחר כך להעביר את המספרים ל-Excel ולמצוא את ה- N -האופטימלי (את זה שמביא את $Cost$ למינימום).

6.3 נניח שקצב המופע השעתי יכול להשתנות מ-1200 עד 2400 בצעדים של 300. בטבלה הבאה אנו מציגים את רמות האיוש האופטימליות המתאימות:

קצב מופע	איוש אופטימלי N^*	עלות מינימלית (₪)	$P\{Ab\}$
1200	87	4550.5	0.17%
1500	107	5543	0.13%
1800	126	6526.5	0.13%
2100	145	7501.5	0.12%
2400	165	8468.5	0.09%

נשים לב כי למרות שקצב המופע עלה פי 2 (מ-1200 עד 2400), מספר השרתים האופטימלי לא עלה בדיוק פי 2 אלא בפחות. כיצד ניתן להסביר תופעה זו? תנו תשובה ללא חישובים מדויקים, תוך הסתמכות על ניסיונכם במודלים דומים.

הסבר: על סמך מודלים קודמים, סביר להניח כי עבור N -ים לא קטנים מתקיים $N^* = R + \beta\sqrt{R}$, כאשר $R = \frac{\lambda}{\mu}$.

אזי כאשר λ גדל פי 2, N^* גדל פי פחות מכך.

6.4 תוך חישובים פשוטים, נסו לקבוע את רמת האיוש האופטימלית N^* כאשר קצב המופע עולה ל-3600 לקוחות לשעה.

$$\underline{N^* \approx 240}$$

הסבר / חישוב:

נשתמש בנוסחה $N^* = R + \beta\sqrt{R}$ עבור $\lambda = 1200$ ו $N^* = 87$ כדי לקבל את β :

$$\beta = \frac{N^* - R}{\sqrt{R}} = \frac{87 - 70}{\sqrt{70}} \approx 2 \quad R = \frac{1200 * 3.5}{60} = 70 \quad \mu = 60 / 3.5 \quad \text{זה נותן}$$

הערה: אם מציבים כל λ_N אחר מהטבלה – אזי מקבלים אותו β .

$$N^* \approx 210 + 2\sqrt{210} \approx 240 \quad \text{כעת, עבור } \lambda = 3600, \text{ מתקיים } R = 210 \text{ ו-}$$

6.5 כאמור, ממוצע משך השירות הוא 30:3 דקות. כיוון ששעת העבודה של שרת עולה 50 ₪, ניתן להסתכל על

$$50 \frac{3.5}{60} = 2.92 \text{ ₪ כעל עלות ממוצעת של שירות בודד ללקוח.}$$

נניח שעלות הנטישה של לקוח יורדת באופן דרמטי, למשל ל- 2.5 ₪.

בנסיבות האלו, מה, לדעתכם, היא עתה רמת האיוש האופטימלית N^* ? הסבירו בקצרה.

$$\underline{N^* = 0}$$

הסבר / חישוב: עלות שירות בודד **יותר גדולה** מעלות נטישה בודדת. $2.92 > 2.5$.

ולכן, לא כדי לשרת בכלל!!!

שאלה 7 (5 נקודות)

פונקציה ה-hazard rate $h_X(t)$ של משתנה מקרי (מ"מ) אי-שלילי X , עם צפיפות $f_X(t)$, נתונה ע"י

$$h_X(t) = \frac{f_X(t)}{P(X > t)}, \quad t \geq 0.$$

7.1 נתון מ"מ X מעריכי עם פרמטר λ : $X \sim \exp(\lambda)$. צפיפותו נתונה ע"י $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$.

הראו שפונקציה ה-hazard rate של X קבועה, ושווה ל- λ . ז"א $h_X(t) \equiv \lambda$. תנו הסבר אינטואיטיבי קצר לעובדה זאת.

$$h_X(t) = \frac{f_X(t)}{P(X > t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda. \quad \text{הוכחה:}$$

הסבר: תכונת "חוסר זיכרון" של מ"מ מעריכי.

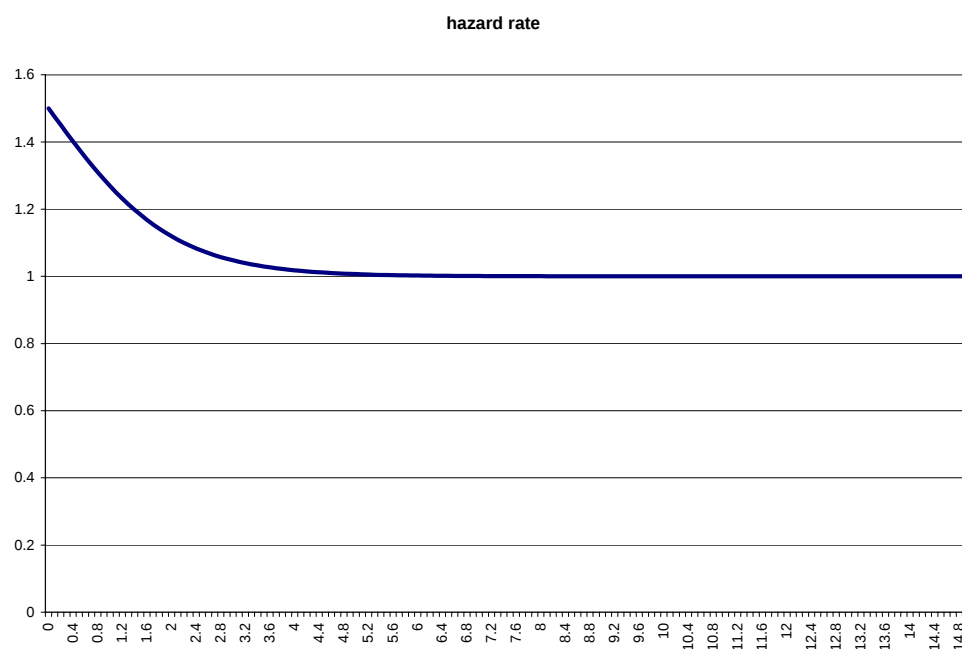
7.2 יהי Y מ"מ עם ההתפלגות הבאה: $Y \sim \begin{cases} \exp(1), & w.p. 1/2, \\ \exp(2), & w.p. 1/2. \end{cases}$

ז"א, בסיכוי $1/2$, Y מתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר 1 ובסיכוי $1/2$, Y מתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר 2. שתי השאלות הבאות עוסקות במ"מ Y הנ"ל.

7.3.1 מה היא פונקציה ה-hazard rate $h_Y(t)$ של Y בנקודה $t = 0$?

$$h_Y(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

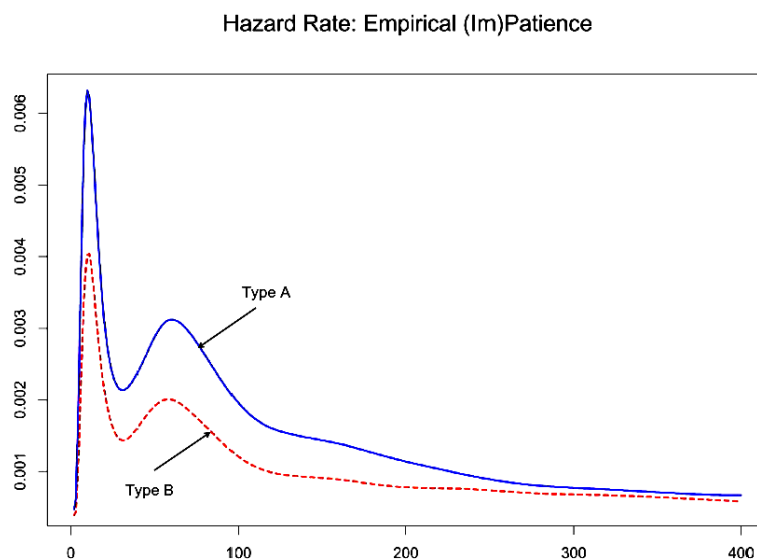
7.3.2 ציירו את פונקצית ה-hazard rate של Y : $h_Y(t), t \geq 0$. אינכם מתבקשים לחשב את הפונקציה במדויק. מספיק לצייר רק את התנהגותה הכללית (עולה, יורדת או לא זה ולא זה) ואת ההתנהגות בקצוות ($t = 0$ ו- $t = \infty$).



מדפי ההרצאה בנושא :

Intuition to Figure The hazard rate near zero is close to $3/2$ - the average of the two rates of the individual phases. (This is clear by our representation.) If the service has not been completed for a long time, the probability that the phase with the longest expectation (rate 1) had been “chosen” converges to one. Hence, the hazard rate converges to 1.

7.3.3 בגרף הבא נתונות 2 פונקציות hazard rate אמפיריות של סבלנות לקוחות משני סוגים: סוג A וסוג B. השוו את סבלנות 2 הסוגים בעזרת הגרפים, תוך הסבר קצר.



מי יותר "סבלן"? סוג B

הסבר קצר: עבור סוג B, הסיכוי לנטוש, בהינתן הישרדות, ובכל רגע נתון, הוא קטן יותר, ולכן סוג B הוא יותר "סבלן". בעצם, סבלנות B גדולה סטוכסטית מסבלנות A.

שאלה 8 (3 נקודות)

8.1 נתונה לפניכם ההוכחה של משוואות *Lindley*, כפי שהוצגה בכיתה. 3 פרטים מההוכחה הושמטו ובמקומם רשמנו סימני שאלה (?). השלימו את הפרטים החסרים.

Calculating Waiting-Times under FIFO: Lindley's Equations

$A_1, A_2, \dots$ - arrival times (jumps of $A(\cdot)$), T_n - interarrival times,

S_n - service time of customer n .

$W_q(n)$ - waiting time of customer n .

Key observation:

$$W_q(n) = \begin{cases} 0 & A_n \geq \overbrace{A_{n-1} + W_q(n-1) + S_{n-1}}^{\text{departure time of customer } (n-1)} \\ A_{n-1} + W_q(n-1) + S_{n-1} - A_n & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In short,

$$W_q(n) = [A_{n-1} - A_n + W_q(n-1) + S_{n-1}]^+; \quad x^+ = \max(x, 0)$$

$$= [W_q(n-1) + x_n]^+, \quad n \geq 2$$

where

$$x_n = S_{n-1} - T_n$$

Lindley's Equations $W_q(n) = [W_q(n-1) + x_n]^+, \quad n \geq 2$

$$W_q(1) = 0$$

8.2 לאיזו צורך "המציא" *Lindley* את המשוואות הנ"ל?

תשובה: להוכחת סטביליות (או קיום התפלגות גבולית) של מערכת G/G/1, כאשר $\rho > 1$.