



מרצה : ד"ר גלית יום-טוב

מתרגל : אריק סנדרוביץ'

תאריך הבחינה : 15.9.2014

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד ב' – סמסטר אביב 2014

- המבחן נמשך **שלוש** שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- **המבחן בחומר סגור.**
- **מותר להשתמש במחשבון.**
- המבחן כולל **21** עמודים, כולל עמוד זה.
- **כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.**
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת **הסברים או הוכחות רק אם** התבקשתם במפורש לעשות זאת.

ניקוד :	שאלה 1	_____ מתוך 20 נקודות	בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים
	שאלה 2	_____ מתוך 20 נקודות	תרגילי בית
	שאלה 3	_____ מתוך 40 נקודות	יישום
	שאלה 4	_____ מתוך 20 נקודות	תיאוריה

סה"כ _____ מתוך 100 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 - בחינות קודמות (20 נקודות).

חלק 1 (12 נקודות)

נתונה מערכת $M/M/N$ כאשר הפרמטרים הם:

- קצב ההגעה $\lambda = 240$ לקוחות לשעה,
- קצב השירות $\mu = 3.6$ לקוחות לשעה,
- N = מספר השרתים, אותם נשאר כפרמטר כללי.

1.1 (2 נקודות) נבנה מודל נוזלים המתאים למערכת זו, באופן הבא:

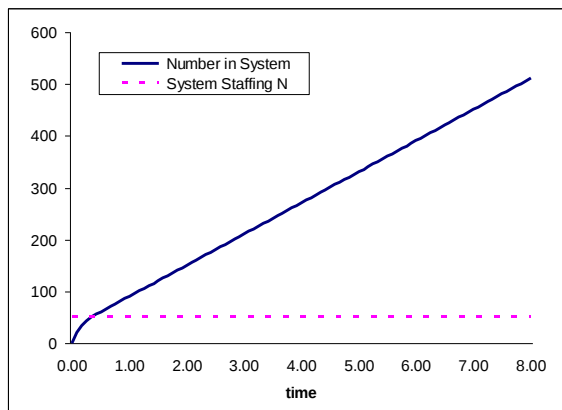
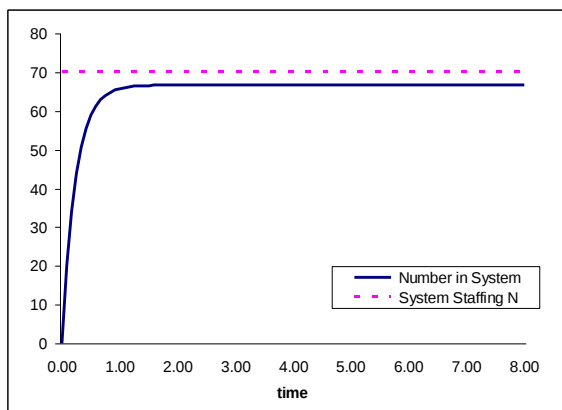
נסמן ב- $X(t)$ = סה"כ מספר לקוחות במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

השלימו את המשוואה הדיפרנציאלית עבור $X(t)$, $0 \leq t$. (2 נקודות)

תשובה:

1.2 (2 נקודות) בגרפים שלהלן מצוירים עבור $N = 50$ ו- $N = 70$. רואים כי עבור $N = 50$

המערכת מתפוצצת ואילו $N = 70$ מבטיח סטביליות.



בעזרת שימוש במודל המרקובי $M/M/N$, תסבירו את הגרפים הנ"ל וחשבו את ה- N המינימלי שיבטיח סטביליות של המערכת.

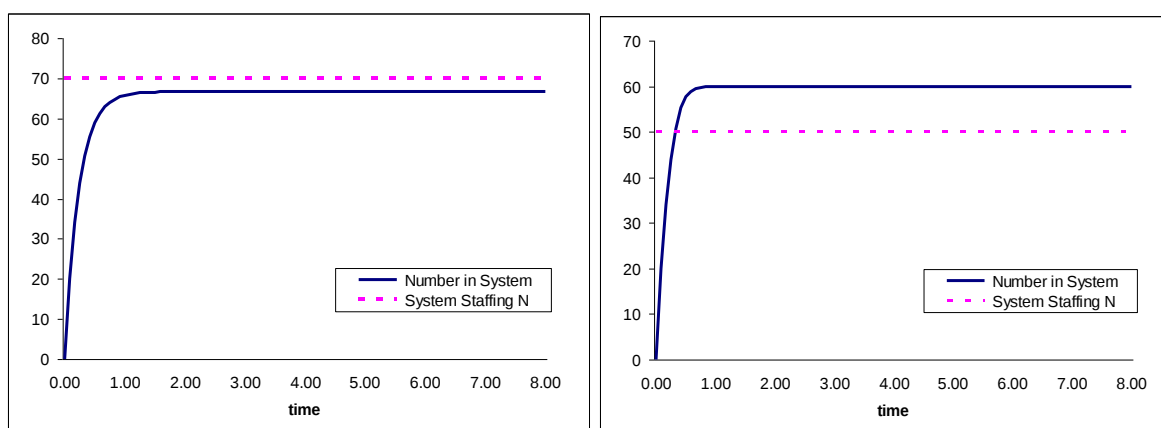
הסבר:

1.3 (2 נקודות) נניח עתה כי לקוחות יכולים לנטוש מהתור, כאשר כל לקוח נוטש באופן בלתי תלוי באחרים, וזאת אחרי זמן מעריכי עם ממוצע $\frac{1}{\theta} = 10$ דקות. (המודל המרקובי המתאים הוא כמובן $(Erlang - A \ M / M / N + M)$).

כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור מודל נוזלים $X(t)$, $0 \leq t$, המתאים למערכת זו. (2 נקודות)

תשובה:

1.4 (2 נקודות) בגרפים שלהלן מצוירים עבור $N = 50$ ו- $N = 70$.



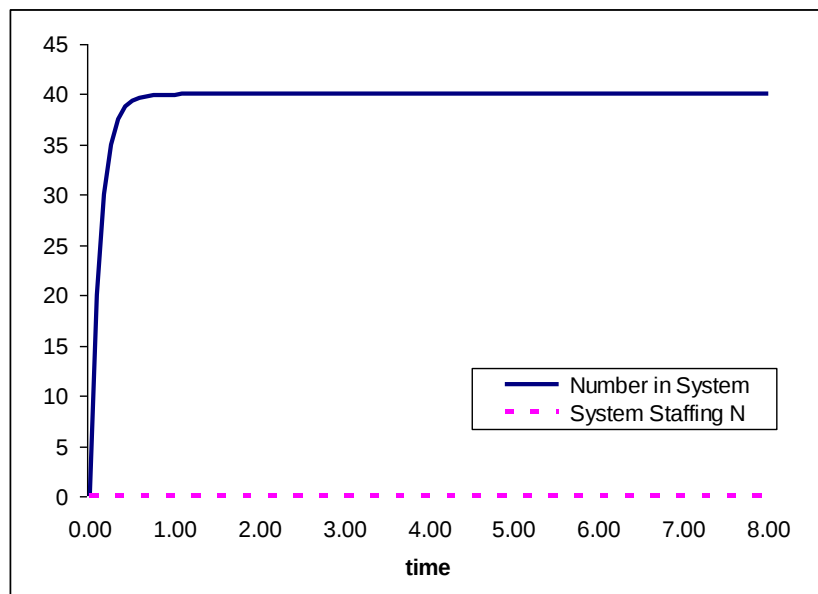
השוו את הגרפים עם אלה מסעיף 1.2. הסבירו, בעזרת המודל המרקובי המתאים, את ההבדלים, וכיצד משפיעות נטישות על המערכת.

הסבר:

1.5 (2 נקודות) אנו מעוניינים, על ידי שליטה ב- N , להקטין את עלות התפעול של המערכת, העלות מורכבת משכר לעובדים: c ש לשעה, וקנס על הנטישות: a ש על כל נטישה. לפי מודל נוזלים, כתבו את הנוסחה לעלות התפעול על פני תקופה של 8 שעות.

תשובה:

1.6 (2 נקודות) עבור $c = 36$ ו- $a = 4$ התקבל על-ידי ה- *Excel Solver* כי $N = 0$. ומודל הנוזלים X נראה כך:



מה משמעות העובדה ש- $N = 0$ אופטימלי?

תשובה:

חלק 2 (8 נקודות)

פונקציית ה-hazard rate $h_X(t)$ של משתנה מקרי (מ"מ) אי-שלילי X , עם צפיפות $f_X(t)$, נתונה ע"י

$$h_X(t) = \frac{f_X(t)}{P(X > t)}, \quad t \geq 0.$$

2.1 (2 נקודות) נתון מ"מ X מעריכי עם פרמטר λ : $X \sim \exp(\lambda)$. צפיפותו נתונה ע"י

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

הראו שפונקציית ה-hazard rate של X קבועה, ושווה ל- λ . ז"א $h_X(t) \equiv \lambda$. תנו הסבר אינטואיטיבי קצר לעובדה זאת.

הוכחה:

הסבר:

2.2 יהי Y מ"מ עם ההתפלגות הבאה: $Y \sim \begin{cases} \exp(1), & \text{w.p. } 1/2, \\ \exp(2), & \text{w.p. } 1/2. \end{cases}$

ז"א, בסיכוי $1/2$, Y מתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר 1 ובסיכוי $1/2$, Y מתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר 2.

שתי השאלות הבאות עוסקות במ"מ Y הני"ל.

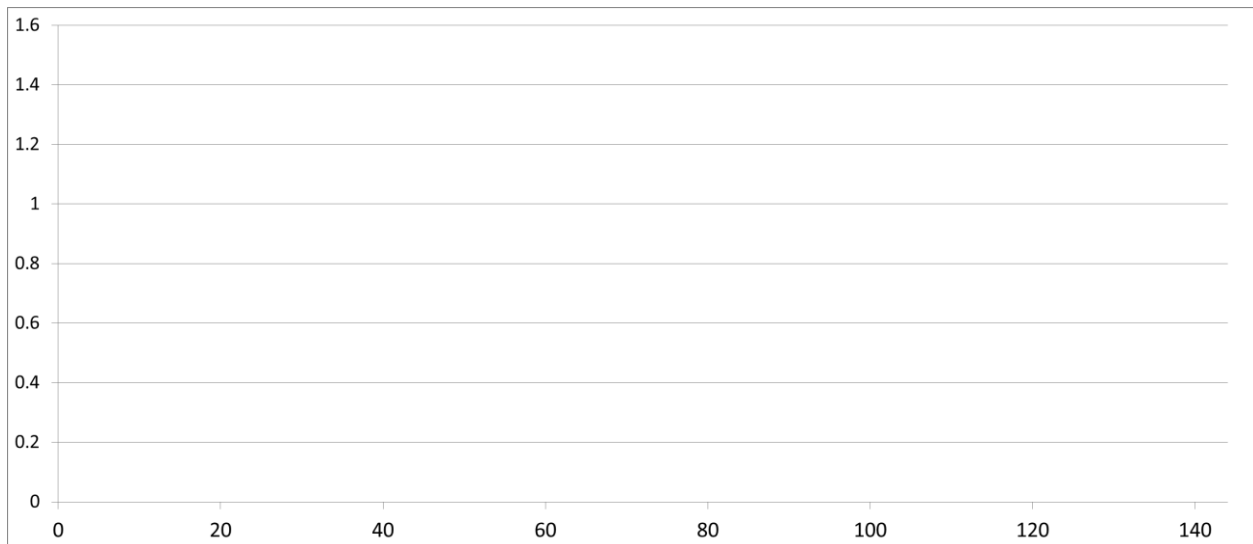
2.2.1 (2 נקודות) מה היא פונקציית ה-hazard rate $h_Y(t)$ של Y בנקודה $t = 0$?

תשובה:

(2 נקודות)

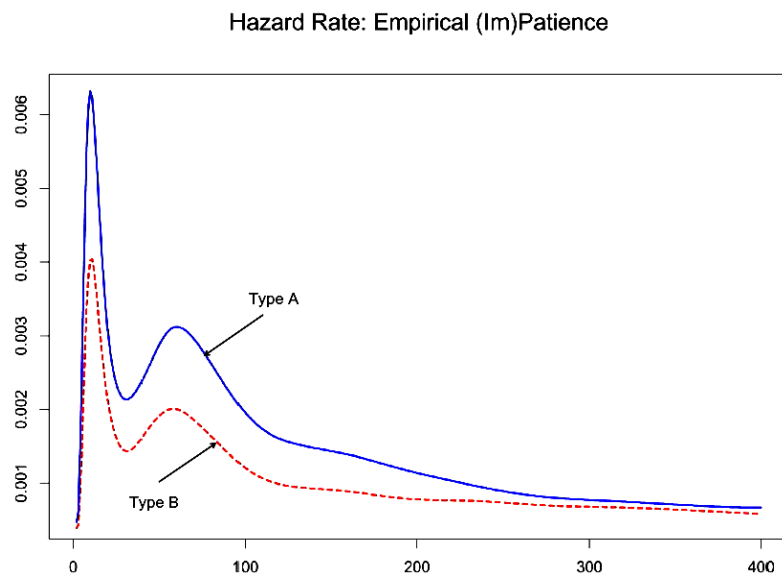
2.2.2 (2 נקודות) ציירו את פונקצית ה-hazard rate של Y : $h_Y(t), t \geq 0$. אינכם מתבקשים לחשב את הפונקציה במדויק. מספיק לצייר רק את התנהגותה הכללית (עולה, יורדת או לא זה ולא זה) ואת ההתנהגות בקצוות ($t = 0$ ו- $t = \infty$).

תשובה :



הסבר :

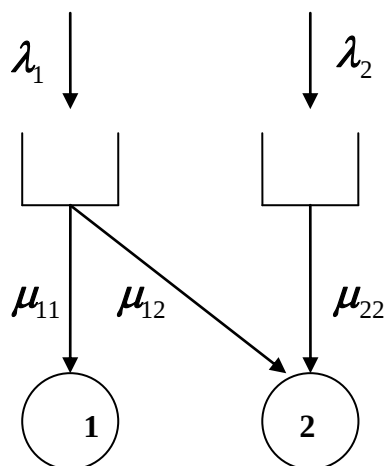
2.2.3 (2 נקודות) בגרף הבא נתונות 2 פונקציות hazard rate אמפיריות של סבלנות לקוחות משני סוגים : סוג A וסוג B. השוו את סבלנות 2 הסוגים בעזרת הגרפים, תוך הסבר קצר.



תשובה:

שאלה 2 – תרגילי בית (20 נקודות)

נתון מודל של מערכת שירות בארכיטקטורת N, כמתואר בגרף הבא:



קצבי ההגעה לשני סוגי הלקוחות הם $\lambda_1 = 1.135$ ו- $\lambda_2 = 0.38$ לדקה. בכל תחנה יושב שרת יחיד. שרת 1 יכול לשרת רק לקוחות מסוג 1 עם קצב שירות $\mu_{11} = 1$. שרת 2 משרת לקוחות מסוג 2 בקצב $\mu_{22} = 1$, והוא יכול גם לעזור לשרת 1 ולשרת לקוחות מסוג 1 בקצב $\mu_{12} = 0.5$. קצבי השירות ניתנים ביחידות לדקה.

2.1 מהו אחוז הלקוחות המינימלי מסוג 1 שצריך שרת 1 לשרת על מנת להבטיח יציבות של המערכת? (5 נקודות)

תשובה:

2.2 הציעו מדיניות לתפעול המוקד, אשר תבטיח יציבות של המערכת. (5 נקודות)

תשובה:

2.3 הניחו כי לקוחות מסוג 1 הם לקוחות רגילים (Regular) ולקוחות מסוג 2 הם לקוחות VIP. בהינתן מידע זה, הציעו מדיניות סבירה לניהול המערכת הנ"ל? תארו בפירוט את המדיניות. (5 נקודות)

תשובה:

2.4 הניחו כעת כי המערכת פועלת לפי מדיניות שהיא *preemptive*, ז"א ניתן בכל רגע להוציא לקוח משירות ולהחזירו להמתנה בתור, אבל אסור "לזרוק" לקוחות מהמערכת. הניחו עוד כי בתחנה i עובדים במקביל N_i שרתים ($i = 1, 2$), ובתחנה 2 ניתנת עדיפות ללקוחות מסוג 2, שהם VIP. כמו כן, מדיניות ניתוב לקוחות מסוג 1 (Regular) לשירות היא כזו שאם בשתי התחנות ישנם שרתים פנויים לשירות לקוח מסוג 1, הוא נשלח לשירות בתחנה 2.

נגדיר:

$X_1(t)$ = סה"כ מספר לקוחות מסוג 1 במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

$X_2(t)$ = סה"כ מספר לקוחות מסוג 2 במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

כתבו משוואות דיפרנציאליות עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$. (5 נקודות)

תשובה:

שאלה 3 – יישום (45 נקודות)

ארגון Medicare (ביטוח בריאות ממשלתי) בארה"ב מפרסמים באתר האינטרנט שלהם מדדי איכות ורמת שירות של בתי חולים שונים ברחבי המדינה, כך שלקוחות החברה יוכלו להשוות ביניהם ולבחור בהתאם להעדפותיהם. בין השאר מציג האתר נתוני רמת שירות בחדרי מיון. להלן טבלה אשר מסכמת את מדדי השירות בחדרי מיון של שני בתי חולים במדינת ניו-יורק.

מדד לרמת שירות		
חדר מיון 2	חדר מיון 1	
370	439	ממוצע זמן שהיה במיון עד אשפוז
145	225	ממוצע זמן שהיה במיון מההחלטה לאשפוז ועד לאשפוז
206	144	ממוצע זמן שהיה במיון עד שחרור
12	17	ממוצע זמן ההמתנה עד לבדיקת רופא ראשונה
4%	5%	אחוז המטופלים שעזבו לפני בדיקת רופא

הזמן מוצג בדקות*

3.1 השווה בין שני בתי החולים מהיבט מדדי השירות השונים. איזה בית חולים עדיף לדעתך? (2 נקודות).

תשובה:

3.2 באיזה חדר מיון החולים יותר סבלניים? מהו ממוצע הסבלנות של חולים בכל אחד מחדרי המיון? תן הסבר כיצד ניתן להשפיע על סבלנות החולים בחדר המיון? (3 נקודות).

תשובה:

3.3 עבור חדר המיון הראשון, הצע מודל תורים פשוט שיתאים לתהליך בדיקת הרופא הראשונה. פרט ונמק את הנחותיך. (2 נקודות)

תשובה:

כעת נרצה לאמוד את הפרמטרים של המודל שהצעתם. נניח כי בחדר המיון ישנם בממוצע 10 רופאים זמינים למתן בדיקה ראשונה (וזהו כל תפקידם). העומס המוצע (Offered Load) על חדר המיון הינו 100 והעומס המוצע על בדיקת הרופא הראשונה הינו 10.

3.4. מהו קצב המופע השעתי הממוצע לחדר המיון? כתוב את הפרמטרים של מודל התורים עבור בית החולים הראשון, תחת ההנחות לעיל. (4 נקודות).

תשובה:

3.5. מהו מספר החולים הממוצע בחדר המיון? (2 נקודות).

תשובה:

3.6. מהי נצילות הרופאים בבדיקת רופא ראשונה? בזכות איזו תופעה הנצילות קטנה מ-1? (2 נקודות).

תשובה:

3.7 באיזה תחום תפעולי פועלת בדיקת הרופא הראשונה בחדר המיון בבית החולים הראשון? הסבר. תן
אמד לפרמטר רמת השירות של בית החולים. (3 נקודות).

תשובה:

3.8 עפ"י הגרף בעמוד 15 מהי ההסתברות להמתנה? (3 נקודות)

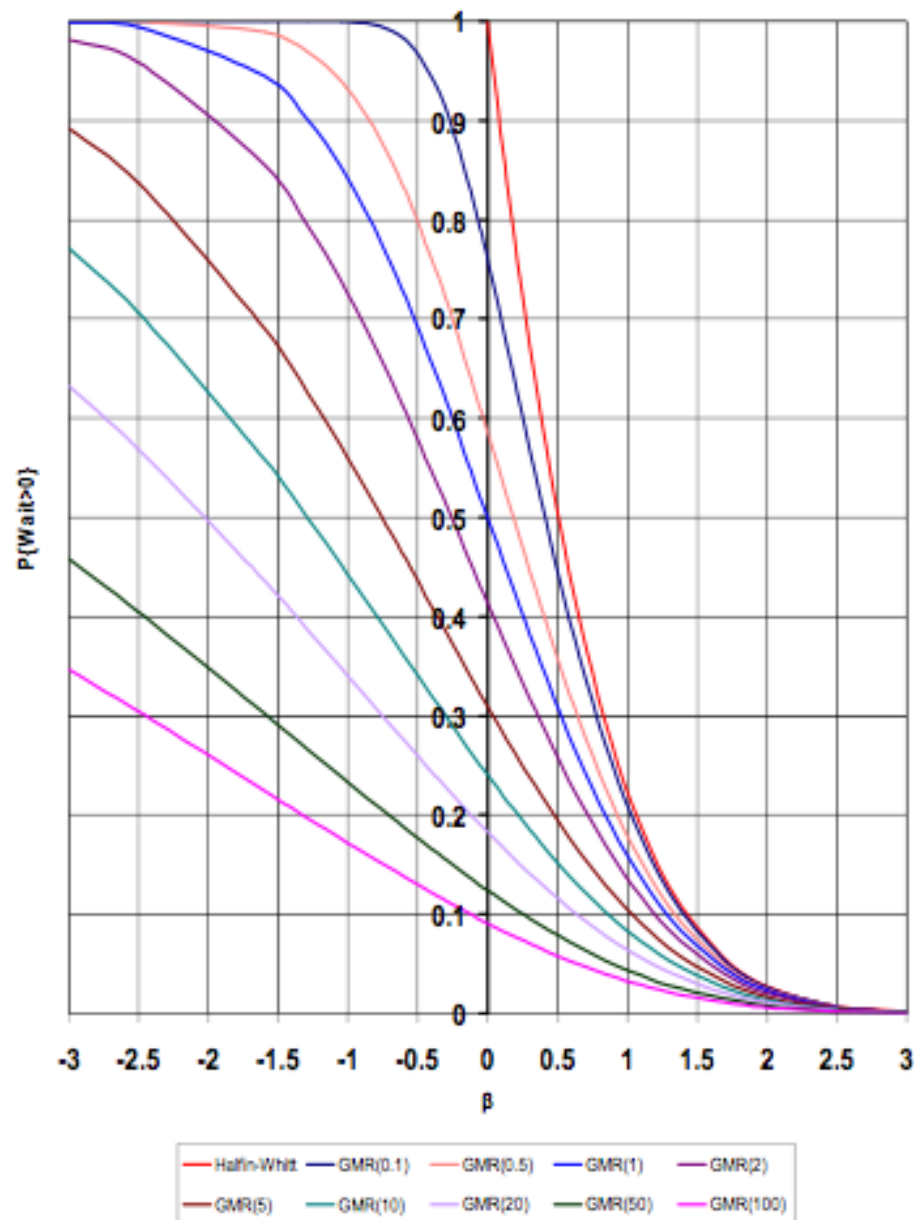
תשובה:

3.9 נניח שמנהל בית החולים רוצה להוריד את ההסתברות להמתנה ל-0.5, מהו מספר הרופאים שידרש? (3
נקודות)

תשובה:

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .



GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\theta/\mu = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

3.10 בתי החולים החליטו על פרסום זמני ההמתנה לבדיקה ראשונה באופן מקוון (מתעדכן בזמן אמת). למי תועיל החלטה זו? נמק. (3 נקודות)

תשובה:

אל בית החולים הראשון מגיעים שני סוגי מטופלים : כאלה שיתאשפזו בסוף תהליך המיון (החולים היותר קשים) ואלה שישוחררו (החולים הקלים יותר). נניח כי מדיניות הטיפול בחולים היא preemptive, כלומר חולה קשה אשר מקומו ראשון בתור ה"קשים" "יוציא" חולה קל מטיפול ויקבל טיפול מיידי. הפרמטרים של המודל הם כדלהלן :

- קצבי המופע של החולים הינם λ_1 ו- λ_2 עבור החולים הקלים והקשים, בהתאמה.
- קצבי השירות של החולים הינם μ_1 ו- μ_2 עבור החולים הקלים והקשים, בהתאמה.
- לצורך המודל נניח כי אין נטישות עבור שני הסוגים.
- נניח כי מספר השרתים הינו N .

3.11 הצע מודל לתיאור תלוי זמן של מספר האנשים במערכת. ניתן להניח כי בחדר המיון ישנה כמות מטופלים התחלתית x , כולם מטופלים מהסוג הקל. (3 נקודות)

תשובה:

מנהל המיון בבית החולים הראשון שוקל מדיניות טיפול חדשה עבור אוכלוסיות החולים במקום מדיניות ה-preemptive. הוא מעוניין כי המדיניות תביא בחשבון את משך ההמתנה וגם את "עלות" ההמתנה של שתי סוגי האוכלוסיות (לעתים עלות ההמתנה אינה בהכרח שווה בין סוגי הלקוחות). הוא מעוניין לשקלל זאת כך שהמדיניות תמזער את עלות ההמתנה הכוללת. לצורך התרגיל, נניח כי קצב השירות של מטופלים קלים **גבוה פי 2** מאשר זה של חולים קשים (החולה הקשה עובר תהליך ארוך ומסובך יותר).

3.12 תחילה נניח כי "עלות ההמתנה הקלינית" של טיפול בחולה ה"קל" זהה לזה של ה"קשה" (ניתן להעריך עלות כזו, למשל, בסכנה הנשקפת לחיי המטופל). רופא אשר מתפנה לטיפול בחולים מוצא כי ישנו מטופל יחיד בתור ה"קל" ובתור ה"קשה". מי יקבל עדיפות בטיפול? נמק. (2 נקודות).

תשובה:

3.13 כעת נניח כי רופאים העריכו את "עלות ההמתנה הקלינית" של טיפול בחולה ה"קל" והיא **פי 2 קטנה יותר** מזו של החולה הקשה. מי מהחולים יועדף כעת? (4 נקודות)

תשובה:

כעת מחליטים שני בתי החולים על שיתוף פעולה בניתוב המטופלים. נניח כי כמות המיטות זהה בשני בתי החולים (נסמנה ב- B לכל בית חולים). כמו כן נניח כי קצבי השירות האינדיווידואליים בשני בתי החולים (ולשני סוגי האוכלוסיות) זהים ונסמנם ב- μ . קצבי המופע לבתי החולים שונים והינם λ_1 ו- λ_2 , בהתאמה. נניח כי מטופלים מופנים לבית החולים בו התור לקבלה למיון (לבדיקת רופא ראשונית) קצר יותר. בכיתה הראנו כי במצב זה אורך התור לשני חדרי המיון יהיה זהה.

3.14 איזה מודל תורים פשוט יתאים בקירוב למערכת החדשה? מהם הפרמטרים המתאימים? הסבר. 4) (נקודות)

תשובה:

שאלה 4 – תיאוריה ושימושיה (20 נקודות)

בהרצאה הוגדרו המשתנים הבאים:

τ – הזמן שלקוח מוכן לחכות (Patience time).

v – הזמן שלקוח נדרש לחכות (Offered wait).

4.1. בטא בעזרת שני המשתנים לעיל את W_q – הזמן שלקוח יחכה בפועל ואת P_{ab} – ההסתברות שלקוח

ינטוש (5 נקודות).

תשובה:

4.2. אנו מעוניינים בבניית אמדל- v על סמך מודל Erlang-A עם הפרמטרים $(\lambda, \mu, N, \theta)$ עבור קצב המופע, קצב השירות, מספר המוקדנים וקצב הנטישה, בהתאמה. לשם כך נתנה במספר הלוקחות במערכת בעת הגעת הלוקוח – X (ע"ס PASTA). (12 נקודות).

4.2.1. מהו ערכו המשתנה $X < N$? הסבר. 2) (נקודות)

תשובה:

4.2.2. כיצד מתפלג המשתנה המקרי $v | X = N$? (3 נקודות)

תשובה:

4.2.3. כיצד מתפלג המשתנה המקרי $v | X = N + 1$? (3 נקודות).

תשובה:

4.2.4. תן נוסחה עבור ההתפלגות של המשתנה המקרי v . (4 נקודות)

תשובה:

4.3 בכיתה הוסבר כי v הינו למעשה ה-virtual waiting time (זמן ההמתנה הוירטואלי). הסבר למה הכוונה

בביטוי זה? (3 נקודות)

תשובה:

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Generating Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$X \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p \leq 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multinomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(n, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = n, n+1, \dots$	$\left[\frac{pe^{qt}}{1-qe^{qt}} \right]^n$	$\frac{np}{p}$	$\frac{npq}{p^2}$	Number of trials till n th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{pe^{qt}}{1-qe^{qt}}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim P(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$e^{\lambda(e^t - 1)}$	λ	λ	
Hypergeometric	$X \sim H(n, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{M-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$N, M > 0$ $1 \leq n \leq N+M$	$\max\{0, n-M\} \leq k \leq \min\{n, N\}$	$\sum_{k=0}^n e^{kt} p(k)$	$\frac{nM}{N+M}$	$n \frac{M(N-M)}{N^2+N-1} - \frac{n^2 M^2}{N^2+N-1}$	N - special denumerate M - ordinary ones n - sample size k - equal to sample
		Diracly Function						
Dirac	$X \sim \text{Dir}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	(Complicated)	$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\alpha - \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ $= \Gamma(x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp\left\{t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$	μ	σ^2	