



מרצה : ד"ר גלית יום-טוב

מתרגל : אריק סנדרוביץ'

תאריך הבחינה : 15.9.2014

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד ב' – סמסטר אביב 2014

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 22 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

ניקוד:	שאלה 1	_____ מתוך 20 נקודות	בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים
	שאלה 2	_____ מתוך 20 נקודות	תרגילי בית
	שאלה 3	_____ מתוך 40 נקודות	יישום
	שאלה 4	_____ מתוך 20 נקודות	תיאוריה

סה"כ _____ מתוך 100 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 - בחינות קודמות (20 נקודות).

חלק 1 (12 נקודות)

נתונה מערכת $M/M/N$ כאשר הפרמטרים הם:

- קצב ההגעה $\lambda = 240$ לקוחות לשעה,
- קצב השירות $\mu = 3.6$ לקוחות לשעה,
- N = מספר השרתים, אותם נשאר כפרמטר כללי.

1.1 (2 נקודות) נבנה מודל נוזלים המתאים למערכת זו, באופן הבא:

נסמן ב- $X(t)$ = סה"כ מספר לקוחות במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

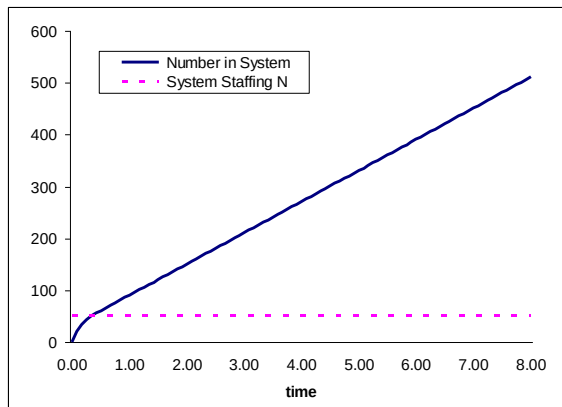
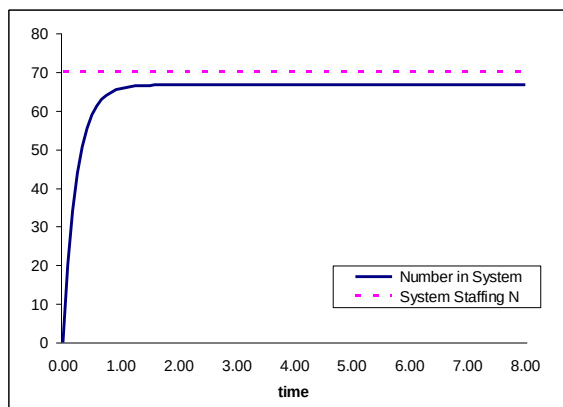
השלימו את המשוואה הדיפרנציאלית עבור $0 \leq t$, $X(t)$ (2 נקודות)

תשובה:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda - \mu(X(t) \wedge N)$$

1.2 (2 נקודות) בגרפים שלהלן מצוירים $X(t)$ עבור $N=50$ ו- $N=70$. רואים כי עבור $N=50$

המערכת מתפוצצת ואילו $N=70$ מבטיח סטביליות.



5

בעזרת שימוש במודל המרקובי $M/M/N$, תסבירו את הגרפים הנ"ל וחשבו את ה- N המינימלי שיבטיח סטביליות של המערכת.

הסבר: $\rho = \frac{\lambda}{N\mu} < 1$ מבטיח סטביליות.

$$67 = \left\lceil \frac{\lambda}{\mu} \right\rceil = N$$

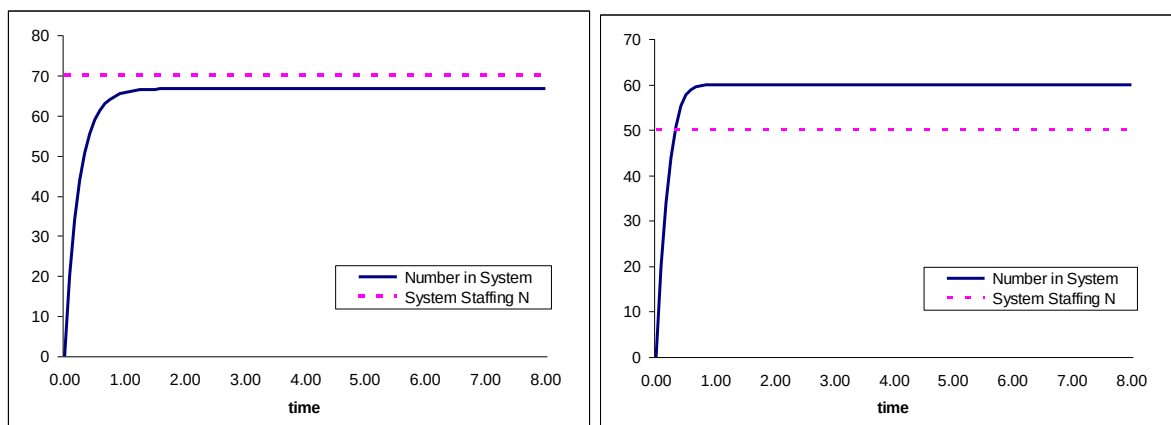
1.3 (2 נקודות) נניח עתה כי לקוחות יכולים לנטוש מהתור, כאשר כל לקוח נוטש באופן בלתי תלוי באחרים, וזאת אחרי זמן מעריכי עם ממוצע $\frac{1}{\theta} = 10$ דקות. (המודל המרקובי המתאים הוא כמובן $Erlang-A M/M/N+M$).

כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור מודל נוזלים $X(t)$, $0 \leq t$, המתאים למערכת זו. (2 נקודות)

תשובה:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda - \mu(X(t) \wedge N) - \theta(X(t) - N)^+$$

1.4 (2 נקודות) בגרפים שלהלן מצוירים עבור $N=50$ ו- $N=70$.



השוו את הגרפים עם אלה מסעיף 1.2. הסבירו, בעזרת המודל המרקובי המתאים, את ההבדלים, וכיצד משפיעות נטישות על המערכת.

הסבר: **ההבדל הראשון-** המערכת לא מתפוצצת עבור $N=50$ וזו ההשפעה העיקרית של נטישות. כל מערכת $Erlang-A M/M/N+M$ יציבה.

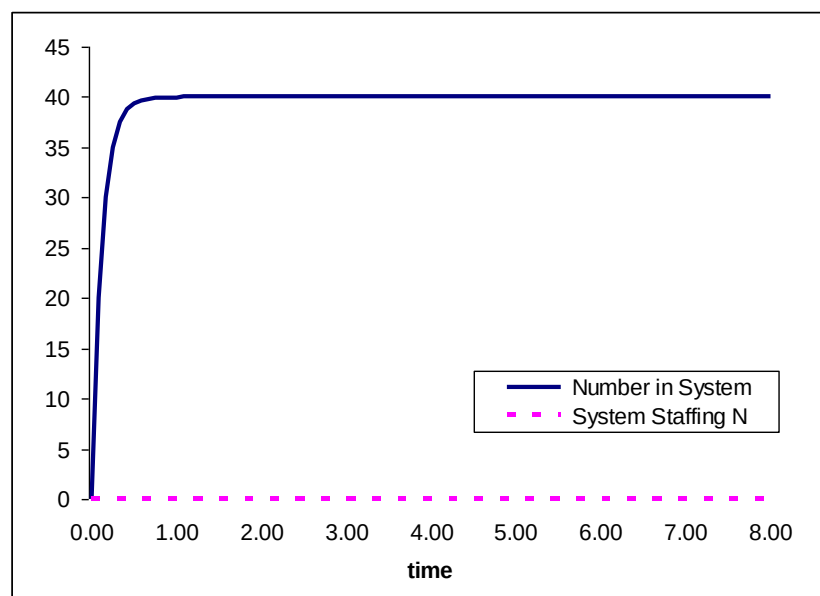
ההבדל השני הוא שעבור $N=50$ במערכת נמצאים פחות לקוחות מאשר עבור $N=70$. וזו כיוון שקצב הנטישה = 6 בשעה גדול יותר מקצב השירות = 3.6 לשעה.

1.5 (2 נקודות) אנו מעוניינים, על ידי שליטה ב- N , להקטין את עלות התפעול של המערכת, העלות מורכבת משכר לעובדים: c ש לשעה, וקנס על הנטישות: a ש על כל נטישה. לפי מודל נוזלים, כתבו את הנוסחה לעלות התפעול על פני תקופה של 8 שעות.

תשובה:

$$Cost = 8cN + \int_0^8 a \cdot \theta(X(t) - N)^+ dt$$

1.6 (2 נקודות) עבור $c = 36$ ו- $a = 4$ התקבל על-ידי ה-*Excel Solver* כי $N = 0$. ומודל הנוזלים X נראה כך:



מה משמעות העובדה ש- $N = 0$ אופטימלי?

תשובה: כי עדיף לא לשרת לקוחות כלל ולשלם קנס על נטישות מאשר לשלם שכר לעובדים (שרתים).

פונקציית ה-hazard rate $h_X(t)$ של משתנה מקרי (מ"מ) אי-שלילי X , עם צפיפות $f_X(t)$, נתונה ע"י

$$h_X(t) = \frac{f_X(t)}{P(X > t)}, \quad t \geq 0.$$

2.1 (2 נקודות) נתון מ"מ X מעריכי עם פרמטר λ : $X \sim \exp(\lambda)$. צפיפותו נתונה ע"י

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

הראו שפונקציית ה-hazard rate של X קבועה, ושווה ל- λ . ז"א $h_X(t) \equiv \lambda$. תנו הסבר אינטואיטיבי קצר לעובדה זאת.

$$h_X(t) = \frac{f_X(t)}{P(X > t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda. \quad \text{הוכחה:}$$

הסבר: פונקציית סיכון קבועה נובעת מתכונת "חוסר זיכרון" של מ"מ מעריכי. העובדה "שבילינו" זמן מסוים במערכת לא תשנה את התפלגות הזמן שנותר ולכן לא תשנה את ההסתברות שנסיים שרות ברגע הבא, על כן, הסיכון לסיים שרות ברגע הבא קבוע.

$$2.2 \text{ יהי } Y \text{ מ"מ עם ההתפלגות הבאה: } Y \sim \begin{cases} \exp(1), & \text{w.p. } 1/2, \\ \exp(2), & \text{w.p. } 1/2. \end{cases}$$

ז"א, בסיכוי $1/2$, Y מתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר 1 ובסיכוי $1/2$, Y מתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר 2.

שתי השאלות הבאות עוסקות במ"מ Y הנ"ל.

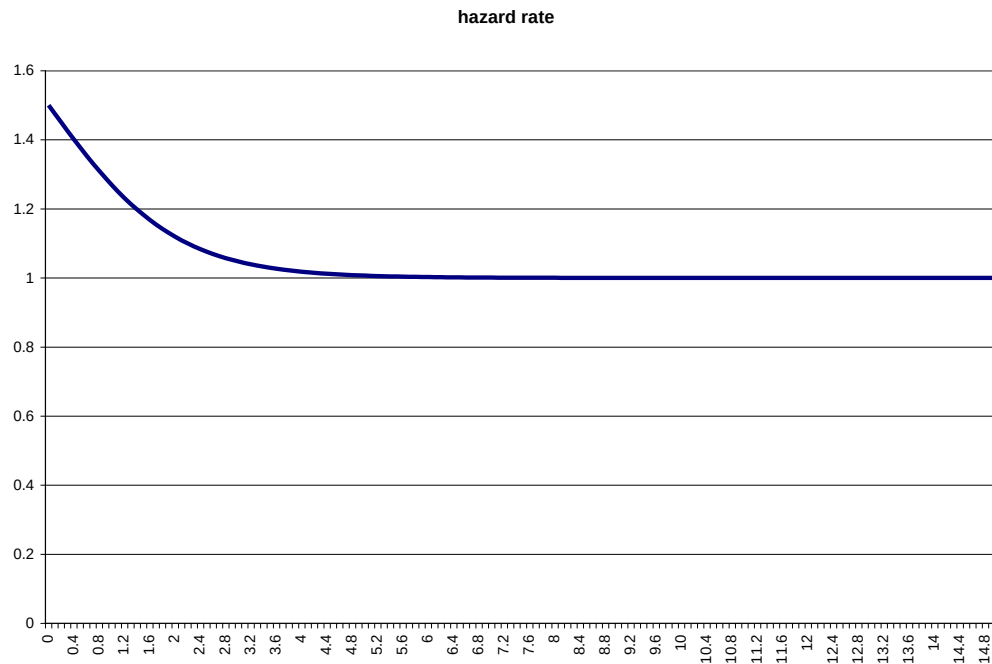
2.2.1 (2 נקודות) מה היא פונקציית ה-hazard rate $h_Y(t)$ של Y בנקודה $t = 0$?

תשובה:
(2 נקודות)

$$h_Y(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

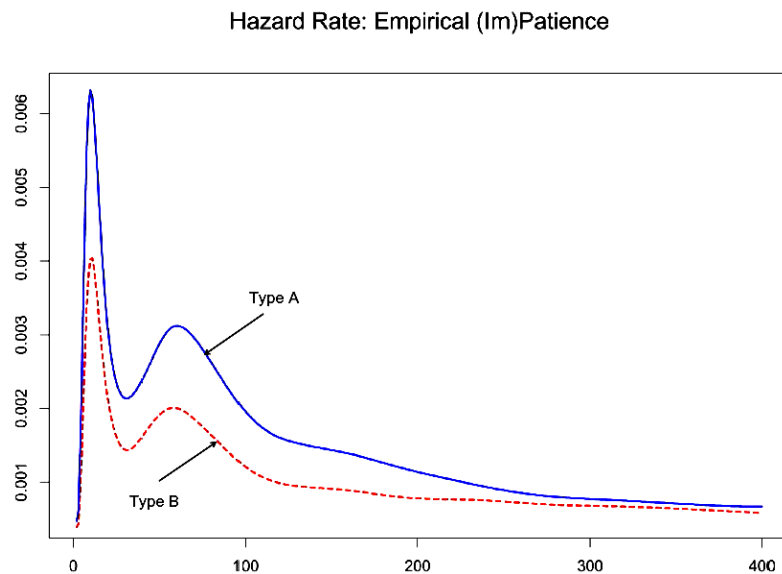
2.2.2 (2 נקודות) ציירו את פונקציית ה-hazard rate של Y : $h_Y(t), t \geq 0$. אינכם מתבקשים לחשב את הפונקציה במדויק. מספיק לצייר רק את התנהגותה הכללית (עולה, יורדת או לא זה ולא זה) ואת ההתנהגות בקצוות ($t=0$ ו- $t=\infty$).

תשובה:



Intuition to Figure The hazard rate near zero is close to $3/2$ - the average of the two rates of the individual phases. (This is clear by our representation.) If the service has not been completed for a long time, the probability that the phase with the longest expectation (rate 1) had been “chosen” converges to one. Hence, the hazard rate converges to 1.

2.2.3 (2 נקודות) בגרף הבא נתונות 2 פונקציות hazard rate אמפיריות של סבלנות לקוחות משני סוגים: סוג A וסוג B. השוו את סבלנות 2 הסוגים בעזרת הגרפים, תוך הסבר קצר.



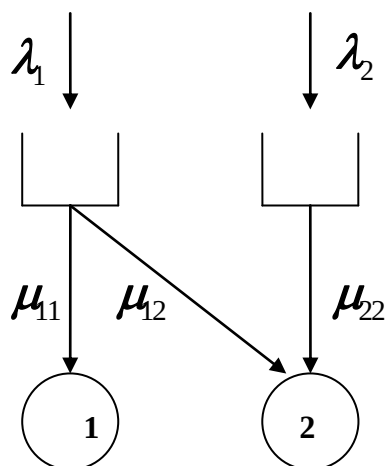
מי יותר "סבלן" ?

תשובה: סוג B

הסבר קצר: עבור סוג B, הסיכוי לנטוש, בהינתן הישרדות, ובכל רגע נתון, הוא קטן יותר, ולכן סוג B הוא יותר "סבלן". בעצם, סבלנות B גדולה סטוכסטית מסבלנות A.

שאלה 2 – תרגילי בית (20 נקודות)

נתון מודל של מערכת שירות בארכיטקטורת N, כמתואר בגרף הבא:



קצבי ההגעה לשני סוגי הלקוחות הם $\lambda_1 = 1.135$ ו- $\lambda_2 = 0.38$ לדקה. בכל תחנה יושב שרת יחיד. שרת 1 יכול לשרת רק לקוחות מסוג 1 עם קצב שירות $\mu_{11} = 1$. שרת 2 משרת לקוחות מסוג 2 בקצב $\mu_{22} = 1$, והוא יכול גם לעזור לשרת 1 ולשרת לקוחות מסוג 1 בקצב $\mu_{12} = 0.5$. קצבי השירות ניתנים ביחידות לדקה.

2.1 מהו אחוז הלקוחות המינימלי מסוג 1 שצריך שרת 1 לשרת על מנת להבטיח יציבות של המערכת? (5 נקודות)

תשובה:

$$\alpha \cdot \frac{\lambda_1}{\mu_{12}} + \frac{\lambda_2}{\mu_{22}} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.273$$

כלומר, שרת 1 צריך לשרת לפחות $1 - \alpha = 72.68\%$ מלקוחות מסוג 1.

2.2 הציעו מדיניות לתפעול המוקד, אשר תבטיח יציבות של המערכת. (5 נקודות)

תשובה:

עבור כל לקוח מסוג 1 המגיע למערכת נגזר $U \sim Un\{0,1\}$ אם $U < 0.7268$, הלקוח ישורר ע"י שרת 1, אחרת ישורר ע"י שרת 2.

2.3 הניחו כי לקוחות מסוג 1 הם לקוחות רגילים (Regular) ולקוחות מסוג 2 הם לקוחות VIP. בהינתן מידע זה, הציעו מדיניות סבירה לניהול המערכת הנ"ל? תארו בפירוט את המדיניות. (5 נקודות)

תשובה:

- אם לקוחות מסוג 2 הם לקוחות VIP, אזי נשלח כמה שיותר לקוחות מסוג 1 לשרת 1 וזאת באופן הבא:
- עם הגעת לקוח מסוג 1, נפנה אותו לשרת 1 אם הוא פנוי, אחרת יישלח לשרת 2. אם שני השרתים עסוקים, הלקוח יצטרף לתור.
 - עם סיום שירות אצל שרת 2, נבדוק האם ישנם לקוחות VIP בתור. אם כן, הראשון בתור ייכנס לשירות, ואם תור לקוחות ה-VIP ריק יכנס לשירות לקוח רגיל, וזאת במידה והתור של לקוחות מסוג 1 אינו ריק.

2.4 הניחו כעת כי המערכת פועלת לפי מדיניות שהיא *preemptive*, ז"א ניתן בכל רגע להוציא לקוח משירות ולהחזירו להמתנה בתור, אבל אסור "לזרוק" לקוחות מהמערכת. הניחו עוד כי בתחנה i עובדים במקביל N_i שרתים ($i=1,2$), ובתחנה 2 ניתנת עדיפות ללקוחות מסוג 2, שהם VIP. כמו כן, מדיניות ניתוב לקוחות מסוג 1 (Regular) לשירות היא כזו שאם בשתי התחנות ישנם שרתים פנויים לשירות לקוח מסוג 1, הוא נשלח לשירות בתחנה 2.

נגדיר:

$X_1(t)$ = סה"כ מספר לקוחות מסוג 1 במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

$X_2(t)$ = סה"כ מספר לקוחות מסוג 2 במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

כתבו משוואות דיפרנציאליות עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$. (5 נקודות)

תשובה:

$$\frac{dX_1}{dt} = \lambda_1 - \mu_{12} \left(X_1 \wedge (N_2 - X_2)^+ \right) - \mu_{11} \left[\left(X_1 - (N_2 - X_2)^+ \right)^+ \wedge N_1 \right]$$

$$\frac{dX_2}{dt} = \lambda_2 - \mu_{22} (X_2 \wedge N_2)$$

שאלה 3 – יישום (45 נקודות)

ארגון Medicare (ביטוח בריאות ממשלתי) בארה"ב מפרסמים באתר האינטרנט שלהם מדדי איכות ורמת שירות של בתי חולים שונים ברחבי המדינה, כך שלקוחות החברה יוכלו להשוות ביניהם ולבחור בהתאם להעדפותיהם. בין השאר מציג האתר נתוני רמת שירות בחדרי מיון. להלן טבלה אשר מסכמת את מדדי השירות בחדרי מיון של שני בתי חולים במדינת ניו-יורק.

מדרג לרמת שירות	חדר מיון 1	חדר מיון 2
ממוצע זמן שהיה במיון עד אשפוז	439	370
ממוצע זמן שהיה במיון עד שחרור	144	206
ממוצע זמן ההמתנה עד לבדיקת רופא ראשונה	17	12
אחוז המטופלים שעזבו לפני בדיקת רופא	5%	4%

הזמן מוצג בדקות*

3.1 השווה בין שני בתי החולים מהיבט מדדי השירות השונים. איזה בית חולים עדיף לדעתך? (2 נקודות).

תשובה:

בית החולים השני עדיף. מחכים בו פחות זמן לבדיקת רופא ראשונה (חשוב לאירוע מסכן חיים). עבור פציינטים קשים יותר, זמן עד לאשפוז קצר יותר. אמנם המדד השלישי עדיף בבית החולים הראשון, אך עלות ההמתנה מהסוג הראשון (המתנה עד אשפוז) חשובה בהרבה מההמתנה עד שחרור.

3.2 באיזה חדר מיון החולים יותר סבלניים? מהו ממוצע הסבלנות של חולים בכל אחד מחדרי המיון? תן הסבר כיצד ניתן להשפיע על סבלנות החולים בחדר המיון? (3 נקודות).

תשובה :

הלקוחות סבלניים יותר בבית החולים הראשון. נרשום את הנוסחה לסבלנות :

$$\frac{1}{\theta} = \frac{EW_q}{P_{ab}} . \text{ הסבלנות בשני בתי החולים היא } 340 \text{ ו- } 300 \text{ דקות בהתאמה.}$$

בכדי להשפיע על סבלנות החולים בחדר המיון ניתן לספק להם מידע על משכי ההמתנה ובכך ליישר קו בין הציפיה להמתין לבין הדרישה להמתין.

3.3 עבור חדר המיון הראשון, הצע מודל תורים פשוט שיתאים לתהליך בדיקת הרופא הראשונה. פרט ונמק את הנחותיך. (2 נקודות)

תשובה :

מודל תורים מתאים הינו Erlang-A, בהנחה שהתור לבדיקה הראשונה מופרד מהטיפול הכללי (אם התורים אינם מופרדים, זה לא יהיה מדויק כיוון שבתור ישנם גם חולים שחוזרים אל הרופא לבדיקות חוזרות, ולכן מודל יותר מדויק במקרה זה יהיה Erlang-R עם נטיות).

כעת נרצה לאמוד את הפרמטרים של המודל שהצעתם. נניח כי בחדר המיון ישנם בממוצע 10 רופאים זמינים למתן בדיקה ראשונה (וזהו כל תפקידם). העומס המוצע (Offered Load) על חדר המיון הינו 100 והעומס המוצע על בדיקת הרופא הראשונה הינו 10. (הנח כי 67% מהחולים מאושפזים)

3.4. מהו קצב המופע השעתי הממוצע לחדר המיון? כתוב את הפרמטרים של מודל התורים עבור בית החולים הראשון, תחת ההנחות לעיל. (4 נקודות).

תשובה:

על מנת לאפיין את מודל התורים Erlang-A דרוש וקטור הפרמטרים הבא: $(\lambda, \mu, \theta, N)$ ולכן למעשה חסרים קצבי המופע והשירות.

ראשית נחשב את ממוצע זמן השירות הכולל

$$ALOS = 0.67 * 439 + 0.34 * 144 = 341.65 \text{ min} = 5.7 \text{ hours}$$

קצב השירות של חדר המיון הוא $\mu = 1/5.7 \text{ hours} = 0.176 \text{ patient/hour}$

כדי למצוא את קצב ההגעה לחדר המיון נתייחס לחדר המיון כקופסא שחורה ונשתמש בנתון של העומס המוצע והקשר בינו לחוק ליטל -

$$R_{Total} = \lambda \times LOS_1$$

$$\lambda = \frac{R_{Total}}{LOS_1} = \frac{100}{5.7 \text{ hours}} = 17.56 \text{ patients/hour}$$

וקיבלנו בקירוב את כל הפרמטרים הדרושים למודל.

הערה: אם מסתכלים על טיפול רופא ראשוני כמערכת, ניתן למדל חלק זה במערכת גם על ידי מודל Erlang-A. נסמן R_1 כעומס המוצע על הרופאים שעורכים את הבדיקה הראשונית.

$$R_1 = \lambda / \mu_1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{17.56}{10} = 1.756 \text{ patients/hour}$$

3.5. מהו מספר החולים הממוצע בחדר המיון? (2 נקודות).

תשובה: נשתמש בחוק ליטל.

$$L = \lambda \times LOS_1 = R_{Total} = 100$$

3.6. מהי נצילות הרופאים בבדיקת רופא ראשונה? בזכות איזו תופעה הנצילות קטנה מ-1? (2 נקודות).

תשובה:

$$\rho = \lambda_{eff} / (N \times \mu) = \frac{\lambda(1 - P_{ab})}{N\mu} = 0.95$$

הנצילות קטנה מ-1 בגלל הנטישות.

3.7. באיזה תחום תפעולי פועלת בדיקת הרופא הראשונה בחדר המיון בבית החולים הראשון? הסבר. תן

אמד לפרמטר רמת השירות של בית החולים. (3 נקודות).

תשובה:

מדובר בתחום QED, מאחר וישנו סיכוי נטישה קטן, זמני המתנה קטנים משמעותית מזמני שרות, ונצילות שרתים גבוהה.

פרמטר רמת השירות: $\beta = \frac{(N - R_1)}{\sqrt{R_1}} = 0$

3.8 עפ"י הגרף בעמוד 15 מהי ההסתברות להמתנה? (3 נקודות)

תשובה:

יש לחשב את $\frac{\theta}{\mu} = 0.1$, לכן נסתכל על הקו של GMR0.1 בגרף. על פיו ההסתברות להמתנה היא בקרוב 0.75.

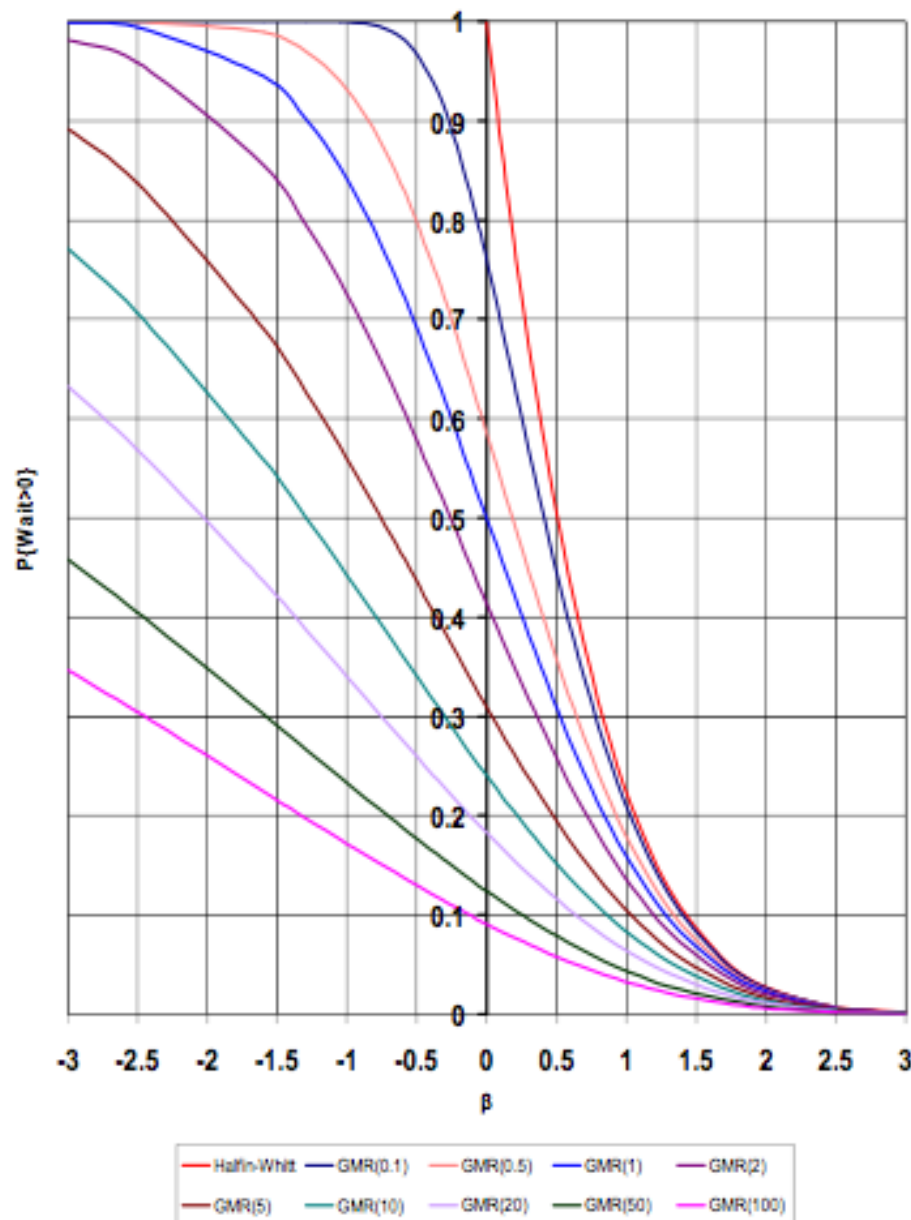
3.9 נניח שמנהל בית החולים רוצה להוריד את הסתברות להמתנה ל-0.5, מהו מספר הרופאים שידרש? (3 נקודות)

תשובה:

יש להציב בכלל השורש $\beta = 0.4$, ולכן $R_1 + \beta\sqrt{R_1} = 10 + 0.4 * \sqrt{10} = 11.26$. כלומר, צריך 12 רופאים לבידה ראשונה.

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .



GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\theta/\mu = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

3.10 בתי החולים החליטו על פרסום זמני ההמתנה לבדיקה ראשונה באופן מקוון (מתעדכן בזמן אמת). למי תועיל החלטה זו? נמק. (3 נקודות)

תשובה:

ההחלטה תועיל לשלושת הצדדים המעורבים בתהליך השירות הרפואי:

1. הפציינט – עם קבלת המידע תתבצע התאמת ציפיות למשך ההמתנה הנצפה (עליה בשביעות רצון). כמו כן, הפציינט יפנה לבית החולים בו ההמתנה כרגע היא הנמוכה ביותר ולכן יש גם שיפור באספקט הקליני.
2. הרופאים – ההחלטה על פניה לבית החולים עם זמני ההמתנה הקצרים יקטינו את העומס על כלל בתי החולים. למעשה, בתי החולים יהנו מפתרון דמוי Pooling.

אל בית החולים הראשון מגיעים שני סוגי מטופלים : כאלה שיתאשפזו בסוף תהליך המיון (החולים היותר קשים) ואלה שישוחררו (החולים הקלים יותר). נניח כי מדיניות הטיפול בחולים היא preemptive, כלומר חולה קשה אשר מקומו ראשון בתור ה"קשים" "יוציא" חולה קל מטיפול ויקבל טיפול מיידי. הפרמטרים של המודל הם כדלהלן :

- קצבי המופע של החולים הינם λ_1 ו- λ_2 עבור החולים הקלים והקשים, בהתאמה.
- קצבי השירות של החולים הינם μ_1 ו- μ_2 עבור החולים הקלים והקשים, בהתאמה.
- לצורך המודל נניח כי אין נטישות עבור שני הסוגים.
- נניח כי מספר השרתים הינו N .

3.11 הצע מודל לתיאור תלוי זמן של מספר האנשים במערכת. ניתן להניח כי בחדר המיון ישנה כמות מטופלים התחלתית x , כולם מטופלים מהסוג הקל. (3 נקודות)

תשובה :

נציע מודל נוזלים אשר יתאר את ההתנהגות תלוית הזמן. נסמן ב- X_1 את החולים הקלים וב- X_2 את החולים הקשים.

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = \lambda_1 - \mu_1[X_1(t) \wedge (N - X_2(t))^+]$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = \lambda_2 - \mu_2(X_2(t) \wedge N)$$

$$X_1(0) = x$$

$$X_2(0) = 0$$

מנהל המיון בבית החולים הראשון שוקל מדיניות טיפול חדשה עבור אוכלוסיות החולים במקום מדיניות ה-preemptive. הוא מעוניין כי המדיניות תביא בחשבון את משך ההמתנה וגם את "עלות" ההמתנה של שתי סוגי האוכלוסיות (לעיתים עלות ההמתנה אינה בהכרח שווה בין סוגי הלקוחות). הוא מעוניין לשקלל זאת כך שהמדיניות תמזער את עלות ההמתנה הכוללת. לצורך התרגיל, נניח כי קצב השירות של מטופלים קלים **גבוה פי 2** מאשר זה של חולים קשים (החולה הקשה עובר תהליך ארוך ומסובך יותר).

3.12 תחילה נניח כי "עלות ההמתנה הקלינית" של טיפול בחולה ה"קל" זהה לזה של ה"קשה" (ניתן להעריך עלות כזו, למשל, בסכנה הנשקפת לחיי המטופל). רופא אשר מתפנה לטיפול בחולים מוצא כי ישנו מטופל יחיד בתור ה"קל" ובתור ה"קשה". מי יקבל עדיפות בטיפול? נמק. (2 נקודות).

תשובה :

הרופא יכניס את החולים על פי SPT, כלומר החולה ה"קל" יכנס לטיפול.

3.13 כעת נניח כי רופאים העריכו את "עלות ההמתנה הקלינית" של טיפול בחולה ה"קל" והיא **פי 2 קטנה יותר** מזו של החולה הקשה. מי מהחולים יועדף כעת? (4 נקודות)

תשובה : על פי כלל ה- $c\mu$, הרופא יהיה אדיש בין שני סוגי המטופלים :

$$\mu_1 = 2\mu_2$$

$$c_1 = 0.5c_2$$

לכן הערך של החולה הקל מוערך ב- $c_1\mu_1$ ושל החולה הקשה כ- $c_1\mu_1 = 2c_1 \times 0.5\mu_1 = c_2\mu_2$ - ערכם שווה מבחינת השקלול בין זמן העיבוד לזמן ההמתנה.

כעת מחליטים שני בתי החולים על שיתוף פעולה בניתוב המטופלים. נניח כי כמות המיטות זהה בשני בתי החולים (נסמנה ב- B לכל בית חולים). כמו כן נניח כי קצבי השירות האינדיווידואליים בשני בתי החולים (ולשני סוגי האוכלוסיות) זהים ונסמנם ב- μ . קצבי המופע לבתי החולים שונים והינם λ_1 ו- λ_2 , בהתאמה. נניח כי מטופלים מופנים לבית החולים בו התור לקבלה למיון (לבדיקת רופא ראשונית) קצר יותר. בכיתה הראנו כי במצב זה אורך התור לשני חדרי המיון יהיה זהה.

3.14 איזה מודל תורים פשוט יתאים בקירוב למערכת החדשה? מהם הפרמטרים המתאימים? הסבר. (4 נקודות)

תשובה:

כיוון שלקוחות נשלחים למערכת עם התור הקצר יותר, נוצר סינכרון בין שני בתי החולים שדומה מאוד ל-
pooling, כיוון שההסתברות שיהיה תור בבית חולים אחד ובטלה בשני מאוד נמוכה. במצב זה ניתן למדל את המערכת הכוללת ע"י Erlang-A עם הפרמטרים $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu, 2B, \theta)$.

שאלה 4 – תיאוריה ושימושיה (20 נקודות)

בהרצאה הוגדרו המשתנים הבאים:

τ - הזמן שלקוח מוכן לחכות (Patience time).

v - הזמן שלקוח נדרש לחכות (Offered wait).

4.1. בטא בעזרת שני המשתנים לעיל את W_q - הזמן שלקוח יחכה בפועל ואת P_{ab} - ההסתברות שלקוח

ינטוש (5 נקודות).

תשובה:

$$W_q = \min(\tau, v)$$

$$P_{ab} = P(\tau < v)$$

4.2. אנו מעוניינים בבניית אמדל- v על סמך מודל Erlang-A עם הפרמטרים $(\lambda, \mu, N, \theta)$ עבור קצב המופע, קצב השירות, מספר המוקדנים וקצב הנטישה, בהתאמה. לשם כך נתנה במספר הלקוחות במערכת בעת הגעת הלקוח - X (ע"ס PASTA). (12 נקודות).

4.2.1. מהו ערכו המשתנה $X < N$ | v ? הסבר. (2 נקודות)

תשובה:

$$X < N = 0 \text{ | } v \text{ כיוון שיש שרת פנוי ואין צורך להמתין.}$$

4.2.2. כיצד מתפלג המשתנה המקרי $v | X = N$? (3 נקודות)

תשובה :

$$v | X = N \sim \text{Exp}(N\mu)$$

4.2.3. כיצד מתפלג המשתנה המקרי $v | X = N + 1$? (3 נקודות).

תשובה :

$$v | X = N \sim \text{Exp}(N\mu) + \text{Exp}(N\mu + \theta)$$

4.2.4. תן נוסחה עבור ההתפלגות של המשתנה המקרי v . (4 נקודות)

תשובה :

$$v \sim \begin{cases} \sum_{i=0}^{X=N} \text{Exp}(N\mu + i\theta) & \text{w.p. } \pi_x \\ 0 & \text{w.p. } \pi_0 + \dots + \pi_{N-1} \end{cases}$$

4.3 בכיתה הוסבר כי v הינו למעשה ה-virtual waiting time (זמן ההמתנה הוירטואלי). הסבר למה הכוונה בביטוי זה? (3 נקודות)

תשובה : זמן ההמתנה הוירטואלי הינו זמן ההמתנה של לקוח שמגיע למערכת ולא נוטש (נשאר בה עד קבלת השירות). כלומר זהו לקוח שעבורו $P(\tau > v) = 1$.

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Gen. Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$N \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p \leq 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multinomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(n, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = n, n+1, \dots$	$\left[\frac{pe^{qt}}{1-qe^{qt}} \right]^n$	$\frac{np}{p}$	$\frac{npq}{p^2}$	Number of trials till n th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{pe^{qt}}{1-qe^{qt}}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim P(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$e^{\lambda(e^t-1)}$	λ	λ	
Hypergeometric	$X \sim H(n, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N+M$	$\max\{0, n-M\} \leq k$ $k \leq \min\{n, N\}$	$\sum_{k=\max\{0, n-M\}}^{\min\{n, N\}} e^{kt} p(k)$	$\frac{n}{N+M}$	$n \cdot \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N}{N+M} - \frac{n^2 M^2}{(N+M)^2}$	N - special element M - ordinary ones n - sample size k - special in sample
		Diracly Function						
Dirac	$X \sim \text{Dirac}(a, b)$	$f(t) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{at-bt} (1-t)^{b-1}$	$a, b > 0$	$0 \leq t \leq 1$	(Complicated)	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	$a-b=1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^a e^{-\lambda t} t^{a-1}}{\Gamma(a)}$	$a, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-a}$	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{a}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ $= \Gamma(x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t} t^{n-1}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp\left\{t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$	μ	σ^2	