

מרצה: פרופסור אבישי מנדלבאום

מס' תלמיד _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות - 096324

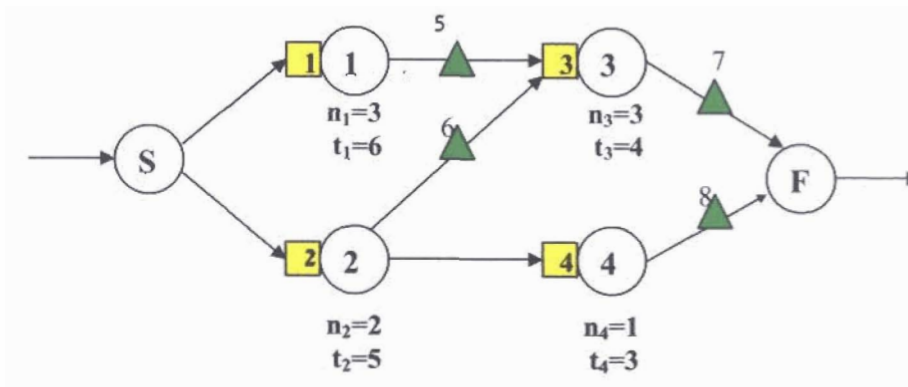
- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן כולל **28** עמודים, כולל עמוד זה
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, **שאמורים להספיק**: מלל שלא לצורך יגרע ניקוד ולא יוסיף.
- יש לתת הסברים או הוכחות **רק אם** התבקשתם במפורש לעשות זאת.
- הבחינה בחומר סגור וללא מחשבון.
-

Number	Topic	Points
1	DS-PERT	2
2	Service-Times & Patience	8
3	Service-Times & Incentives	2
4	Erlang-A	8
5	Fluid Model	3
6	WFM	3
7	EOS	3
8	4CC and QED Q's	3
9	Little	3
10	Slow vs. Fast	3
11	Biased Sampling	3
12	Staffing	9
Total		50

בהצלחה !

שאלה 1

נתונה רשת PERT/CPM דינמית סטוכסטית, כמתואר בגרף 1 וכפי שנלמד בכיתה:
 t_i הוא ממוצע זמן השירות בתחנה i ו- n_i הוא מספר השרתים בתחנה i , $i=1,2,3,4$.
 פרויקטים חדשים מופיעים למערכת לפי תהליך פואסון עם ממוצע זמן בין מופעי של 3.5 ימים.
 נניח שהרשת נמצאת במצב יציב.



Graph Number 1

1.1. לרשת 8 תורים, הממוספרים מ-1 עד 8. מיהם התורים הנובעים מפערי סינכרון ומי הנובעים ממשאבים מוגבלים?

תורי סינכרון: 5, 6, 7, 8

תורי משאבים: 1, 2, 3, 4

1.2. מהי נצילות כל אחד משלושת השרתים המטפל בפעילות 3? הסבירו במשפט או שניים את תשובתכם.

נצילות השרתים: $4/(3.5*3)=0.3809$

הסבר: מכיוון שהרשת נמצאת במצב יציב קצב המופע לכל תחנה הוא $1/3.5$ פרויקטים ליום. כל פרויקט דורש 4 ימי עבודה והעבודה מתחלקת בין 3 שרתים.

1.3. מהו המספר המינימלי של שרתים הנדרשים לטפל בפעילות 3, כדי שנצילות כל אחד לא תעלה על 33% ?

מספר מינימלי: $\lceil 4/(3.5 * n_3) \rceil \leq 0.33$ התוצאה היא 4 שרתים.

1.4. נסמן ב- T_{DS} את משך ביצוע פרויקט שמגיע למערכת במצב יציב.
הסבירו במדויק ככל שתוכלו, אבל בשני משפטים לכל היותר, מדוע $ET_{DS} < 10$.

הסבר: ההסבר כולל שני חלקים. מכיוון שהרשת סטוכסטית אנחנו כבר יודעים ש $ET_{DS} < 10$ (בת"ב
הוכחנו כי $E(\max_i X_i) > \max_i E(X_i)$. בנוסף הדינמיות של המערכת גורמת לתורים שמאריכים
עוד יותר את משך הפרויקט הממוצע.

שאלה 2

בגרפים 2 ו-3 שבעמוד 5 מתוארים קצבי מופע ומשכי שירות ממוצעים, כפונקציה של הזמן ביום. (מדובר במוקד אותו ניתחתם בקורס).
תנו שני הסברים אפשריים לסיבה שבסביבת השעות 10^{00} ו- 15^{00} מתרחשת עליה ברורה גם בקצב המופע וגם במשך השירות הממוצע. כתמיכה באחד ההסברים, השתמשו בגרפים 4 ו-5 שבעמוד 6, כולל הסבר קצר של תוכן הגרפים.

הסבר 1: ההסבר הפשוט הוא שמכיוון שאלה שעות עמוסות הלקוחות שמגיעים לשירות מבזבזים זמן

בתלונות ולכן משך השירות מתארך.

הסבר 2: מהגרפים 2 ו-3 עולה כי הלקוחות הסבלניים יותר הם גם הלקוחות שזמן השירות שלהם יותר ארוך.

לכן, הלקוחות עם זמן השירות הארוך יותר הם אלה ששורדים וזמן השירות הממוצע מתארך.

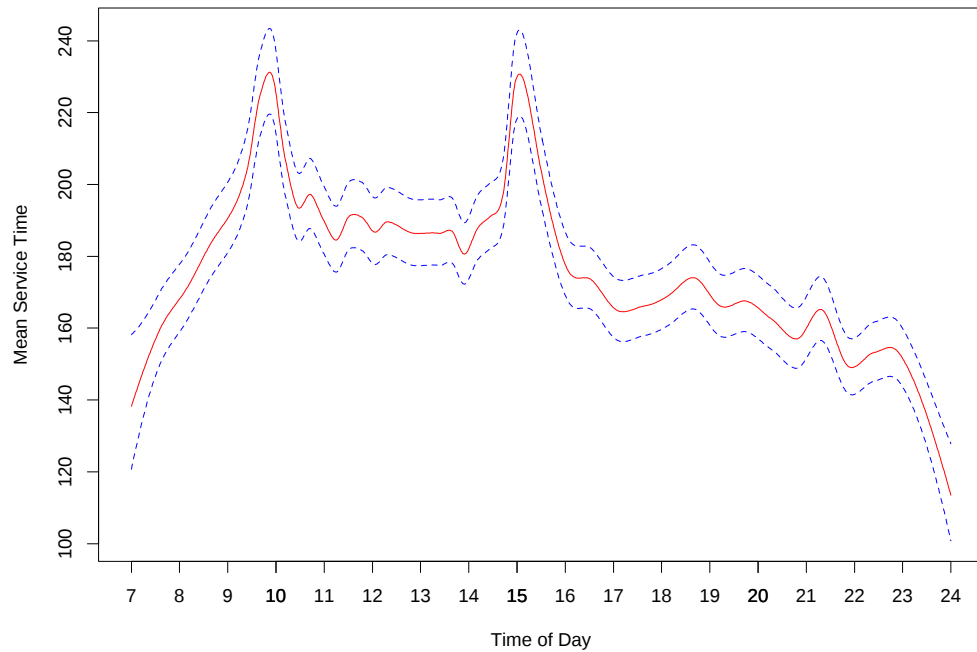
גרף 4 מראה: את פונקציית השרידות של 4 סוגי שירות שונים. מהגרף ניתן לראות כי לקוחות ניירות ערך שהם

ולקוחות עם עדיפות גבוהה הם בעלי זמן שירות ארוך יותר מלקוחות חדשים ורגילים.

גרף 5 מראה: פונקציית הסיכון של הסבלנות של לקוחות רגילים ולקוחות בעלי עדיפות גבוהה. מכיוון

שפונקציית הסיכון של לקוחות רגילים גבוהה יותר הסבלנות הממוצעת שלהם נמוכה יותר.

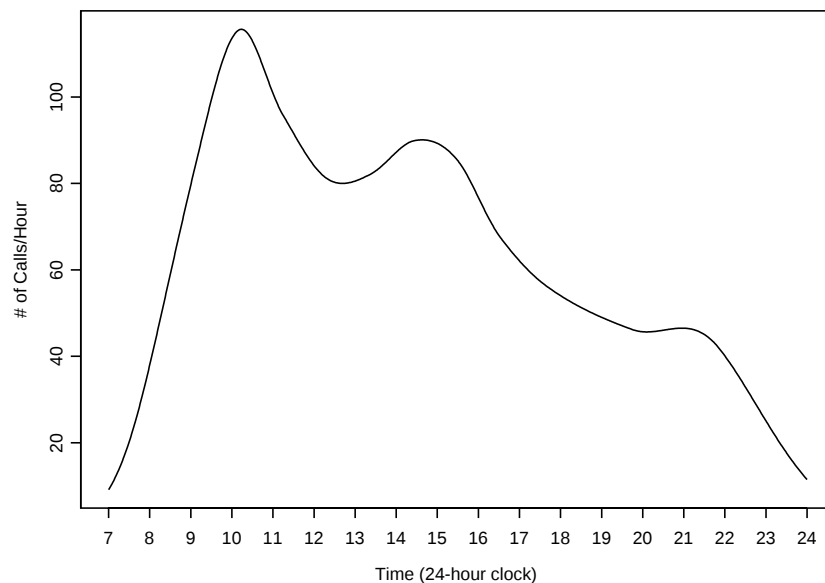
Figure 12: Mean Service Time (Regular) vs. Time-of-day (95% CI) ($n = 42613$)



Graph Number 2

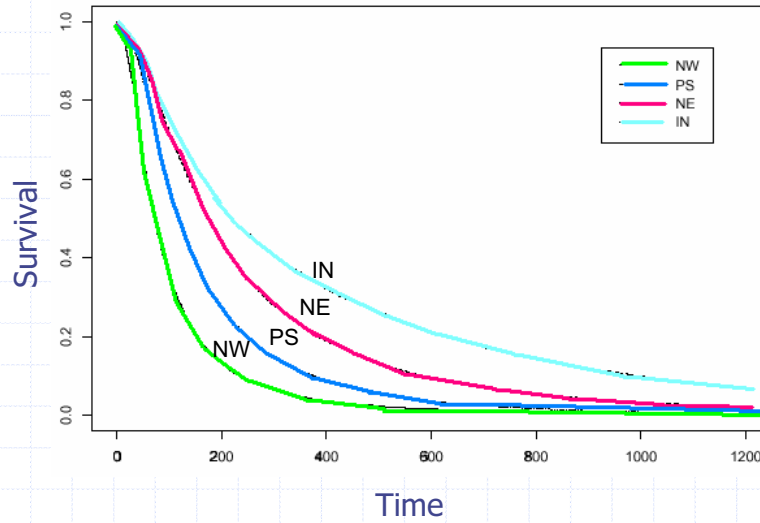
Arrivals: Inhomogeneous Poisson

Figure 1: Arrivals (to queue or service) – “Regular” Calls



Service Time

Survival curve, by Types



Means (In Seconds)

NW (New) = 111

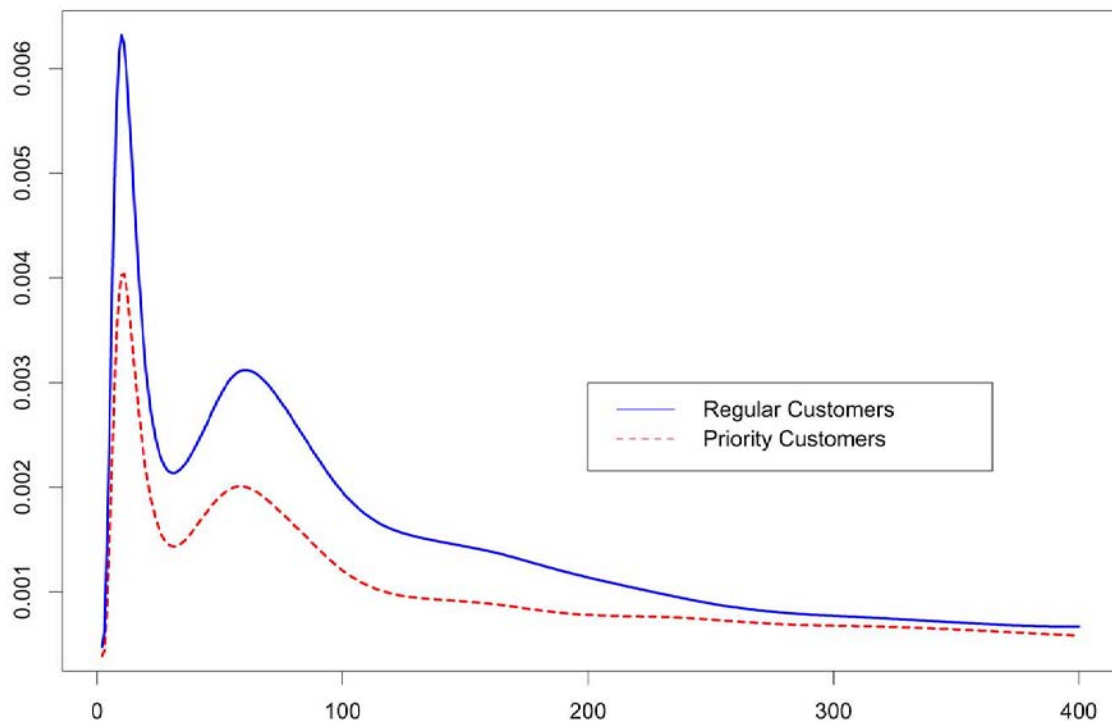
PS (Regular) = 181

NE (Stocks) = 269

IN (Internet) = 381

Graph Number 4

Hazard Rate: Empirical (Im)Patience



Graph Number 5

שאלה 3

נאמר בכיתה, ובקורסים אחרים, שהתנהגות נותני השירות מושפעת באופן משמעותי מתנאי עבודה ותמריצים.

3.1. שני הגרפים 6 ו-7 שבעמודים 8-9 מהווים תמיכה באמירה הנ"ל. הסבירו. (משפט לכל גרף)

גרף 6 : מראה כי מתן תמריץ לפי מספר שיחות מטופלות גורם למוקדנים לנתק ללקוחות בפרצוף.

גרף 7 : אחה"צ המנתחים מקבלים תשלום פר ניתוח ולכן הם דוחים את הניתוחים הקצרים יותר

לאחה"צ.

3.2. מה ההשלכות הניהוליות של שתי התופעות הנראות בגרפים ? ז"א, אילו פעולות מתקנות, **אם בכלל**, נדרשות כדי לשנות את ההתנהגות המתוארת בגרפים ? (משפט לכל תופעה)

גרף 6 : התופעה היא בעייתית. ניתן לפתור אותה על ידי פיקוח יותר הדוק או על ידי הנהגת מדדי איכות

שירות אחרים שאינם מספר שיחות.

גרף 7 : התופעה היא חיובית במקרה זה. המנתחים מקדישים לניתוחים הקצרים יותר את שעות הבוקר,

בהן המנתחים ערניים יותר.

3.3. האם ההיסטוגרמה בגרף 7 מתאימה להתפלגות מעריכית ?

תנו 2 סיבות (משפט לכל סיבה) לתמיכה בתשובתכם.

ההיסטוגרמה אינה מתאימה להתפלגות מעריכית

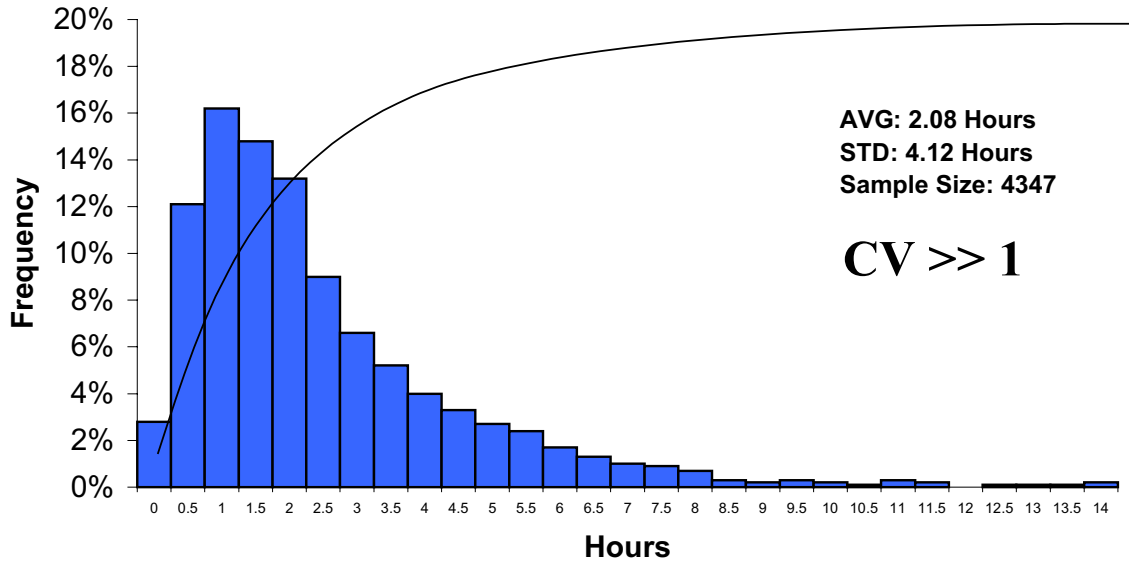
סיבה 1 : $CV \gg 1$ להבדיל מ- $CV=1$ עבור התפלגות מעריכית.

סיבה 2 : בהתפלגות מעריכית היחס בין עמודות עוקבות צריך להיות קבוע (קירוב דיסקרטי של מעריכי

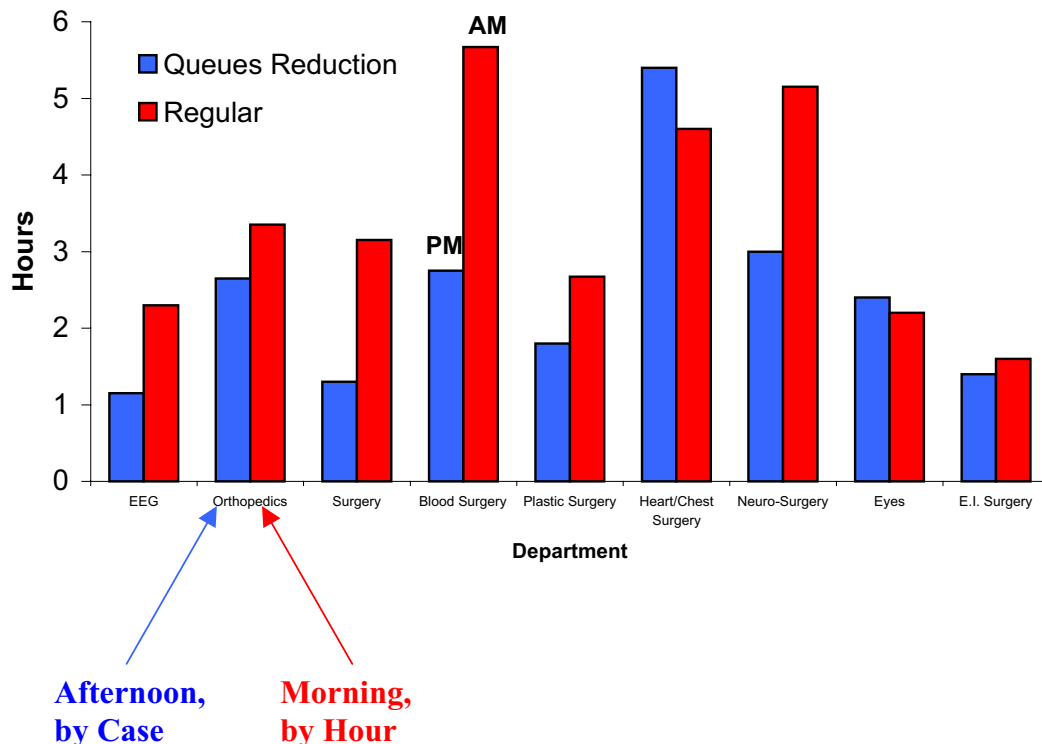
הוא גיאומטרי). בפרט ההיסטוגרמה צריכה להיות מונוטונית יורדת.

Operations Time In a Hospital

Operations Time Histogram:



Operations Time - Morning vs. Afternoon:



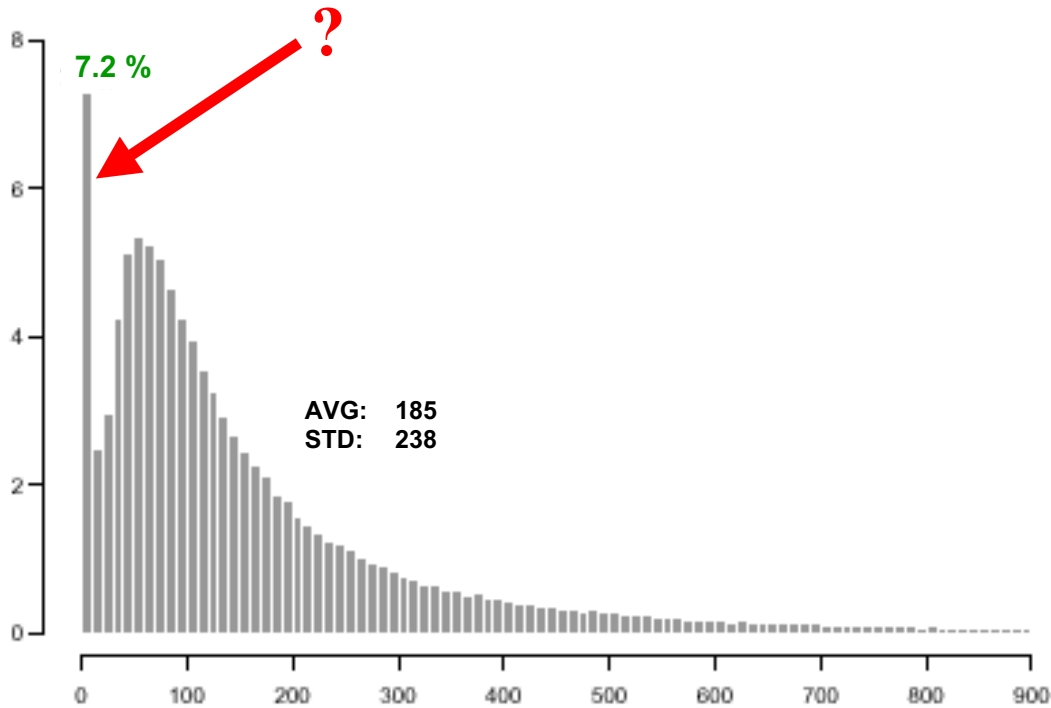
Ethical?

Even Doctors Can Manage!

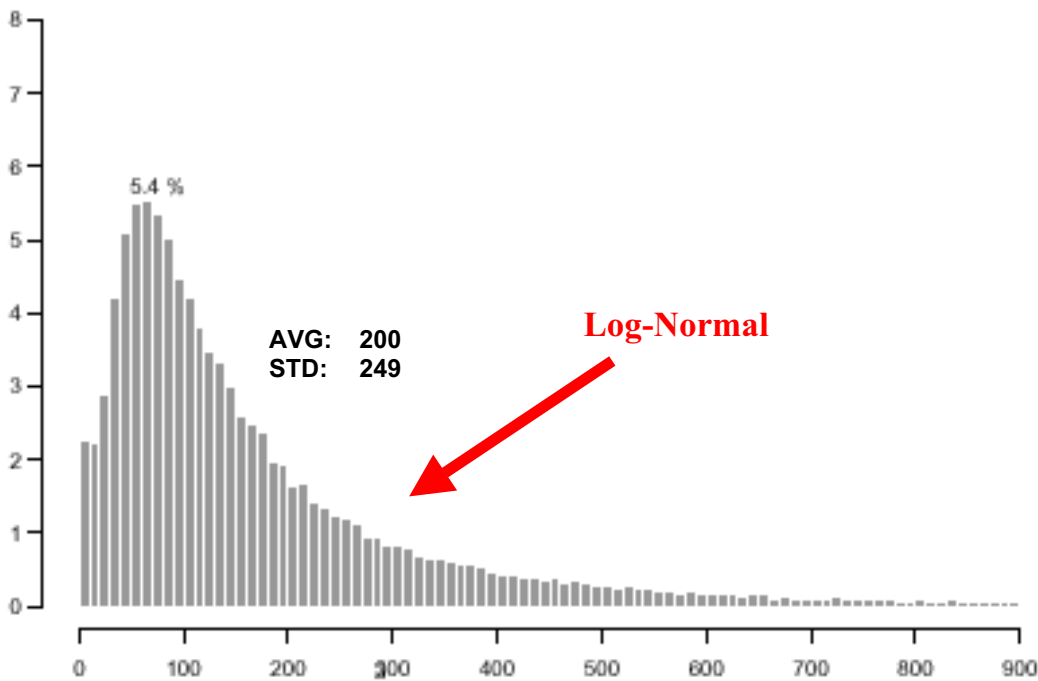
Beyond Data Averages

Short Service Times

Jan – Oct:



Nov – Dec:



שאלה 4

למודל Erlang-A ($M/M/N+M$) ארבעה פרמטרים :

$$\lambda = \text{קצב מופע}$$

$$\mu = \text{קצב שירות}$$

$$\theta = \text{קצב נטישה אינדיבידואלי}$$

$$N = \text{מספר שרתים}$$

4.1. תחת אילו תנאים על הפרמטרים המודל ארגודי (מגיע למצב יציב) ?

תנאים : מכיוון שיש נטישות ($\theta > 0$) המודל ארגודי תחת כל אוסף של פרמטרים.

4.2. נסמן ב- P_{ab} ו- EW_q את אחוז הנוטשים ואת זמן ההמתנה הממוצע בתור במצב יציב, בהתאמה. הוכיחו כי מתקיים

$$P_{ab} = \theta * EW_q$$

הוכחה :

$$\lambda P_{ab} = \theta EL_q$$

By Little's Law

$$EL_q = \lambda EW_q$$

$\Downarrow$

$$P_{ab} = \theta EW_q$$

נתוני שיחות של יום (24 שעות), מתוארים בטבלה 8 שבעמוד 12.

4.3. תוך שימוש בסימונים מתמטיים תארו כיצד, בהסתמך על נתוני טבלה 8, תאמדו את הפרמטר μ , עבור השעות 07:15-07:45.

(למשל כדי לאמוד את λ , נסמן ב-A את מספר שיחות שהגיעו למוקד בין 07:15 ל-07:45. אזי אמד $\hat{\lambda}$ ל- λ נתון על ידי $\hat{\lambda} = 2A$, כאשר יחידות $\hat{\lambda}$ הן מספר שיחות לשעה.)

$\hat{\mu}$ - אמד ל- μ : נסמן ב- N_{Ser} את מספר הלקוחות ששורתו במהלך האינטרוול (ולא מספר הלקוחות שהגיעו) נסמן ב-S את סה"כ זמני השירות של הלקוחות ששורתו במהלך האינטרוול. אזי

$$\hat{\mu} = N_{Ser} / S$$

4.4. נסמן ב- $\hat{\theta}$ אמד ל- θ . יהיה N_{ab} מספר הנוטשים בין 07:15 ל-07:45. נסמן ב- W_{ab} את סה"כ זמני ההמתנה של הלקוחות שנטשו במהלך האינטרוול. סטודנט שטרם למד הנדסת מערכות שירות הציע כאמד ל- θ את N_{ab} / W_{ab} . מה דעתכם על הצעתו? (תשובה במשפט יחיד). אם אינכם מקבלים אותה, הציגו אמד חלופי $\hat{\theta}$.

דעתכם על ההצעה: ההצעה של הסטודנט וודאי אינה נכונה שכן אינה מביאה בחשבון את הסבלנות של

כל הלקוחות שלא נטשו. כלומר זהו אמר מוטע

אמד חלופי $\hat{\theta}$, אם רלוונטי: נסמן ב- W_{ser} את סה"כ זמני ההמתנה של הלקוחות ששורתו במהלך האינטרוול. אזי

$$\hat{\theta} = N_{ab} / (W_{ab} + W_{ser})$$

Table Number 8

customer_i	priority	type	date	vr_u_entry	vr_u_exit	vr_u_time	q_start	q_exit	q_time	outcome	ser_start	ser_exit	ser_time
24512279	0	0 PS	991109	7:03:23	7:03:34	11	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:03:34	7:03:42	8
	0	0 PS	991109	7:04:02	7:04:18	16	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:04:17	7:05:19	62
	0	0 PS	991109	7:04:45	7:04:56	11	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:04:55	7:05:52	57
	2	2 PS	991109	7:05:11	7:05:17	6	7:05:17	7:05:25		8 AGENT	7:05:24	7:07:09	105
	0	0 PS	991109	7:06:23	7:06:33	10	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:06:32	7:08:50	138
	0	0 PS	991109	7:08:57	7:09:09	12	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:09:07	7:13:49	282
	0	0 PS	991109	7:11:16	7:11:26	10	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:11:25	7:13:26	121
	0	0 PS	991109	7:11:37	7:11:46	9	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:11:46	7:15:34	228
	1	1 PS	991109	7:12:31	7:12:37	6	7:12:37	7:13:31		54 AGENT	7:13:31	7:14:18	47
	0	0 NW	991109	7:13:54	7:14:04	10	7:14:04	7:16:17		133 AGENT	7:16:17	7:22:25	368
29537602	0	0 PS	991109	7:16:02	7:16:14	12	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:16:14	7:17:52	98
	0	0 PS	991109	7:17:52	7:18:03	11	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:18:03	7:18:41	38
	0	0 NW	991109	7:18:01	7:18:11	10	7:18:11	7:21:00		169 HANG	0:00:00	0:00:00	0
	0	0 PS	991109	7:19:41	7:19:57	16	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:19:57	7:20:01	4
	0	0 PS	991109	7:19:57	7:20:06	9	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:20:06	7:20:57	51
	0	0 PS	991109	7:21:22	7:21:34	12	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:21:32	7:23:11	99
	0	0 PS	991109	7:21:37	7:21:47	10	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:21:47	7:22:59	72
	0	0 PS	991109	7:22:58	7:23:08	10	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:23:08	7:23:59	51
	0	0 PS	991109	7:24:10	7:24:19	9	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:24:18	7:27:04	166
	2	2 PS	991109	7:24:43	7:24:49	6	7:24:49	7:25:50		61 AGENT	7:25:49	7:27:28	99
55923791	0	0 NW	991109	7:27:26	7:27:36	10	7:27:36	7:27:41		5 AGENT	7:27:40	7:28:35	55
	0	0 PS	991109	7:27:39	7:27:49	10	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:27:49	7:32:29	280
	0	0 PS	991109	7:28:09	7:28:20	11	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:28:19	7:28:24	5
	0	0 PS	991109	7:29:00	7:29:10	10	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:29:09	7:30:25	76
	0	0 PS	991109	7:32:11	7:32:20	9	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:32:19	7:33:33	74
	0	0 PS	991109	7:35:36	7:35:46	10	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:35:45	7:38:19	154
	0	0 PS	991109	7:36:33	7:36:44	11	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:36:43	7:38:48	125
	0	0 PS	991109	7:37:32	7:37:40	8	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:37:40	7:38:44	64
	0	0 PS	991109	7:39:28	7:39:38	10	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:39:38	7:40:32	54
	0	0 PS	991109	7:41:32	7:41:41	9	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:41:41	7:42:30	49
1489624	0	0 PS	991109	7:44:18	7:44:27	9	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:44:26	7:49:27	301
	0	0 PS	991109	7:45:28	7:45:37	9	0:00:00	0:00:00		0 AGENT	7:45:37	7:48:35	178
	2	2 PS	991109	7:46:07	7:46:12	5	7:46:12	7:48:48		156 AGENT	7:48:48	7:50:00	72
	2	2 PS	991109	7:46:12	7:46:17	5	7:46:17	7:47:01		44 HANG	0:00:00	0:00:00	0
	1	1 PS	991109	7:46:37	7:46:43	6	7:46:43	7:48:24		101 HANG	0:00:00	0:00:00	0
53318796	0	0 PS	991109	7:46:07	7:46:12	5	7:46:12	7:48:48		156 AGENT	7:48:48	7:50:00	72
	2	2 PS	991109	7:46:12	7:46:17	5	7:46:17	7:47:01		44 HANG	0:00:00	0:00:00	0
	1	1 PS	991109	7:46:37	7:46:43	6	7:46:43	7:48:24		101 HANG	0:00:00	0:00:00	0
16832883	0	0 PS	991109	7:46:07	7:46:12	5	7:46:12	7:48:48		156 AGENT	7:48:48	7:50:00	72
	2	2 PS	991109	7:46:12	7:46:17	5	7:46:17	7:47:01		44 HANG	0:00:00	0:00:00	0
	1	1 PS	991109	7:46:37	7:46:43	6	7:46:43	7:48:24		101 HANG	0:00:00	0:00:00	0
	0	0 PS	991109	7:46:07	7:46:12	5	7:46:12	7:48:48		156 AGENT	7:48:48	7:50:00	72
	2	2 PS	991109	7:46:12	7:46:17	5	7:46:17	7:47:01		44 HANG	0:00:00	0:00:00	0
	1	1 PS	991109	7:46:37	7:46:43	6	7:46:43	7:48:24		101 HANG	0:00:00	0:00:00	0
	0	0 PS	991109	7:46:07	7:46:12	5	7:46:12	7:48:48		156 AGENT	7:48:48	7:50:00	72
	2	2 PS	991109	7:46:12	7:46:17	5	7:46:17	7:47:01		44 HANG	0:00:00	0:00:00	0
	1	1 PS	991109	7:46:37	7:46:43	6	7:46:43	7:48:24		101 HANG	0:00:00	0:00:00	0
	0	0 PS	991109	7:46:07	7:46:12	5	7:46:12	7:48:48		156 AGENT	7:48:48	7:50:00	72
	2	2 PS	991109	7:46:12	7:46:17	5	7:46:17	7:47:01		44 HANG	0:00:00	0:00:00	0

שאלה 5

בגרף מספר 9 בעמוד 14 נתון מודל של מערכת תורים שבה השתנות ברת-חיזוי משחקת תפקיד חשוב מדי מכדי להזניחה. במילים אחרות, חלק מההפרמטרים של המודל, המופיעים גם הם בעמוד 14, משתנים עם הזמן. נסמן ב- $Q_1(t)$ את סה"כ מספר הלקוחות במערכת לפי מודל הנוזלים.

5.1. כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור Q_1 .

משוואה דיפרנציאלית :

$$\frac{d}{dt}Q_1(t) = \lambda_t - \mu(n_t \wedge Q_1(t)) - \theta(Q_1(t) - n_t)^+$$

5.2. הסבירו בקיצור איך פותרים את המשוואה הדיפרנציאלית באמצעות גליון אלקטרוני ?

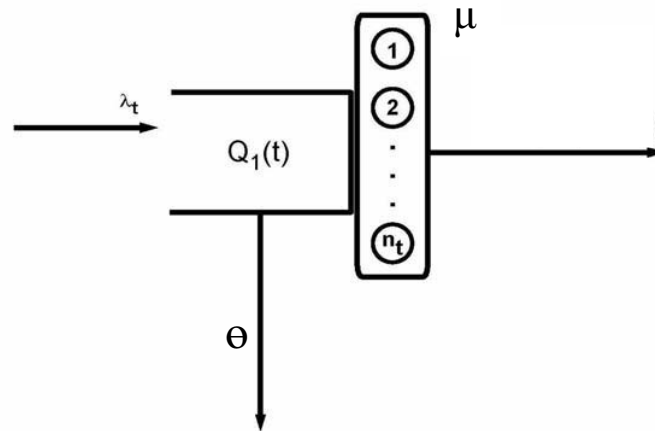
הסבר :

כותבים משוואת הפרשים רקורסיבית שהיא דיסקרטיזציה של הבעיה האמיתית. דהיינו :

$$Q_1(t + \Delta) = Q_1(t) + \lambda_t \Delta - \mu \Delta (Q_1(t) \wedge n_t) - \theta \Delta (Q_1(t) - n_t)^+$$

את המשוואה הרקורסיבית מזינים לגליון אלקטרוני, פשוט כל שורה היא פונקציה של השורה הקודמת.

Call Center: A Multiserver Queue with Abandonment



Graph Number 9

Primitives (Time-Varying Predictably)

- λ_t exogenous arrival rate
e.g., continuously changing, sudden peak
- μ service rate (of an individual server)
- n_t number of servers
- θ abandonment rate (for an individual customer)

שאלה 6

טבלה 10 בעמוד 16 מתארת את היררכית הפעולות המתחילה בתחזיות ומסתיימת בניתוב מבוסס מיומנויות, דרך איוש, שיבוץ משמרות וזימון עובדים. נניח כי משתמשים ב-Erlang A לקביעת רמות איוש שעתיות ומקבלים שבשעה נתונה נדרשים 125 מוקדנים לאיוש המוקד, כדי להשיג רמת שירות נתונה. אזי #FTE's חייב להיות גדול מ-125.

6.1. מדוע $\#FTE > 125$?

תשובה: מוקדנים לא יכולים להיות זמינים לשיחות 100% מהזמן. לכן יש לזמן יותר נציגים ממה שצריך

כדי לעמוד ביעדי האיוש.

6.2. במה תלוי ההפרש בין #FTE לבין 125 ?

תשובה: תלוי במדיניות ההפסקות, הסכמי עבודה וכד'.

Workforce Management: Hierarchical Operational View

Forecasting Customers: Statistics, Time-Series
Agents : HRM (Hire, Train; Incentives, Careers)

Staffing: Queueing Theory

Service Level, Costs

FTE's (Seats)
per unit of time

Shifts: IP, Combinatorial Optimization; LP

Union constraints, Costs

Shift structure

Rostering: Heuristics, AI (Complex)

Individual constraints

Agents Assignments

Skills-based Routing: Stochastic Control

שאלה 7

בגרפים 11-12 בעמודים 18-19 נתונות שתי עקומות צפף.
7.1. הסבירו ב-2 משפטים מדוע ה-"קו דרך נקודות" בגרף 11 מתאר יתרון לגודל.

הסבר: הקו מתאר יתרון לגודל מכיוון שלכל אורך הקו כמות העבודה פר-שרת המגיעה ליחידת זמן היא

קבועה. $\lambda / (N\mu) = Const$. למרות העומס הקבוע אנו רואים שזמן ההמתנה קטן ככל
שמספר השרתים גדל.

7.2. ציירו "קו דרך נקודות" אנלוגי בגרף 12, דהיינו קו שיתאר את היתרון לגודל כפי שהוא בא לידי ביטוי בגרף 12.

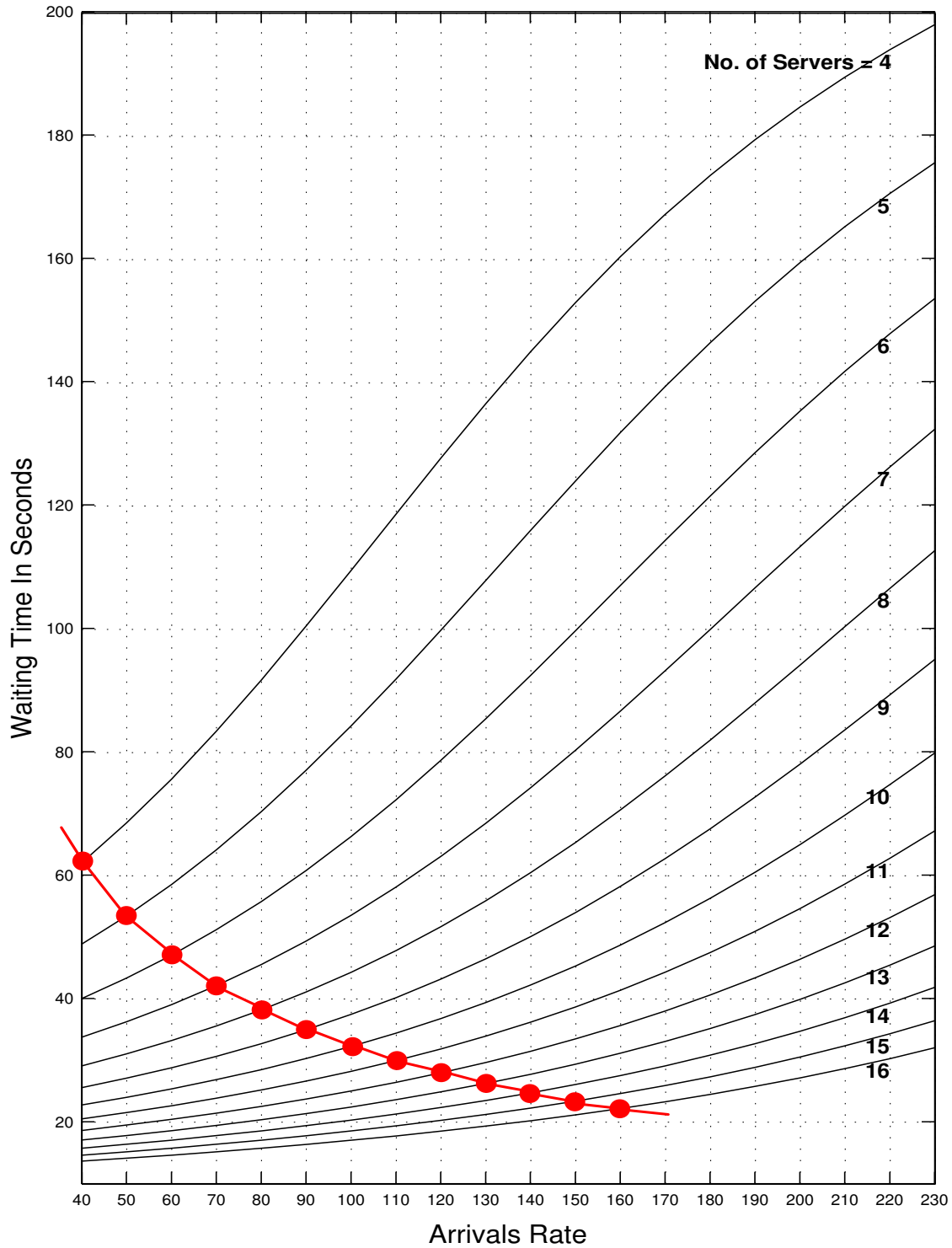
7.3. בכיתה נאמר כי במדד בגרף 12 לא משתמשים במוקדים טלפוניים. מה בכל זאת חשיבותו ?

חשיבות: מדד זה נותן אינדיקציה לרמת השירות שנותן המוקד. באמצעותו ניתן לדעת אם המערכת פועלת

בתחום ה-QED או באחד התחום ED או QD

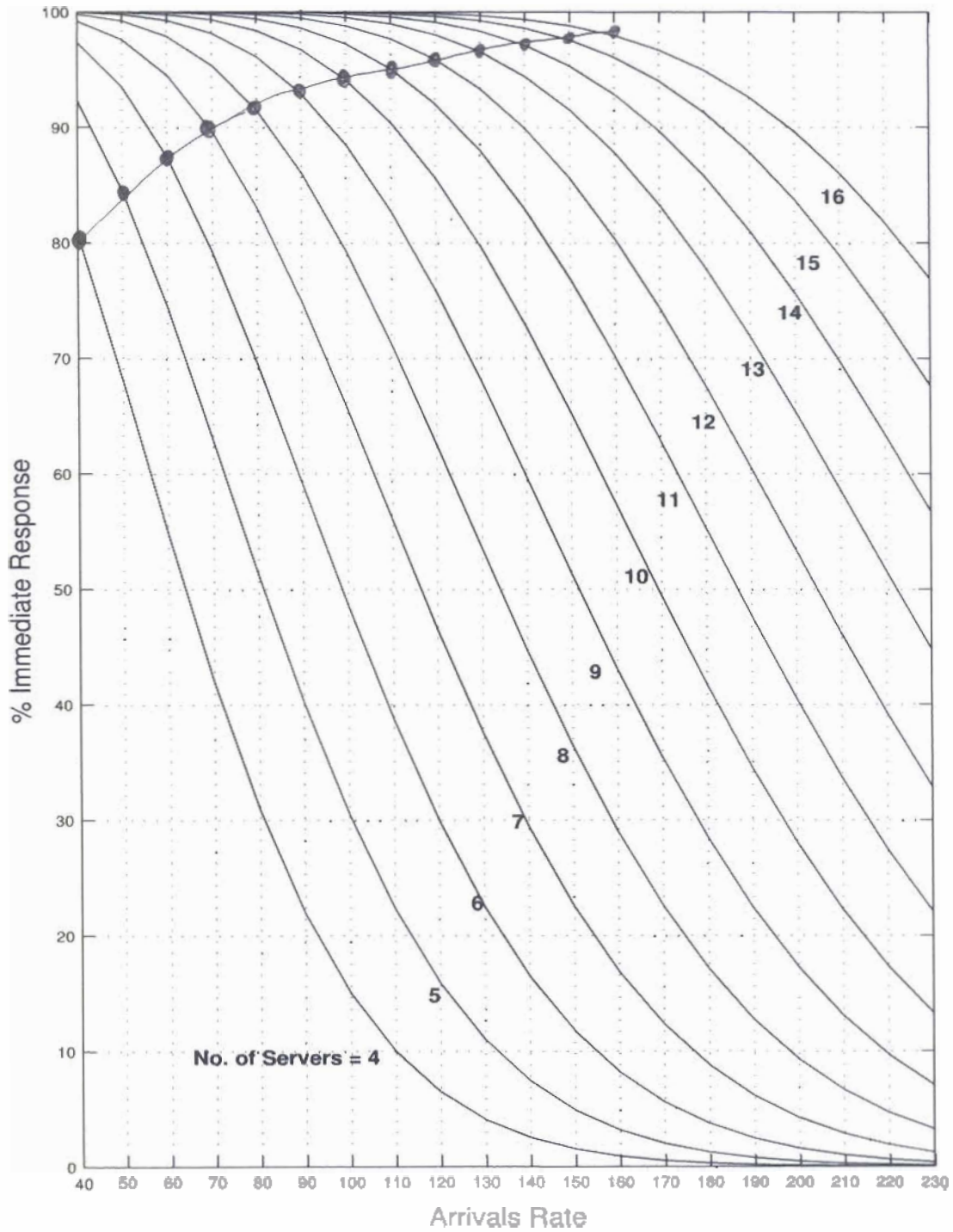
Economies of Scale Average Waiting Time - But Only of Those Who Wait

$E[W_q|W_q > 0]$ (Load: 10 per server)



% Immediate Response (Often Not Measured)

$$P(\text{Wait} = 0)$$



שאלה 8

טבלה 13 בעמוד 21 מתארת נתוני ACD של מוקד בארה"ב (בגודל בינוני בקנה מידה אמריקאי).
אנו מתבוננים על שלושה אינטרוולים שונים של זמן : 13: 30-14: 00, 14: 30-15: 00 ו-17: 00-17: 30.
בעזרת תוכנת 4CallCenters נמצא כי הסבלנות הממוצעת היא 3: 30 דקות בכל האינטרוולים הנדונים.

8.1. תארו איך ניתן היה, בעזרת הנתונים שבטבלה ובעזרת התוכנה, לקבל את הסבלנות הממוצעת של 3: 30 דקות.

תאור : בעזרת אופצית ה-ADVANCED QUERIES ניתן להכניס את הפרמטרים של הבעיה עבור כל אינטרוול (מופעים, זמן שירות ומספר שרתים), להציב ב-GOAL את אחוז הנוטשים ולעשות QUERY על ממוצע הסבלנות.

8.2. שימו לב כי בטבלה חסר נתון חשוב שהוא אחוז הלקוחות שנאלצו להמתין לפני כניסה לשירות, דהיינו $P\{Wait>0\}$.
אימדו מדד זה בקירוב עבור כל אחד מהאינטרוולים הנדונים, תוך שימוש בגרפים 14 ו-15 שבעמודים 22-23.

$$P\{Wait>0\} = \underline{0.85} : 13: 30-14: 00$$

$$P\{Wait>0\} = \underline{0.45} : 14: 30-15: 00$$

$$P\{Wait>0\} = \underline{0.02} : 17: 00-17: 30$$

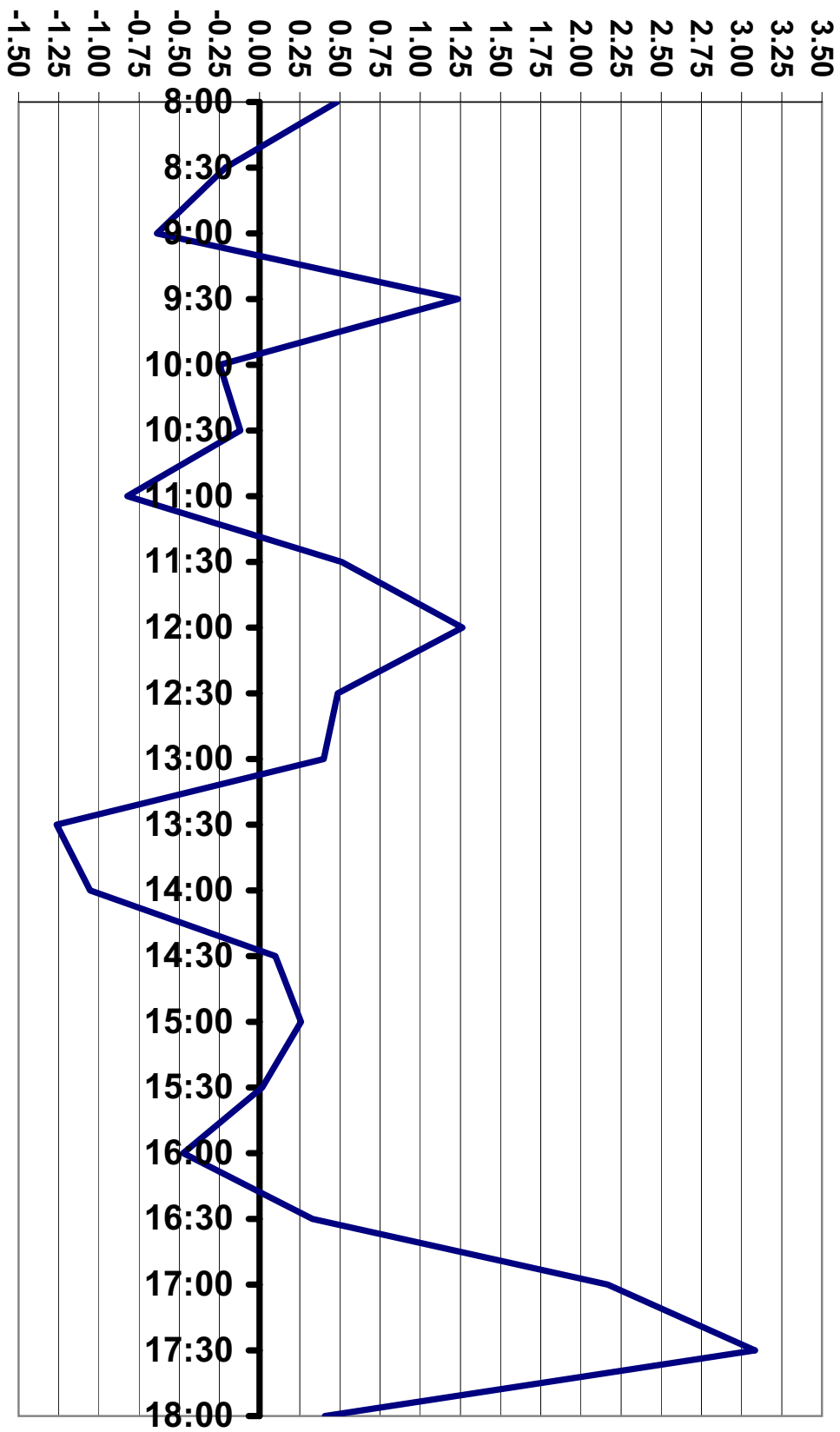
Charlotte – Center

6/13/00 - Tue

Time .1	Recvd	Answ	Abn %	ASA	AHT	Occ %	On Prod FTE	R	$\beta = (N - R) / \sqrt{R}$
0	20,577	19,860	3.5%	30	307	95.1%	222.7		
8:00	332	308	7.2%	27	302	87.1%	59.3	55.70	0.48
8:30	653	615	5.8%	58	293	96.1%	104.1	106.29	-0.21
9:00	866	796	8.1%	63	308	97.1%	140.4	148.18	-0.64
9:30	1,152	1,138	1.2%	218	303	90.8%	211.1	193.92	1.23
10:00	1,330	1,286	3.3%	22	307	98.4%	223.1	226.84	-0.25
10:30	1,364	1,338	1.9%	33	296	99.0%	222.5	224.30	-0.12
11:00	1,380	1,280	7.2%	34	306	98.2%	222.0	234.60	-0.82
11:30	1,272	1,247	2.0%	44	298	94.6%	218.0	210.59	0.51
12:00	1,179	1,177	0.2%	1	306	91.6%	218.3	200.43	1.26
12:30	1,174	1,160	1.2%	10	302	95.5%	203.8	196.97	0.49
13:00	1,018	999	1.9%	9	314	95.4%	182.9	177.58	0.40
13:30	1,061	961	9.4%	67	306	100.0%	163.4	180.37	-1.26
14:00	1,173	1,082	7.8%	78	313	99.5%	188.9	203.97	-1.06
14:30	1,212	1,179	2.7%	23	304	96.6%	206.1	204.69	0.10
15:00	1,137	1,122	1.3%	15	320	96.9%	205.8	202.13	0.26
15:30	1,169	1,137	2.7%	17	311	97.1%	202.2	201.98	0.02
16:00	1,107	1,059	4.3%	46	315	99.2%	187.1	193.73	-0.48
16:30	914	892	2.4%	22	307	95.2%	160.0	155.89	0.33
17:00	615	615	0.0%	2	328	83.0%	135.0	112.07	2.17
17:30	420	420	0.0%	0	328	73.8%	103.5	76.53	3.08
18:00	49	49	0.0%	14	180	84.2%	5.8	4.90	0.41

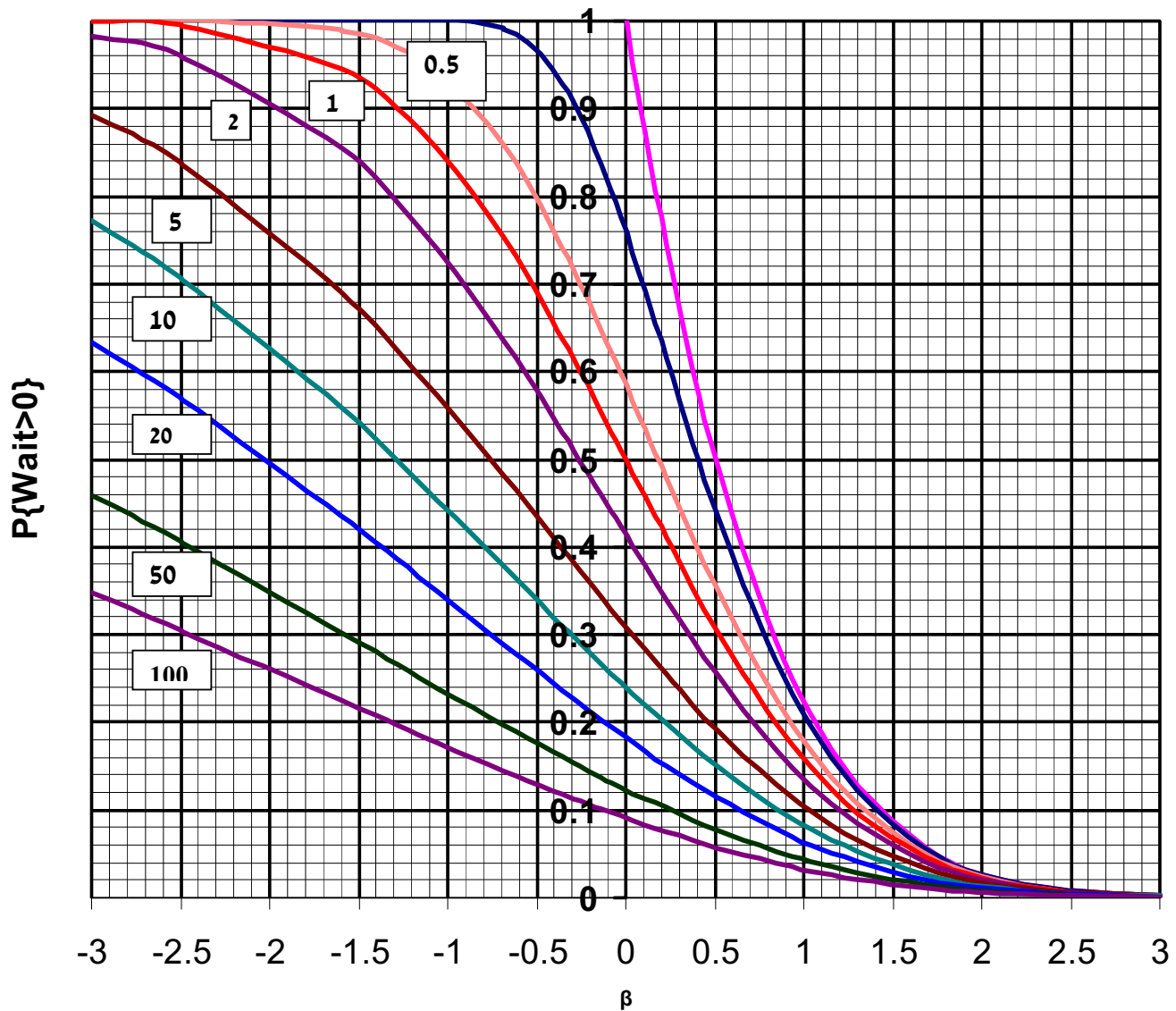
Table Number 13

β Vs. Time of Day



Graph Number 14

Erlang-A: $P\{\text{Wait} > 0\} = \alpha$ vs. β ($N = R + \beta\sqrt{R}$)



GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\frac{\theta}{\mu} = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

שאלה 9

הנתונים הבאים נאספו עבור כל שופט בבית הדין לעבודה בחיפה :

מספר התיקים שהיו בטיפול בסוף כל חודש : $L_1, L_2, \dots, L_{12}$

מספר התיקים שנסגרו בכל חודש : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{12}$

אב בית הדין מעוניין להעריך את זמן השהייה הממוצע של תיק בבית המשפט : עבור כל שופט בנפרד, וכן בסה"כ. כתבו תשובות לשאלות אלה תוך שימוש רק במדדים הנתונים לעיל :

נסמן ב- L_{ij} את מספר התיקים שהיו בטיפול בסוף חודש i אצל שופט j וב- λ_{ij} את מספר התיקים שנסגרו

בחודש i אצל שופט j . נניח כי יש N שופטים. אזי

עבור שופט j :

$$\sum_{i=1}^{12} L_{ij} / \sum_{i=1}^{12} \lambda_{ij}$$

ממוצע כללי :

$$\sum_{i=1}^{12} \sum_j^N L_{ij} / \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}$$

שאלה 10

אנו משווים שתי מערכות M/G/1. המופע לשתי המערכות הוא פואסוני עם קצב של 20 לקוחות לשעה. השרת במערכת א' הוא איטי אבל עיקבי: ממוצע זמן השירות שלו הוא 2.1 דקות וסטיית התקן היא 0.1 דקות.

ניתן להראות כי אורך התור הממוצע במערכת א' הוא $\frac{49}{60}$.

השרת במערכת ב' הוא מהיר אבל פחות עיקבי: ממוצע זמן השירות הוא 2 דקות וסטיית התקן היא 1 דקה. באיזו מערכת התור קצר יותר בממוצע? הראו את חישובכם.

באיזו מערכת מספר האנשים במערכת גדול יותר בממוצע?

לצורך תשובה, לרשותכם חוק הצפף של Kingman עבור מערכת G/G/1, האומר:

$$\frac{1}{E(S)} W_q \approx \begin{cases} 0 & \text{w.p. } 1 - \rho \\ \exp \left[\text{mean} = \frac{1}{1 - \rho} \frac{C_a^2 + C_s^2}{2} \right] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

כאשר $\approx$ מסמן קירוב של ההתפלגות.

המערכת בה התור קצר יותר בממוצע היא מערכת: א'

דרך החישוב:

$$E[L_q^2] = \lambda E[W_q^2] = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \frac{1 + C_s^2}{2} = \frac{50}{60}$$

המערכת בה מספר האנשים גדול יותר בממוצע היא: א'

$$E[L^1] = \rho^1 + E[L_q^1] = 91/60$$

$$E[L^2] = \rho^2 + E[L_q^2] = 90/60$$

שאלה 11

סטודנטים בפקולטה לתעשייה וניהול בטכניון ערכו מחקר דיוק-זמנים של התחבורה הציבורית. בדגימה אקראית של זמני ההמתנה של נוסעים לאוטובוס מספר 31 בתחנת האוטובוס שליד הפקולטה עלה כי ממוצע זמן ההמתנה לאוטובוס הוא 20 דקות. ממחלקת שירות הלקוחות של אגד דווחו כי זמן ההמתנה הממוצע צריך להיות 10 דקות. הסבירו (בשני משפטים) את ההבדל בין תוצאת הסטודנטים לבין הדיווח של אגד.

הסבר: אמידה מוטת. באגד יודעים כי אוטובוסים יוצאים כל 20 דקות. הם מניחים כי מכיוון שאנשים מגיעים באקראי לתחנה הם יחכו בממוצע מחצית מהזמן. הם כמובן טועים ושוכחים את התופעה של אמידה מוטת שכן באה לידי ביטוי בחישובים של הסטודנטים.

שאלה 12

נתבונן במערכת M/M/N/B+M עם הפרמטרים הבאים : קצב המופע הוא 150 לקוחות לדקה, זמן השירות הוא דקה אחת, וממוצע הסבלנות גם הוא דקה. מספר הקווים, B, הוא 175 ומספר השרתים, N, הוא 150.

12.1. כיצד תשפיע תוספת שרת על ההסתברות לחסימה (אחוז הלקוחות המקבלים צליל תפוס) ?
נמקו תשובתכם במדויק ככל שתוכלו.

תשובה : לא תשפיע

הסבר : כאשר $\mu = \theta$ קצבי המעבר בדיאגרמת המצבים הם זהים לכל מספר שרתים. לכן ההסתברות לחסימה (דהיינו ההסתברות שתהליך הלידה ומוות יהיה במצב B) היא זהה לכל מספר של שרתים ולא תשתנה עם תוספת שרת.

בכל הסעיפים הבאים הניחו כי מספר הקווים, B, הוא אינסופי :

12.2. עבור איוש של 150 שרתים בדיוק (ומספר קווים אינסופי) נתון כי נצילות שרת היא 96.7%, מהו אחוז הנוטשים ? הציגו חישובכם.

אחוז הנוטשים : 3.3%

$$\rho = \frac{\lambda_{eff}}{N\mu} = \frac{\lambda(1 - P_{ab})}{N\mu} \Rightarrow P_{ab} = 1 - \rho \frac{N\mu}{\lambda} = 1 - 0.967$$

דרך החישוב :

12.3. בעזרת 4CallCenters מראים שעל מנת להבטיח כי אחוז הממתינים יהיה בקירוב 25%, יש לאייש את המערכת ב-159 שרתים. תחת רמת איוש זו אחוז הנוטשים הוא 1.1.
נניח עתה כי קצב המופע גדל פי 9 – מהי רמת האיוש שתבטיח את אותו אחוז ממתינים? חשבו בקירוב את אחוז הנוטשים במקרה זה.

$$N = 150 * 9 + 9 * 3 = 1377 \text{ : רמת איוש}$$

$$159 = 150 + 9 \sqrt{150}$$

$$\Rightarrow 9 = \frac{9}{\sqrt{150}}$$

$$N = 150 \times 9 + 9 \sqrt{150 \times 9}$$

$$= 150 \times 9 + 9 \times 3$$

$$\%_{ab} = 1.1/3 = 0.3666\% \text{ : אחוז נוטשים}$$

12.4. תארו במילה אחת את התפלגות מספר הלקוחות במערכת?

התפלגות פואסון

12.5. נניח עתה כי קצב המופע הוא 150, זמן השירות הממוצע הוא דקה אחת, הסבלנות הממוצעת היא דקה אחת, אך מספר השרתים הוא עתה 120.
מהי בקירוב ההסתברות להמתין? הסבירו בקיצור.
מהו בקירוב אחוז הנוטשים?

הסתברות להמתין: 1

הסבר: המערכת פועלת בעומס גבוה (בתחום ה-ED) ($\beta = -2.449$) ולכן ההסתברות להמתין היא בקירוב 1. (אין צורך לחשב את β כדי להגיע למסקנה זו)

$$\text{אחוז נוטשים: } \rho = \frac{\lambda}{N\mu} \text{ where } P_{ab} \sim 1 - \frac{1}{1 + \rho} \text{ . לכן } P_{ab} \sim 0.2$$