



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגלת : ניצן כרמלי

תאריך הבחינה : 25.3.2014

מס' סטודנט _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד ב' – סמסטר חורף תשע"ד 2014

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 28 עמודים, כולל עמוד זה ונוסחאות מהסתברות בעמוד האחרון.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

הרצאות\תרגולים\בחינות קודמות	מתוך 21 נקודות	שאלה 1
תרגילי בית	מתוך 21 נקודות	שאלה 2
יישום	מתוך 42 נקודות	שאלה 3
תיאוריה	מתוך 16 נקודות	שאלה 4

סה"כ _____ מתוך 100 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 - תרגילי כיתה/הרצאות/מבחנים קודמים (21 נקודות)

חברת MBPF Finance Inc. מבצעת הערכת בקשות להלוואות ולאחר מכן מאשרת או דוחה את הבקשות. החברה מעוניינת להעריך שינויים ברמת השירות הנובעים משינוי בתהליך הערכת הבקשות.

מופע הבקשות להלוואות הינו בקצב של 1000 בקשות בחודש.

עד לינואר 1998 (תחת "תהליך 1"), כל בקשה עוברת את אותו התהליך. נמצא כי בממוצע קיימות 500 בקשות בתהליך ההערכה, ובממוצע 20% מהבקשות מאושרות בתום התהליך.

מכיוון שקיימים סוגי בקשות שונים ונראה לא סביר להתייחס לכל הבקשות באותו אופן, הוחלט לבצע שינוי בתהליך העבודה. לפי "תהליך 2", כל הבקשות עוברות בדיקה ראשונית שבסופה תסווג כל בקשה לאחת מ-3 הקבוצות הבאות:

A – בקשות שעבורן קיים סיכוי גבוה לאישור ועבורן נדרשת בדיקה קצרה נוספת.

B – בקשות עבורן נדרשת בדיקה מפורטת.

C – בקשות נדחות לאחר בדיקה ראשונית.

נמצא כי בממוצע 25% מכלל הבקשות הן מסוג A, 25% מסוג B ו- 50% מסוג C. בממוצע, 70% מהבקשות מסוג A ו- 10% מהבקשות מסוג B מאושרות בתום הבדיקה הנוספת. מספר הבקשות הממוצע בתהליך הינו כדלקמן: 200 בקשות בבדיקה הראשונית, 25 בבדיקה לבקשות מסוג A ו- 150 בבדיקה לבקשות מסוג B.

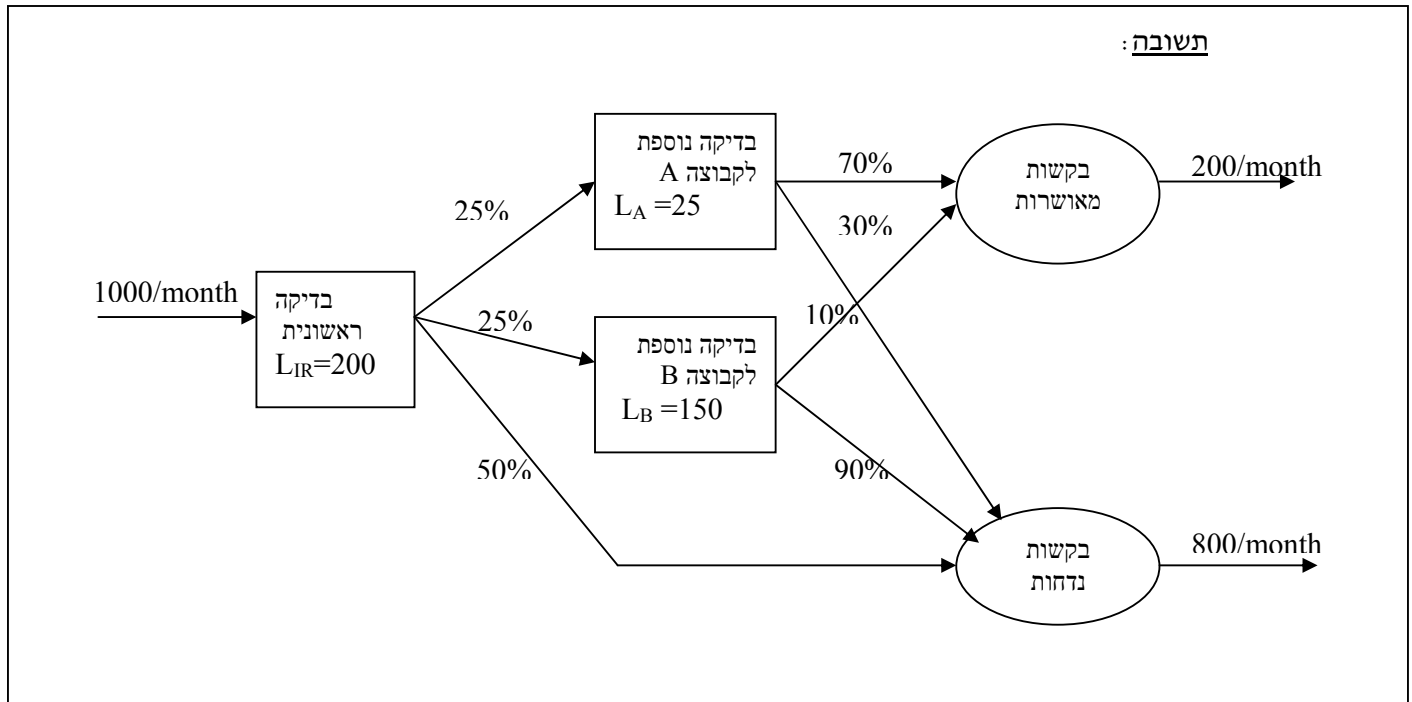
1.1 חשבו את ממוצע זמן בדיקת בקשה לפי תהליך 1.

תשובה:

לפי חוק Little ,

$$W_1 = \frac{500}{1000} \text{ month} = 15 \text{ days}$$

1.2 השלימו את התרשים המתאר את **תהליך 2** ע"י תוספת שמות הפעילויות, אחוזי מעבר, קצבי מעבר וממוצע מספר בקשות בתחנה.



1.3 חשבו את ממוצע זמן בדיקת בקשה לפי **תהליך 2**.

תשובה:

דרך 1:

$$W_2 = \frac{375}{1000} \text{ month} = 11.25 \text{ days}$$

דרך 2:

$$W_{IR} = \frac{200}{1000} \text{ month} = 6 \text{ days}; \quad W_A = \frac{25}{1000 \times 0.25} \text{ month} = 3 \text{ days};$$

$$W_B = \frac{150}{1000 \times 0.25} \text{ month} = 18 \text{ days};$$

$$\Rightarrow W_2 = 0.5 \cdot 6 + 0.25 \cdot (6 + 3) + 0.25 \cdot (6 + 18) = 11.25 \text{ days}$$

כלומר, שיפור של 4 ימים בממוצע זמן השירות.

1.4 האם זמן השירות הממוצע עבור בקשות שאושרו השתפר במעבר מתהליך 1 לתהליך 2? הציגו את חישוביכם.

תשובה:

דרך 1: $\frac{25\% \times 70\%}{20\%} = \frac{7}{8}$ מהבקשות שאושרו הן מסוג A, ו- $\frac{1}{8}$ מסוג B. לכן,

$$W_{Approved} = \frac{7}{8} \cdot 9 + \frac{1}{8} \cdot 24 = 10.875 \text{ days}$$

דרך 2:

$$L_{Approved} = L_{IR, App} + L_{A, App} + L_{B, App} = 200 \cdot 20\% + 25 \cdot 70\% + 150 \cdot 10\% = 72.5$$

$$\lambda_{Approved} = 1000 \cdot 20\% = 200 \text{ per month}$$

$$\Rightarrow W_{Approved} = \frac{72.5}{200} \text{ month} = 10.875 \text{ days}$$

← זמן העיבוד עבור הבקשות שאושרו השתפר.

1.5 הניחו כי 8 סוכנים עובדים בתחנת הבדיקה הנוספת לבקשות מסוג B וכי עומס העבודה מתחלק ביניהם באופן שווה. כל סוכן יכול לשרת 40 בקשות לחודש. בנוסף, בממוצע, 20% מהבקשות שמסווגות לאחר הבדיקה הראשונית לקבוצה A דורשות למעשה בדיקה מפורטת יותר, ונשלחות לבדיקה עבור קבוצה B (לאחר בדיקתן בקבוצה A). מהי כעת נצילות סוכן בתחנת הבדיקה מסוג B? הציגו את חישוביכם.

תשובה:

$$\rho_B = \frac{250 + 250 \cdot 20\%}{8 \cdot 4} = 94\%$$

1.6 תחת ההנחות של סעיף 1.5, מהו פרופיל התעסוקה של סוכן בתחנה B? כלומר, מהו אחוז הזמן בטווח הארוך בו עסוק הסוכן בהערכת בקשות שהגיעו ישירות מהבדיקה הראשונית, בטיפול בבקשות שהגיעו מתחנת בדיקה A ומהו אחוז זמן חוסר-התעסוקה?

תשובה:

בקשות מבדיקה ראשונית : 78%.

בקשות מ-A : 94%-78%=16%

בטל : 100%-94%=6%

שאלה 2 – תרגילי בית (21 נקודות)

חלק 1 – SEESat

2.1.1 גרף 1 וגרף 2, אשר הופקו באמצעות SEESat, מציגים היסטוגרמה של משכי שירות ב – USBank, באפריל 2001. הסבירו מהו ההבדל בין שני הגרפים, מהו היתרון ומהו החיסרון של שימוש בגרף 2 על פני גרף 1.

תשובה:

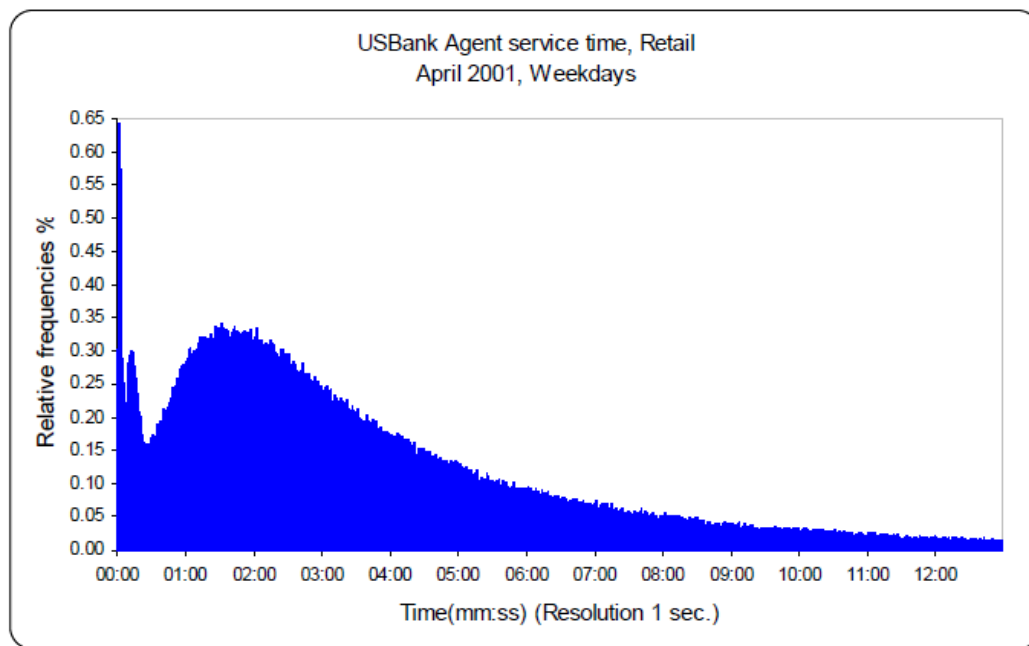
ההבדל בין שני הגרפים הוא ברזולוציה שלהם (אשר מתאימה לרוחב העמודות בהיסטוגרמה). גרף 1 הינו ברזולוציה של שניה אחת ואילו גרף 2 הינו ברזולוציה של 30 שניות. בשל כך, גרף 2 הינו חלק יותר, מה שמאפשר לראות טוב יותר את הצורה הכללית של התפלגות משכי השירות. עם זאת, בגרף 2 אנו מאבדים מידע על אי הסדירות בראשית הצירים.

2.1.2 איזו תופעה מיוחדת באה לידי ביטוי בגרפים? הציעו הסבר לתופעה זו.

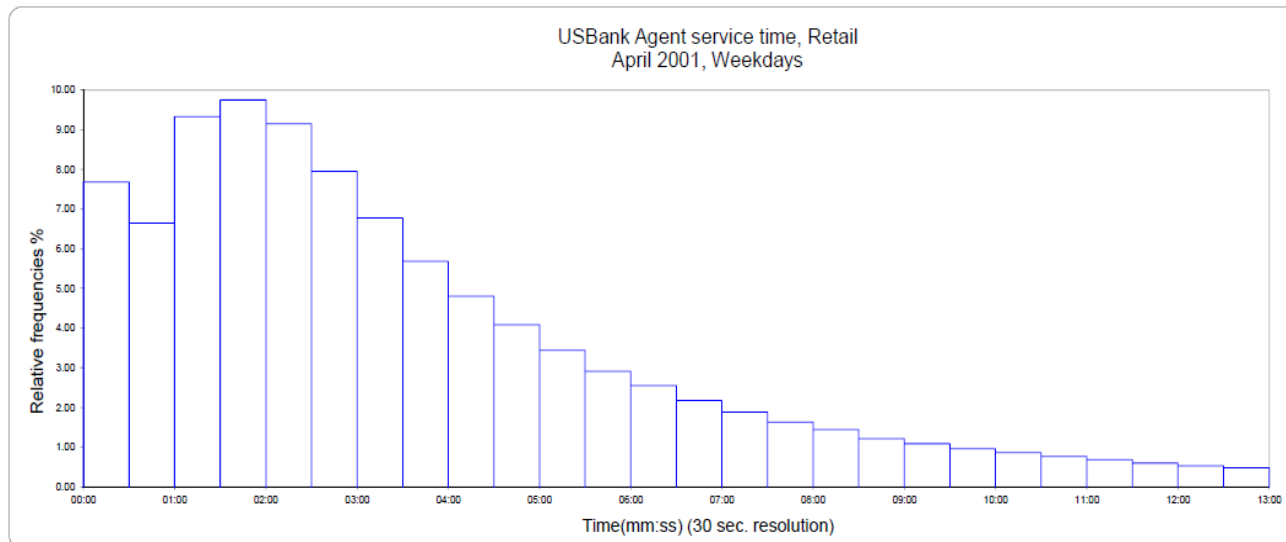
תשובה:

ניתן לראות כי יש אחוז גבוה יחסית של שיחות שנמשכות זמן קצר מאוד, עד כדי כך שברור כי לא הייתה יכולה להתרחש כל אינטראקציה בין המוקדן ללקוח. סיבה אפשרית לכך היא שהמוקדנים עונים לשיחות ומתנקים אותן מיד. התנהגות כזו יכולה לנבוע מכך שמוקדנים מתוגמלים על כמות השיחות להן הם עונים או על קיצור ממוצע משך השיחה. סיבה נוספת יכולה להיות עייפות הנובעת מהעסקת יתר.

גרף 1



גרף 2



2.1.3 הסבירו בקצרה מה מציג גרף 3.

תשובה:

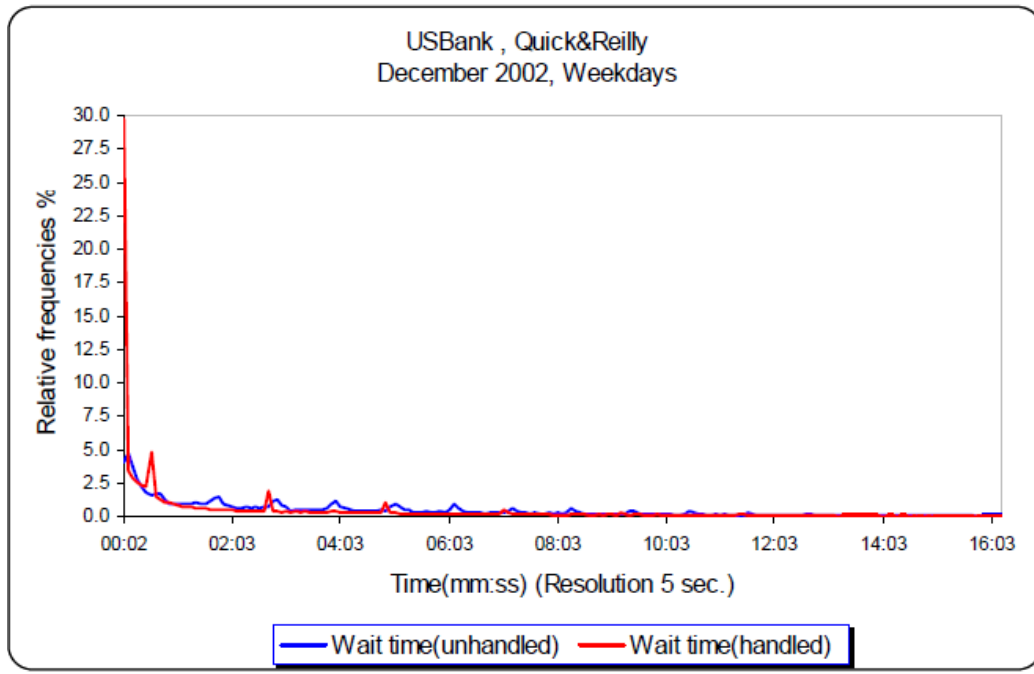
גרף 3 מציג היסטוגרמת משך זמני ההמתנה עבור לקוחות שקיבלו שירות (Handled) ועבור לקוחות שלא קיבלו שירות (Unhandled). מדובר בזמני המתנה לשירות מסוג Quick&Reily ב – USBank, בכל ימי החול של דצמבר 2002.

2.1.4 הסבירו בקצרה מהו ההבדל בין גרף 3 וגרף 4 ומהו היתרון בשימוש בגרף 4 על פני גרף 3.

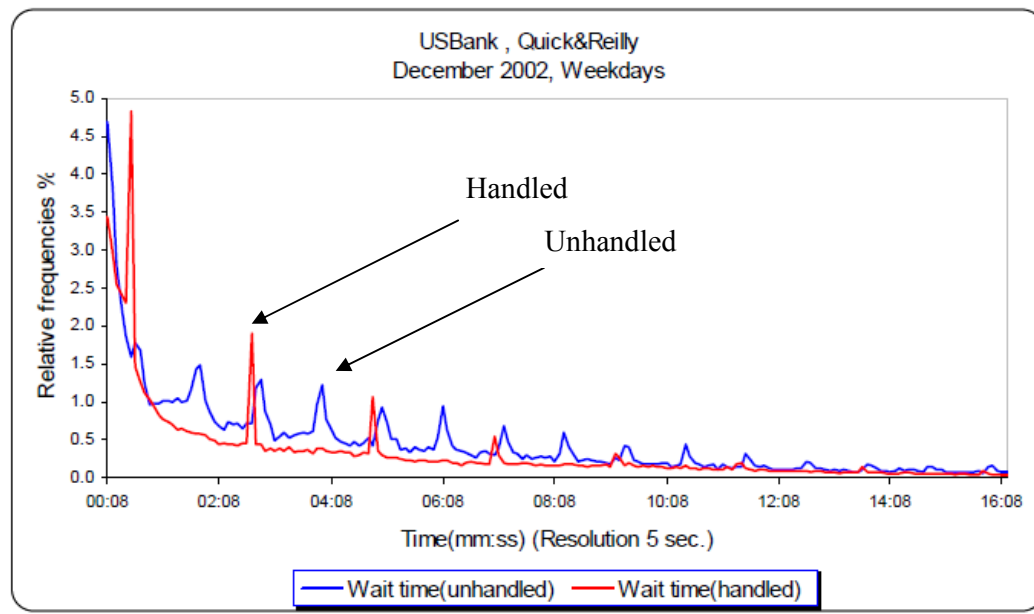
תשובה:

גרף 4 מציג את אותן היסטוגרמות כמו גרף 3, אך מציג אותן החל מ-5 שניות. במקור (גרף 3), כ – 30% מהלקוחות שקיבלו שירות נענו מיד, כך שזמן ההמתנה שלהם היה אפס. צמצום טווח ציר X מקטין את הטווח של ציר ה – Y ומאפשר התמקדות בתופעות המעניינות עבור לקוחות שלא נענו מיד, תופעות שקשה להבחין בהן בגרף 3.

3 גרף



4 גרף



2.1.5 איזו תופעה מעניינת באה לידי ביטוי בגרף 3 ו-4? הציעו הסבר לתופעה זו.

תשובה:

ניתן לראות בגרפים כי בהיסטוגרמה של זמן ההמתנה של לקוחות שלא קיבלו שירות (Unhandled) יש פיק כל 65 שניות. בהיסטוגרמה של זמן ההמתנה של לקוחות שקיבלו שירות (Handled) יש פיק כל 130 שניות. אנו סבורים כי ניתן להסביר את הפיקים בזמני ההמתנה של לקוחות שלא קיבלו שירות ע"י הסבר "פסיכולוגי" למשל כתגובה של הלקוחות להודעה שנשמעת תוך כדי ההמתנה שלהם כל 65 שניות (כגון הודעה על מיקומם בתור או משך ההמתנה המשוער). את הפיקים בזמני ההמתנה של לקוחות שקיבלו שירות ניתן כנראה להסביר דרך פרוטוקול המערכת, למשל מדיניות ניהול תור שמקדמת בתור לקוחות מסויימים בפרקי זמן קבועים מתחילת המתנתם – 130 שניות במקרה שלנו.

חלק 2 – "Anonymous Pizza"

בפיצרייה מסוימת ניתן לתאר את תהליך הגעת ההזמנות לפיצה באמצעות תהליך פואסון עם קצב של 12 הזמנות בשעה.

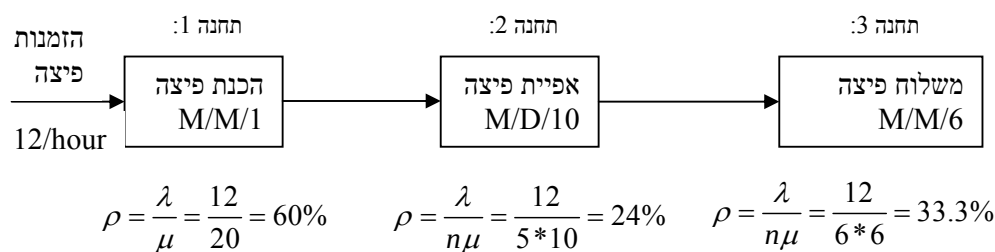
בפיצרייה מועסק מכין פיצות בודד, אשר עלות העסקתו הינה \$10 לשעה, המכין בממוצע פיצה אחת כל 3 דקות. זמן הכנת הפיצות מפולג מעריכית. לאחר הכנת הפיצה, היא מוכנסת לתנור בעל קיבולת של 10 פיצות, וזמן אפייתה הוא 12 דקות בדיוק. בפיצרייה צוות של 6 שליחים וזמן משלוח (הלוך ושוב) מפולג מעריכית עם ממוצע של 10 דקות. זמן נסיעה לכיוון אחד שווה למחצית זמן נסיעה הלוך ושוב, ונניח לפשטות כי גם זמן זה מפולג מעריכית. עלות העסקת שליח הינה \$7.5 לשעה. זמני הכנת הפיצות וזמני המשלוח בלתי תלויים.

הפיצרייה פועלת במדיניות לפיה היא מתחייבת לספק את הפיצה המוזמנת תוך 40 דקות מקבלת ההזמנה (תחילת הכנת הפיצה), ובמקרה של סטייה ממדיניות זו הלקוח מפוצה ע"י הוזלה של \$2.5 במחיר הפיצה.

2.2.1 שרטטו בעמוד הבא דיאגרמת זרימה לתהליך המתואר לעיל (Process Flow Diagram), החל מהגעת הזמנה ועד לשליחתה ללקוח. תארו כל תחנה באמצעות המודל המתמטי המתאים לה, תוך הסבר מתאים.

תשובה:

תרשים זרימה:



אנו מציגים את תהליך השירות כרשת תורים פשוטה בעלת 3 תחנות.

תחנה 1: M|M|1

הסבר: נתון כי תהליך הגעת ההזמנות הוא תהליך פואסון, זמן הכנת הפיצות מפולג מעריכית ובתחנה מכין פיצה בודד.

תחנה 2: M|D|10

הסבר: תהליך העזיבה מתחנה 1 (שהוא גם תהליך הכניסה לתחנה 2) הוא פואסוני. זמן האפייה הוא דטרמיניסטי והקיבולת הסטטית של התנור היא 10 פיצות.

תחנה 3: M|M|6

הסבר: זמן השהיה בתחנה 2 הוא דטרמיניסטי ולכן תהליך העזיבה מתחנה זו הוא פואסוני (כתהליך הכניסה לתחנה). ולכן, תהליך הכניסה לתחנה 3 הוא פואסוני. נתון כי זמן השירות (נסיעה הלוח ושוב) מפולג מעריכית וכי בתחנה עובדים 6 שליחים.

2.2.2 איזו פעולה מהווה את צוואר הבקבוק בתהליך? הסבירו בדיוק ככל שתוכלו.

תשובה:

הקיבולת של תחנה 1 היא 20 פיצות לשעה, של תחנה 2 היא 50 פיצות לשעה ושל תחנה 3 היא 36 פיצות לשעה. קצב ההגעה לכל אחת מהתחנות זהה ולכן תחנה 1, שלה הקיבולת הנמוכה ביותר, היא צוואר הבקבוק.

2.2.3 חשבו את ההסתברות כי לקוח יפוצה עקב איחור בהגעת פיצה.
 לצורך החישוב, היעזרו בחומר המופיע בעמודים 11-12, הכולל: נספח שהופיע בתרגיל הבית
 והעמודים הרלוונטיים שנלקחו מההרצאות. הסבירו כל שלב בחישוביכם. **אין צורך בחישובים מספריים - מספיק שימוש בנוסחאות הרלוונטיות והצבת הפרמטרים בהן.**

תשובה:

זמן שהיה בתחנה 2 הוא 12 דקות.

נסמן:

$X =$ זמן שהיה בתחנה 1 (תור $M|M|1$)

$$X \sim \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{\mu(1-\rho_1)} = \frac{1}{8} \text{ hour}\right) = \exp(8)$$

$Y =$ זמן המתנה בתור לתחנה 3 (תור $M|M|6$)

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{w.p. } 1 - E_{2,N} \\ \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{n\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho_3} \text{ hour}\right) = \exp(24) & \text{w.p. } E_{2,N} \end{cases}$$

$Z =$ זמן משלוח (זמן שהיה בתחנה 3)

$$Z \sim \exp\left(\text{mean} = 5 \text{ minutes} = \frac{1}{12} \text{ hour}\right) = \exp(12)$$

(הנצילות בתחנה 2 נמוכה ולכן נניח כי אין תור לתחנה זו, כלומר פיצה מוכנסת לתנור מיד בתום הכנתה בתחנה 1).

X, Y, Z ב"ת.

$$\begin{aligned} P(X + 12 + Y + Z > 40) &= P(X + Y + Z > 28) = \\ &= P(\underbrace{X + Z}_{\text{sum of two exponential random variables}} > 28) * P(Y = 0) + P(\underbrace{X + Y + Z}_{\text{sum of three exponential random variables, first scenario}} > 28 | Y > 0) * P(Y > 0) \\ &= 0.064 * 0.982 + 0.093 * 0.018 = 0.065 \end{aligned}$$

Sum of two exponential random variables.

Assume that $X \sim \exp(\lambda_1)$, $Y \sim \exp(\lambda_2)$, X and Y are independent and $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Then straightforward calculations provide us with the following cumulative distribution function of $X + Y$:

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 x}.$$

Sum of three exponential random variables.

Assume that $X \sim \exp(\lambda_1)$, $Y \sim \exp(\lambda_2)$, $Z \sim \exp(\lambda_3)$, X , Y and Z are independent and $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Then the cumulative distribution function of $X + Y + Z$ is given by:

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 x} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{-\lambda_3 x}.$$

M/M/n Queue: Properties

Erlang-C Formula (1917) for the Delay probability:

$$P\{W_q > 0\} \triangleq E_{2,n} = \sum_{i \geq n} \pi_i = \frac{R^n}{n!} \frac{1}{1 - \rho} \cdot \pi_0.$$

Erlang-C computation: via recursion, see Erlang-B below.

Erlang-C approximations: important later in course.

Number-in-queue:

$$P\{L_q = i\} = E_{2,n} \cdot (1 - \rho) \rho^i, \quad i > 0,$$

or

$$L_q = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Geom}_{\geq 0}(1 - \rho) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Waiting time distribution:

$$\frac{W_q}{1/\mu} = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Exp}(\text{mean} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\rho}) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Compare with M/M/1!

Departure process: Poisson(λ) in steady-state.

Proof via reversibility, as with M/M/1.

M/M/1: Further Properties

- **Delay probability** (PASTA):

$$P\{W_q > 0\} = \rho.$$

- **Waiting time in queue** (given delay, it is exp):

$$\frac{W_q}{1/\mu} \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - \rho \\ \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{1-\rho}\right) & \text{wp } \rho \end{cases}$$

Note: $E\left[\frac{W_q}{1/\mu}\right] = 0 \times (1 - \rho) + \frac{1}{1-\rho} \times \rho = \frac{\rho}{1-\rho}.$

- **Number-in-system/queue:**

$$E[L] = \frac{\rho}{1-\rho}; \quad E[L_q] = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

- **Server's utilization** (occupancy) is $\rho = \lambda/\mu$.

Via Little's formula, applied to "system = server":

$$\rho = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T L_{\text{Server}}(u) du = \lambda \times \frac{1}{\mu}.$$

- **Departure process** in steady state is Poisson (λ) (Burke's theorem) – useful in queueing networks.

Support: Reversibility implies that the departure process equals (in distribution) the arrival process. Furthermore,

Average inter-departure time =

$$\frac{1}{\mu} \cdot \rho + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right) \cdot (1 - \rho) = \frac{1}{\lambda}.$$

שאלה 3 – יישום (42 נקודות)

להלן כתבה שהתפרסמה ב-YNET ב-29.10.13. אין צורך לקרוא את הכתבה - כל המידע הדרוש יופיע בשאלות עצמן.

למרות החוק, עדיין ממתנים לנציגי שירות

משרד התקשורת אמנם קנס את HOT על זמני המתנה ממושכים בשירות הלקוחות הטלפוני, אך זו בהחלט לא חברת התקשורת היחידה שממשיכה לייבש אותנו על הקו. איפה חיכינו הכי הרבה ובאיזו חברה - גם כשהנציג חוזר אלייך - הוא נותן לך לחכות עוד. עד 3 דקות המתנה? הצחקתם אותן

מירב קריסטל עדכון אחרון: 29.10.13, 00:18

המתנה של 3 דקות ב**שירות הלקוחות** הטלפוני? אין כמעט חיה כזאת. לעומת זאת, עצבים מרוטים ולחץ דם גבוה: יש בשפע. אלה הם חיינו בהמתנה לנציגי שירות לקוחות.

למה חברות התקשורת מתעקשות להמשיך לעצבן אותנו ולקצר את חיינו במערכות מסורבלות לניתוב שיחות, ובהמתנה בלתי נסבלת לנציג אנושי? נראה **שהתקנות (תיקון לחוק הגנת הצרכן) המחייבות אותן לענות תוך 3 דקות** לא תמיד מסייעות ללקוח הממתין על הקו, משום שברוב חברות התקשורת (החוק גם נוגע לחברות אשראי וספקיות מים, למשל) ההמתנה עדיין ארוכה מדי והן פוטרות את עצמן ממענה מהיר בכך שהן מציעות ש"נציג יחזור אלייך".

גם כשהצרכן המיואש בוחר באופציה שיחזרו אליו, לא תמיד הנציג חוזר תוך זמן קצר מספיק ולא לכל אחד מתאים שנציג יחזור אליו עוד 3 שעות. הנה בדיקה שערכנו במוקדי שירות הלקוחות של חברות התקשורת. התקשרנו מינימום פעמיים לכל חברה כדי לבדוק את זמני ההמתנה במוקדים שלה ואז התקשרנו פעם נוספת לחברות שזמן ההמתנה אצלן היה ארוך מ-3 דקות והשאירו את מספר הטלפון שלנו בשירות הלקוחות כדי לבדוק תוך כמה זמן יחזרו אלינו. התוצאות ברובן: לא משמחות.

בשנה האחרונה החל משרד התקשורת לאכוף את החוק הקובע כי על חברות תקשורת לענות ללקוחות מוקד השירות הטלפוני שלהן תוך 3 דקות או, לחילופין, לאפשר להם להשאיר הודעה ולחזור אליהם תוך 3 שעות. כחלק מאכיפת החוק, הוטלו קנסות כבדים על חברות שלא עמדו ביעדים אלו. מנהל המוקד הטלפוני של אחת מחברות התקשורת הגדולות בארץ שכר את שירותכם, כבוגרי הקורס להנדסת מערכות שירות, על מנת לבצע ניתוח תפעולי של מוקד השירות הטלפוני, וזאת כדי לבדוק את העמידה ביעדי החוק וביעדים נוספים ולהציע הצעות לשיפור תפקוד המוקד.

3.1 מנהל המוקד מסביר כי טרם כניסת החוק החדש, יעד הביצוע שהוגדר היה מענה תוך דקה ל- 80% מהשיחות. הוא מציין כי אף על פי שהמוקד עמד ביעד זה ואף יותר (בפועל הסתבר כי כמעט 85% מהשיחות נענו תוך דקה) עדיין סקרי שביעות רצון הצביעו על חוסר שביעות רצון מזמני ההמתנה במוקד. הציעו הסבר לתופעה זו ותנו דוגמה למדיניות ניהול תור שעשויה להביא לרמת שירות טובה מבחינת המדד שהוגדר אך לחוסר שביעות רצון של הלקוחות.

תשובה:

המדד לרמת שירות שבו משתמש המוקד – אחוז הנענים תוך דקה, הינו בעייתי מפני שאינו לוקח בחשבון את הנוטשים ואינו מסתכל כלל על משך ההמתנה של לקוחות שהמתינו יותר מדקה. מדיניות ניהול תור לפי LCFS (Last Come First Served), למשל, תגרום לכך שרמת השירות על פי המדד תהיה גבוהה אך יהיו לקוחות רבים שינטשו ויאלצו לחכות זמן רב בטרם נטישה (כלומר, גם ימתינו זמן רב וגם לא יקבלו שירות).

להלן טבלה המסכמת חלק מנתוני דוח ACD של המוקד באחד מימי החול בחודש האחרון ופירוט השדות בדוח:

	ASA	Avg Aban Time	ACD Calls	Aban Calls
8:30	8.73	15.55	113	11
9:00	4.86	0.00	239	0
9:30	17.08	16.46	391	39
10:00	25.03	10.71	432	28
10:30	1.16	0.00	392	0
11:00	0.15	4.50	357	2
11:30	0.00	0.00	350	0
12:00	5.59	13.17	334	12
12:30	11.90	9.84	337	19
13:00	7.40	9.40	298	15
13:30	11.43	13.09	289	23
14:00	6.35	15.09	323	22
14:30	6.40	13.10	345	21
15:00	22.76	18.05	432	22
15:30	2.41	4.57	574	7
16:00	1.08	5.00	533	1
16:30	50.28	36.57	406	121
17:00	163.99	50.97	431	317
17:30	426.70	214.25	128	216
18:00	584.69	737.27	13	49

- ASA – Average Speed of Answer (sec)
זמן המתנה ממוצע בתור של לקוחות שקיבלו שירות.
- Avg Aban Time – Average Abandon Time (sec)
זמן המתנה ממוצע בתור של לקוחות שנטשו.
- ACD Calls - מספר הלקוחות שקיבלו שירות
- Aban Calls - מספר הלקוחות שנטשו.

3.2 תארו כיצד יש לחשב את סך ההגעות, אחוז הנוטשים וממוצע זמן ההמתנה באינטרוול מסויים, על סמך נתוני הדוח. אין צורך בחישוב מספרי.

תשובה:

$$\text{Number of arrivals} = \text{ACD Calls} + \text{Aban Calls}$$

$$\% \text{Abandonment} = \frac{\text{Aban Calls}}{\text{Number of arrivals}}$$

$$\text{Average waiting time} = \frac{\text{ASA} \times \text{ACD Calls} + \text{Avg Aban Time} \times \text{Aban Calls}}{\text{Number of arrivals}}$$

3.3 תארו בפירוט כיצד תאמדו את ממוצע זמן הסבלנות בכל אינטרוול, על סמך נתוני הדוח. כיצד תחשבו את ממוצע זמן הסבלנות היומי? אין צורך בחישוב מספרי.

תשובה:

ממוצע הסבלנות בכל אינטרוול i הינו :

$$\begin{aligned} E[\tau_i] &= \frac{1}{\theta_i} = \frac{\text{Total waiting time}_i}{\# \text{ abandon}_i} = \frac{\text{Average waiting time}_i}{P\{\text{Ab}\}_i} \\ &= \frac{\text{Average waiting time}_i \times \text{Number of arrivals}_i}{\text{Aban Calls}_i} \end{aligned}$$

ממוצע הסבלנות היומי הינו ממוצע משוקלל של הסבלנות הממוצעת בכל אינטרוול :

$$E[\tau] = \frac{1}{\theta} = \frac{\text{Total waiting time}}{\# \text{ abandon}} = \frac{\sum_i \text{Number of arrivals}_i \times \text{Average waiting time}_i}{\sum_i \text{Number of arrivals}_i \times \% \text{Abandonment}_i}$$

כאשר האינדקס i מתייחס לחצי השעה המתאימה מתחילת יום העבודה.

3.4 על סמך נתוני הדוח, האם המוקד עובד באותו תחום תפעולי במשך כל היום? אם כן, מהו? אם לא, הביאו דוגמאות לכל התחומים התפעוליים השונים במהלך היום. נמקו את תשובתכם והביאו תימוכין מספריים לטענותיכם. (הניחו כי משך שירות ממוצע הינו כ – 4 דקות).

תשובה:

המוקד אינו עובד באותו תחום תפעולי במשך כל היום. לדוגמה בין 9:00 ל- 9:30 ובין 10:30 ל- 12:00 המוקד עובד בתחום ה – QD עם אחוז נטישות אפסי וזמן המתנה ממוצע קרוב מאוד לאפס, כלומר כמעט כל הלקוחות מקבלים מענה מיידי. בשעות הערב, החל מ-16:30, המוקד עובד בתחום ה – ED. עם אחוזי נטישות של מעל 20% וזמן המתנה בסדר גודל של משך שירות ממוצע. למשל, בין 17:30 ל- 18:00 אחוז הנוטשים הינו: $0.628 = 62.8\% = \frac{216}{128+216}$, זמן ההמתנה הממוצע הינו: $300 \text{ sec} = \frac{(426.7 \times 128) + (214.25 \times 216)}{128 + 216}$ 5) דקות המתנה לעומת 4 דקות שירות).

באינטרוולים אחרים, למשל בין 12:00 ל- 15:00 המוקד עובד בתחום ה – QED, עם אחוז נטישות נמוך (פחות מ-10%), אך לא אפסי, וזמן המתנה ממוצע קטן בסדר גודל ממשך שירות ממוצע. למשל בין 13:30 ל- 14:00 אחוז הנוטשים הינו: $0.0724 = 7.4\% = \frac{23}{289+23}$, זמן ההמתנה הממוצע הינו: $11.55 \text{ sec} = \frac{(11.43 \times 289) + (13.09 \times 23)}{289 + 23}$.

3.5 נתמקד כעת ביעדי החוק החדש. בשלב הראשון, לצורך פשטות הניתוח, נניח כי המודל המתאים לתיאור המוקד הוא מודל Erlang A. מנהל המוקד גילה כי עיקר התלונות על זמני המתנה ארוכים מתקבלות מלקוחות המתקשרים בשעות הערב. למשל, בין שעה 18:30 ל-19:30, ביום חול סטנדרטי מגיעות כ – 250 שיחות, הסבלנות הממוצעת היא כ – 4 דקות ומשך השירות הממוצע עומד גם הוא על 4 דקות. מנהל המוקד רוצה להבטיח כי 90% מלקוחות המוקד יענו תוך 3 דקות ולא יותר מ-5% מהלקוחות יינטשו. על פי הפלט של תוכנת 4CC בעמוד הבא, מהו מספר המוקדנים המינימלי הדרוש על מנת להבטיח יעדים אלו?

תשובה:

על סמך הפלט של תוכנת 4CC, על מנת להבטיח ש – 90% מהשיחות יענו תוך 3 דקות וכן שאחוז הנוטשים לא יעלה על 5%, יש לאייש את המוקד ב-19 מוקדנים לפחות. תחת איוש זה, אחוז השיחות הנענות תוך 3 דקות יהיה גבוה מ- 90% ויעמוד על כ – 95.5%.

Input	60	03:00	Range	04:00	250	04:00					
Multi-Value			✓								
	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	%Answer	%Abandon	Average Speed of Answer	%Answer within Target	Average Queue Length
Results											
1	60.0	03:00.0	10.0	04:00.0	250.0	04:00.0	59.7%	40.3%	01:52.9	49.4%	6.7
2	60.0	03:00.0	11.0	04:00.0	250.0	04:00.0	65.3%	34.7%	01:32.7	58.5%	5.8
3	60.0	03:00.0	12.0	04:00.0	250.0	04:00.0	70.7%	29.3%	01:15.0	66.6%	4.9
4	60.0	03:00.0	13.0	04:00.0	250.0	04:00.0	75.8%	24.2%	00:59.7	73.4%	4.0
5	60.0	03:00.0	14.0	04:00.0	250.0	04:00.0	80.5%	19.5%	00:46.7	79.2%	3.3
6	60.0	03:00.0	15.0	04:00.0	250.0	04:00.0	84.6%	15.4%	00:35.8	84.0%	2.6
7	60.0	03:00.0	16.0	04:00.0	250.0	04:00.0	88.2%	11.8%	00:26.9	87.9%	2.0
8	60.0	03:00.0	17.0	04:00.0	250.0	04:00.0	91.2%	8.8%	00:19.7	91.1%	1.5
9	60.0	03:00.0	18.0	04:00.0	250.0	04:00.0	93.6%	6.4%	00:14.1	93.6%	1.1
10	60.0	03:00.0	19.0	04:00.0	250.0	04:00.0	95.5%	4.5%	00:09.8	95.5%	0.7
11	60.0	03:00.0	20.0	04:00.0	250.0	04:00.0	96.9%	3.1%	00:06.7	96.9%	0.5
12	60.0	03:00.0	21.0	04:00.0	250.0	04:00.0	98.0%	2.0%	00:04.4	98.0%	0.3
13	60.0	03:00.0	22.0	04:00.0	250.0	04:00.0	98.7%	1.3%	00:02.8	98.7%	0.2
14	60.0	03:00.0	23.0	04:00.0	250.0	04:00.0	99.2%	0.8%	00:01.8	99.2%	0.1

3.6 תחת האיוש של סעיף 3.5, מה יהיה אחוזו הלקוחות המקבלים מענה מידי? מהי נצילות המוקדנים?

בתשובתכם השתמשו בפונקציית Garnett ובנוסחאות המצורפות בעמודים 22-25.

תשובה:

ראשית נחשב את פרמטר השירות β :

$$R = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{250}{15} = 16.67$$

$$\beta = \frac{n - R}{\sqrt{R}} = \frac{19 - 16.67}{16.67} = 0.57$$

מכיוון ש- $\frac{\theta}{\mu} = 1$ נשתמש ב- $GMR(1)$ ונקבל כי $P(\text{Wait} > 0) \approx 28\%$ כלומר, אחוז הנענים

מיידית הוא כ- 72%.

על מנת לחשב את הנצילות, נשתמש בנוסחא: $Occupancy \approx 1 - \frac{\beta + \gamma}{\sqrt{n}}$ ובנוסחא:

$$P\{Ab\} \approx \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \text{ , המתאימות ל- Erlang A בתחום ה- QED. נוסחאות אלו מופיעות בהמשך}$$

בעמוד 25.

מסעיף 3.5, באיוש של 19 מוקדנים $P\{Ab\} = 4.5\%$ ולכן $\gamma = 0.045 \cdot \sqrt{19} = 0.196$.

$$\text{ומכאן: } Occupancy \approx 1 - \frac{0.57 + 0.196}{\sqrt{19}} = 82\%$$

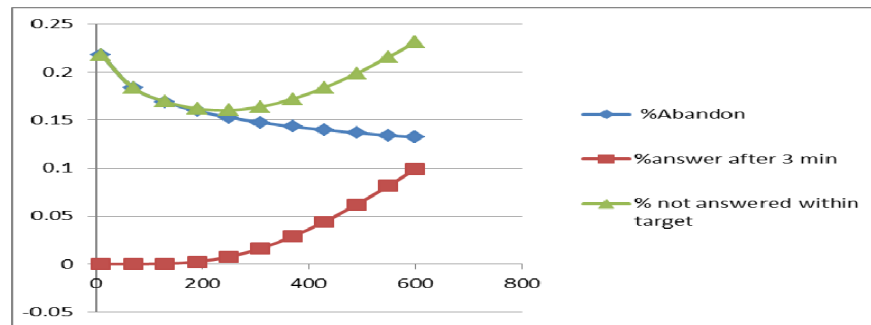
3.7 לצורך בחינת ההשפעה של פרמטר הסבלנות θ על אחוזי הלקוחות הנענים תוך 3 דקות, יצרנו בתוכנת 4CC את **גרף 5**, המצורף בעמוד הבא. גרף זה מציג את אחוזי הלקוחות הנענים תוך 3 דקות כפונקציה של הסבלנות הממוצעת (עבור קצב הגעה של 250 לקוחות בשעה, משך שירות ממוצע של 4 דקות ו-15 שרתים). הסבירו מדוע מתקבל גרף עם צורה כזו.

רמז: ניתן לחלק את הלקוחות שלא נענים תוך 3 דקות לשתי קבוצות. הגדירו מהן וכיצד הן עוזרות להסברת התופעה הנ"ל.

תשובה:

ניתן לחלק את הלקוחות שלא נענים תוך 3 דקות ללקוחות שנטשו (לפני או אחרי 3 דקות) וללקוחות שלא נטשו וקיבלו שירות לאחר יותר מ-3 דקות.

אחוזי הלקוחות הנוטשים יורד כפונקציה של ממוצע הסבלנות. אחוזי הלקוחות שלא נטשו ומקבלים שירות לאחר יותר מ-3 עולה ככל שממוצע הסבלנות עולה (כיוון שאם ללקוחות יש יותר סבלנות יהיו יותר לקוחות בתור $= >$ זמני ההמתנה יעלו $= >$ אחוז אלו שלא נטשים ומקבלים שירות לאחר יותר מ-3 עולה). לכן, חיבור שתי הפונקציות המונוטוניות הנ"ל גורם לכך שאחוז הלקוחות שלא קיבלו שירות תוך 3 דקות כפונקציה של ממוצע הסבלנות ייראה לפי הגרף מטה. מכאן נובע שאחוזי הלקוחות שכן קיבלו שירות תוך 3 דקות כפונקציה של ממוצע הסבלנות נותן את הצורה שרואים בגרף 5.

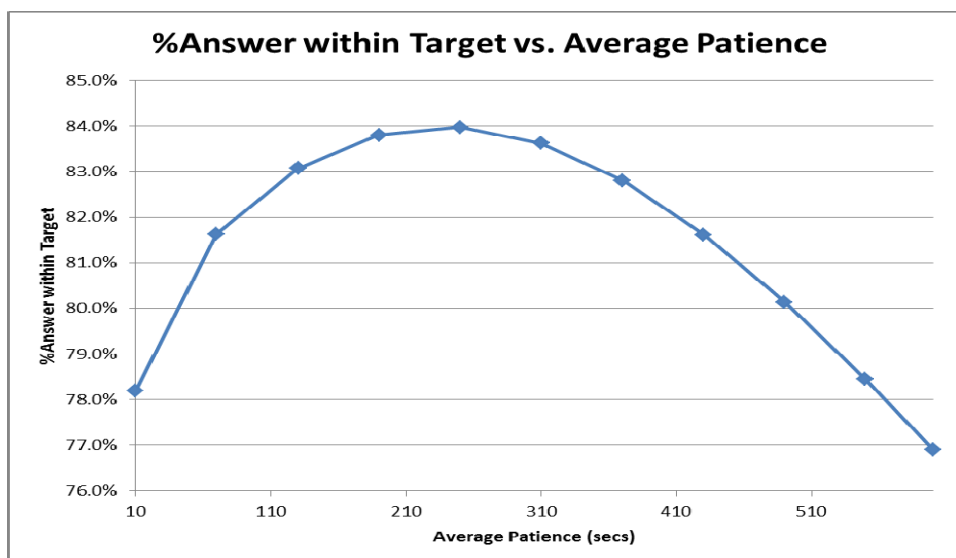


3.8 מסתבר כי ביום שאחרי שליחת החשבונות ללקוחות, קצב ההגעה גדל פי שניים. האם אתם צופים כי תידרש כמות כפולה של שרתים / פחות מכמות כפולה של שרתים / יותר מכמות כפולה של שרתים, על מנת לשמור על אותה רמת שירות (כלומר להבטיח שמעל ל-90% מהשיחות יענו תוך 3 דקות ולא יותר מ-5% מהלקוחות יינטשו).

תשובה:

אנו צופים כי כאשר קצב ההגעות יגדל פי 2, לא יהיה צורך להכפיל את מספר השרתים, יהיה אפשר להגדילו בערך קטן מזה ולשמור על אותה רמת שירות. זוהי בדיוק התופעה של "יתרון לגודל". ככל שקצב הכניסה גדל, הסטוכסטיות במערכת קטנה ולכן נדרשים פחות שרתים, באופן יחסי, כדי "להגן" מפני הסטוכסטיות במערכת.

גרף 5



3.9 על מנת לעמוד בתנאי החוק החדש הוחלט בארגון כי לקוח אשר המתין 3 דקות יועבר למערכת אחרת שבה יוכל להשאיר את פרטיו בכדי שיחזרו אליו מאוחר יותר. הארגון החליט שלא לאפשר ללקוחותיו לחזור ולהמתין בתור אח"כ, כלומר, למעשה, כל לקוח שהמתין 3 דקות יוצא מהמערכת. בעמוד הבא, במקום המיועד לכך תחת הכותרת 'גרף 6', עליכם לשרטט את פונקציית הסיכון (hazard rate) של סבלנות הלקוחות **טרם** כניסת החוק החדש. איזה מודל מתמטי מתאים לתיאור המערכת לאחר כניסת החוק החדש? מהם הפרמטרים של המודל? הניחו, כמו בסעיף 3.5, כי ההגעות למערכת הינן ע"פ תהליך פואסון עם קצב של 250 שיחות בשעה, הסבלנות הינה אקספוננציאלית עם ממוצע של 4 דקות, ומשך השירות אקספוננציאלי גם הוא עם ממוצע של 4 דקות.

תשובה:

טרם כניסת החוק החדש, סבלנות הלקוחות הינה $\exp\left(\theta = \frac{1}{4}\right)$. לפיכך פונקציית הסיכון

$$h_r(x) = \frac{f_r(x)}{1 - F_r(x)} = \frac{\theta e^{-\theta x}}{1 - (1 - e^{-\theta x})} = \theta = 0.25$$

המודל המתאים לתיאור המערכת לאחר כניסת החוק החדש הוא:

$M / M / n + G$, הנחות המודל והפרמטרים:

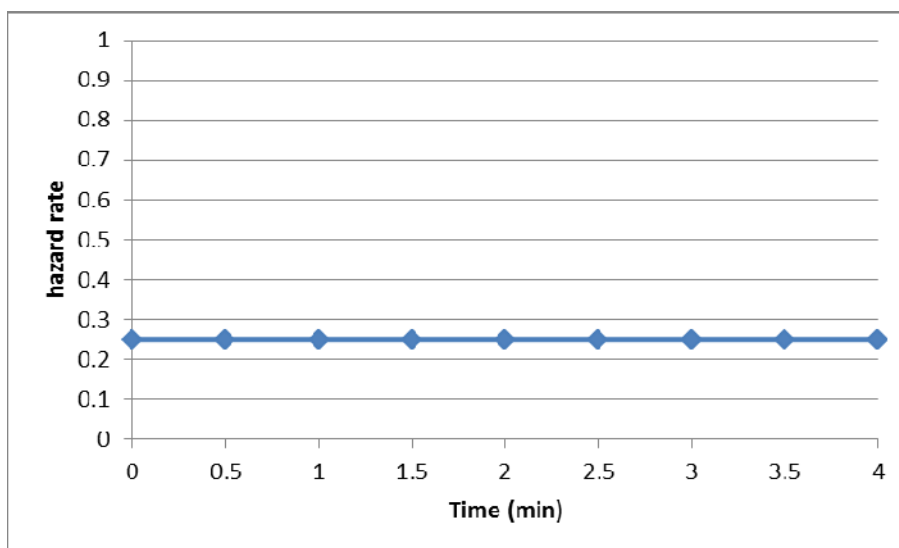
- הגעות לפי תהליך פואסון עם קצב של $\lambda = 250$ שיחות בשעה.

- משך שירות $\exp\left(\mu = \frac{1}{4}\right)$.

- N שרתים.

- סבלנות מתפלגת כמינימום בין משתנה מקרי $\exp\left(\theta = \frac{1}{4}\right)$ ומ"מ דטרמיניסטי D=3

גרף 6



3.10 הניחו כי בטרם כניסת החוק החדש נדרשו, N שרתים על מנת לעמוד ביעד של "90% מהלקוחות נענים תוך 3 דקות". האם אתם צופים כי לאחר כניסת החוק החדש והשימוש במערכת החדשה, יידרשו יותר מ- N שרתים, פחות מ- N שרתים או בדיוק N שרתים על מנת לעמוד ביעד זה? נמקו את תשובתכם.

תשובה:

כעת יידרשו פחות מ- N שרתים מכיוון שבמצב החדש לקוחות אינם שוהים במערכת יותר מ-3 דקות, בניגוד למערכת הקודמת שבה לקוחות המשיכו להמתין גם אחרי 3 דקות. לפיכך במערכת החדשה התורים קצרים יותר ולכן נדרשים פחות שרתים על מנת לעמוד באותה רמת שירות.

3.11 נניח כעת כי היינו יכולים לחזות באופן מדויק את משך ההמתנה של לקוחות מיד עם הגעתם למערכת (למשל על סמך אורך התור). במידה וזמן ההמתנה החזוי עולה על 3 דקות, הלקוח יישמע הודעה שתודיע לו על כך ותאפשר לו להשאיר את פרטיו ולעזוב את המערכת. נניח שוב, כמו בסעיף 3.9, כי כל הלקוחות ששומעים הודעה זו עוזבים את המערכת ואינם ממשיכים להמתין בתור. מערכת זו תקרא S_1 . נשווה כעת את מערכת S_1 אל מול מערכת המתוארת בסעיף 3.9, שבה ההודעה ניתנת לאחר 3 דקות המתנה: מערכת זו תקרא S_2 .

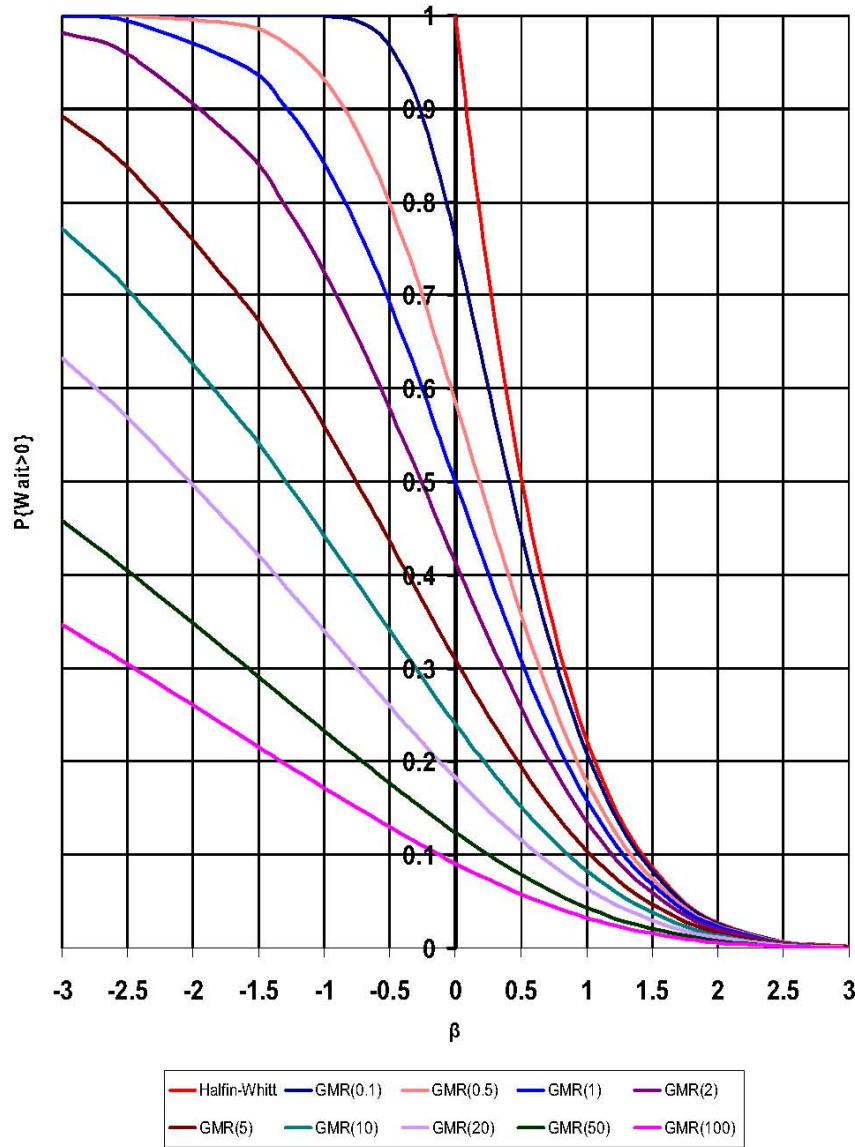
מה יהיה היחס בין ASA במערכת S_1 ומערכת S_2 ? מה יהיה היחס בין אחוז הנוטשים במערכת S_1 ומערכת S_2 ? מה יהיה היחס בין "אחוז הלקוחות הנענים תוך 3 דקות" במערכת S_1 ומערכת S_2 ? איזו מערכת תעדיפו? נמקו את תשובתכם.

תשובה:

ASA, אחוז הנוטשים ואחוז הנענים תוך 3 דקות יהיו זהים בשתי המערכות. בשני המקרים אותם לקוחות שקיבלו את ההודעה עזבו את המערכת ולא קיבלו שירות ולכן ההמתנה שלהם לא תשפיע על ההמתנה של שאר הלקוחות. ההבדל היחידי הוא שבמערכת S_1 הם עוזבים מיד ובמערכת S_2 הם עוזבים לאחר המתנה של 3 דקות כך שאורכי התורים ישתנו אך לא יהיה הבדל בשאר המדדים. כמובן שמערכת S_1 עדיפה, מפני שבמערכת S_2 הלקוחות גם נאלצים להמתין 3 דקות וגם אינם מקבלים שירות, בעוד שבמערכת S_1 לפחות נחסכת מהם המתנה זו.

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .



GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\frac{\theta}{\mu} = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

Note: **Erlang-C** = limit of **Erlang-A**, as patience $\uparrow$ indefinitely.

Efficiency-Driven M/M/n+G (ED)

Let γ be a QOS parameter, $0 < \gamma < 1$.

Assume $G(x) = \gamma$ has a unique solution $x^* = G^{-1}(\gamma)$, at which $g(x^*) > 0$.

Staffing level:

$$n \approx R \cdot (1 - \gamma), \quad \gamma > 0.$$

- $P\{W_q > 0\} \approx 1$.
- Abandonment-Probability converges to:

$$P\{\text{Ab}\} \approx \gamma \approx 1 - \frac{1}{\rho}.$$

- Offered-Wait converges to x^* :

$$E[V] \approx x^*, \quad V \xrightarrow{p} x^*.$$

- Waiting distribution (asymptotically):

$$W_q \xrightarrow{w} G^*, \quad E[W_q] \rightarrow E[\min(x^*, \tau)],$$

where G^* is the distribution of $\min(x^*, \tau)$, namely

$$G^*(x) = \begin{cases} G(x), & x \leq x^* ; \\ 1, & x > x^* . \end{cases}$$

Quality-Driven M/M/n+G (QD)

Density of patience time at the origin: $g_0 > 0$.

Staffing level:

$$n \approx R \cdot (1 + \delta), \quad \delta > 0.$$

- $P\{W_q > 0\}$ decreases exponentially in n .
- Probability to abandon of delayed customers:

$$P\{\text{Ab} | W_q > 0\} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \delta}{\delta} \cdot \frac{g_0}{\mu} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- Average wait of delayed customers:

$$E[W_q | W_q > 0] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \delta}{\delta} \cdot \frac{1}{\mu} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- Linear relation between $P\{\text{Ab}\}$ and $E[W_q]$:

$$\boxed{\frac{P\{\text{Ab}\}}{E[W_q]} \sim g_0}$$

- Asymptotic distribution of wait:

$$P\left\{\frac{W_q}{E(S)} > \frac{t}{n} \mid W_q > 0\right\} \sim e^{-(1-\rho)t}, \quad \rho = \frac{\lambda}{n\mu}.$$

The Erlang-A Queue in the QED-Regime

Theorem (with Garnett & Reiman, 2002)

The following **points of view** are equivalent:

- 0. **QED:** $P\{W_q > 0\} \approx \alpha$, for some $0 < \alpha < 1$;
- 1. **Manager:** $n \approx R + \beta\sqrt{R}$, for some $-\infty < \beta < \infty$;
- 2. **Servers:** Occupancy $\approx 1 - \frac{\beta + \gamma}{\sqrt{n}}$;
- 3. **Customers:** $P\{Ab\} \approx \frac{\gamma}{\sqrt{n}}$, for some $0 < \gamma < \infty$;

in which case

$$\alpha = \alpha\left(\beta, \frac{\mu}{\theta}\right) = \left[1 + \sqrt{\frac{\theta}{\mu}} \cdot \frac{h(\hat{\beta})}{h(-\beta)}\right]^{-1},$$

which we call the **Garnett Delay-Function(s)**;

here $\hat{\beta} \triangleq \beta\sqrt{\frac{\mu}{\theta}}$, and

$$\gamma = \alpha \cdot \sqrt{\frac{\theta}{\mu}} \cdot [h(\hat{\beta}) - \hat{\beta}].$$

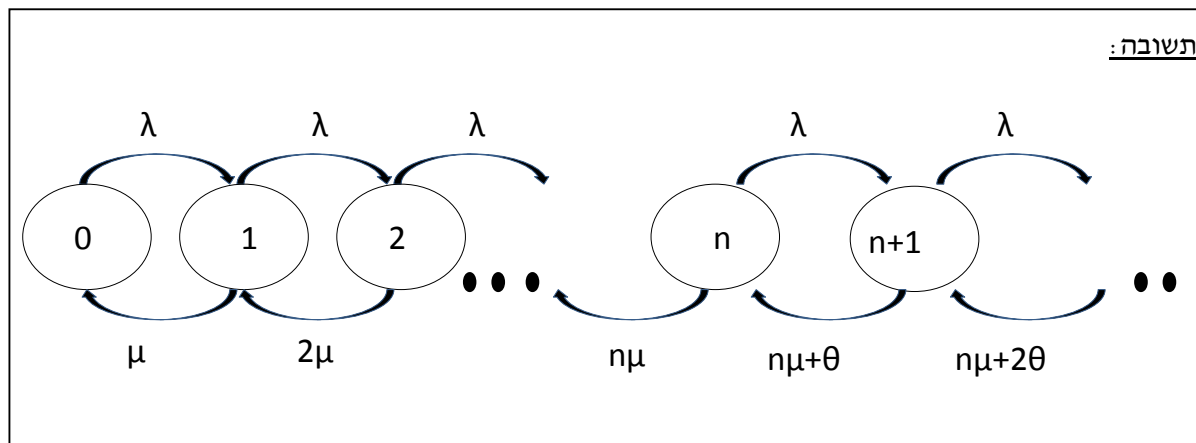
שאלה 4 – תאוריה (16 נקודות)

נניח מודל Erlang A $(M / M / n + M)$ עם פרמטרים λ, μ, N, θ , המתאר מערכת שירות.

נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t . אזי $L = \{L(t), t \geq 0\}$ הוא תהליך לידה

ומוות.

4.1 השלימו את דיאגרמת קצבי המעבר של התהליך.



4.2 איך מתנהג Erlang A כאשר $\mu = \theta$?

תשובה:

כאשר $\mu = \theta$, Erlang A מתנהג כמו $M / M / \infty$,

כלומר: $L(M / M / n + M) \stackrel{d}{=} L(M / M / \infty) = \exp(\mu)$, דהיינו מודל החלקיקים עם משך חיים $\exp(\mu)$.

4.3 תחת ההנחה ש: $\mu = \theta$, האם קיים מצב יציב? אם כן, מהי התפלגות המצב היציב?

תשובה:

ההתפלגות הסטציונרית של מודל $M / M / \infty$ היא $Poisson(R)$, כאשר $R = \frac{\lambda}{\mu}$ (העומס המוצע).

כאשר $\mu = \theta$, על סמך הסעיף הקודם, זוהי גם ההתפלגות הסטציונרית של $L(M / M / n + M)$.

4.4 הוכיחו את כלל השורש כאשר $\mu = \theta$. כלומר, הראו כי כאשר $n \approx R + \beta\sqrt{R}$, אזי $P(W_q > 0) \approx 1 - \Phi(\beta)$. (Φ היא פונקציית ההתפלגות המצטברת של התפלגות נורמאלית סטנדרטית).

רמז: עבור A לא קטן $Poisson(A) \sim N(A, A)$, כאשר N מסמן התפלגות נורמאלית.

תשובה:

$$P\{W_q(M/M/n+M) > 0\} \stackrel{PASTA}{=} P\{L(M/M/n+M) \geq n\} \stackrel{\mu=\theta}{=} P\{L(M/M/\infty) \geq n\}$$

כאמור: $L(M/M/\infty) \stackrel{d}{=} Poisson(R) \approx R + Z\sqrt{R}$, כאשר $Z \sim N(0,1)$.

ולכן: $P\{L(\infty) \geq n\} = P\left\{\frac{L(\infty)-R}{\sqrt{R}} \geq \frac{n-R}{\sqrt{R}}\right\} \approx P\left\{Z \geq \frac{n-R}{\sqrt{R}}\right\} \approx 1 - \Phi(\beta)$

ומכאן: $P(W_q > 0) \approx 1 - \Phi(\beta)$ כנדרש.

חלק זה של העמוד נשאר ריק

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Gen. Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$N \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multi-nomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(m, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; m \geq 1$	$k = m, m+1, \dots$	$\left[\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t} \right]^m$	$\frac{m}{p}$	$\frac{mq}{p^2}$	Number of trials till m -th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$\exp\{-\lambda(1 - e^t)\}$	λ	λ	
Hyper-geometric	$X \sim HG(N, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{n-k}{N-M}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N + M$	$\max(0, n - M) \leq k$ $k \leq \min(n, N)$	$\sum_k e^{tk} p(k)$	$\frac{n \cdot N}{N+M}$	$n \cdot \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N}{N+M-1}$	N – special elements M – ordinary ones n – sample size k – special in sample
		Density Function						
Beta	$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	Complicated	$\frac{\alpha^\alpha}{\alpha+1}$	$\frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha+\beta)^2 (\alpha+\beta+1)}$	$\alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ $= (x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp\left\{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\}$	μ	σ^2	