



מרצה : ד"ר גלית יום טוב

מתרגלת : ניצן כרמלי

תאריך הבחינה : 9.10.2013

מס' סטודנט _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד ב' – סמסטר אביב תשע"ג 2013

פתרון

- המבחן נמשך **שלוש** שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- **המבחן בחומר סגור.**
- **מותר להשתמש במחשבון.**
- המבחן כולל **31** עמודים, כולל עמוד זה.
- **כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.**
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק : מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת **הסברים או הוכחות רק אם** התבקשתם במפורש לעשות זאת.

הרצאות\תרגולים\בחינות קודמות	מתוך 10 נקודות	שאלה 1	ניקוד :
תרגילי בית	מתוך 10 נקודות	שאלה 2	
יישום	מתוך 20 נקודות	שאלה 3	
תיאוריה	מתוך 10 נקודות	שאלה 4	

ס ה " כ _____ מתוך 50 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 - תרגילי כיתה/הרצאות/מבחנים קודמים (10 נקודות)

חלק 1 – MJP Models of Service

קצב ההגעה לדלפק הקבלה בנמל תעופה הוא 282 נוסעים בשעה. קצב השירות בדלפק הוא 60 לקוחות בשעה. ישנם 5 פקידים (שרתים) העובדים בדלפק הקבלה. ניתן להניח כי זמני השירות מתפלגים מעריכית וכי תהליך הגעת הנוסעים הינו תהליך פואסון וכן כי זמני השירות בלתי תלויים בתהליך הגעת הנוסעים.

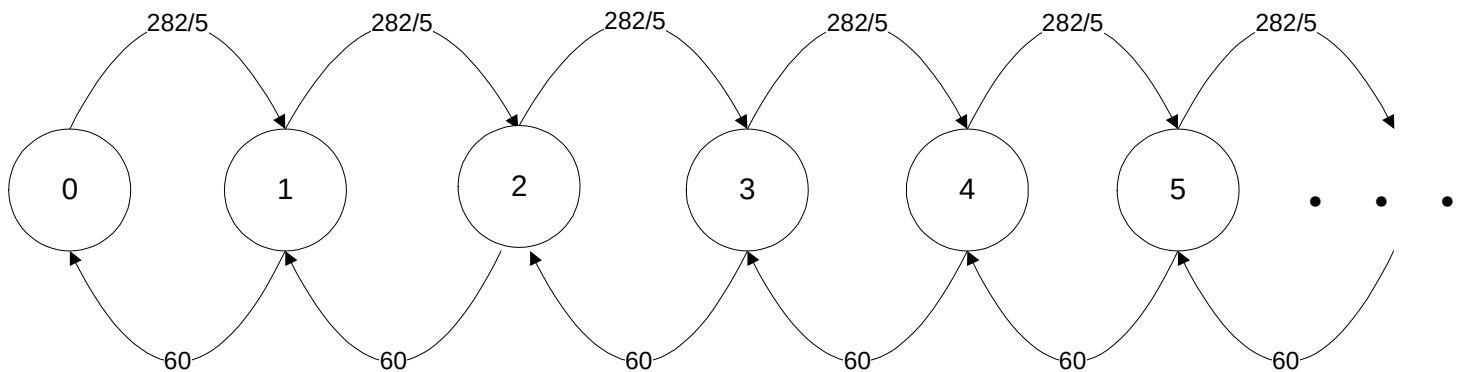
מנהל שדה התעופה בוחן שתי אפשרויות לניהול התורים :

1. חמישה תורי M/M/1 כאשר בכל אחד קצב הגעה של $282/5$ נוסעים לשעה, וקצב שירות של 60 נוסעים לשעה בכל אחד מהתורים.

2. תור M/M/5 יחיד בו קצב ההגעה הינו 282 נוסעים בשעה, ובו עובדים חמישה פקידים כל אחד בקצב של 60 לקוחות בשעה.

- לפתרון סעיפי שאלה זו מצורפות בסוף המבחן בעמוד 28 נוסחאות רלוונטיות.

להלן דיאגרמת קצבי המעבר של אחד מתורי ה - M/M/1 הנ"ל :



1.1.1 חשבו את $E(L_{sys}^1)$, כאשר L_{sys}^1 = מספר האנשים במערכת M/M/1 כולה (שירות+תור)

במצב יציב.

(1 נקודה)

תשובה:

$$\text{לפי שיטת החתכים} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{282}{5} \pi_i = 60 \pi_{i+1} \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \end{array} \right. \quad \text{ולכן:}$$

$$\pi_i = 0.94^i \pi_0$$

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} 0.94^i \pi_0 = \frac{1}{1-0.94} \pi_0 \Rightarrow \pi_0 = 1 - 0.94 = 0.06$$

$$\Rightarrow \pi_i = 0.94^i \times 0.06$$

מאחר ו- $P(L_{\text{sys}}^1 = i) = \pi_i = 0.94^i \cdot 0.06$ נקבל כי $L_{\text{sys}}^1 \sim \text{Geo}_0(0.06)$ ולכן

$$E(L_{\text{sys}}^1) = \frac{0.94}{0.06} = 15 \frac{2}{3}$$

1.1.2 מצאו את $E(W_q^1)$, כאשר $W_q^1 =$ זמן ההמתנה בתור במצב יציב במודל M/M/1 הני"ל.

(1 נקודה)

תשובה:

לפי נוסחת Little:

$$E(W_{\text{sys}}^1) = \frac{E(L_{\text{sys}}^1)}{\lambda} = \frac{15 \frac{2}{3}}{\frac{282}{5}} = 0.2778 \text{ hour} = 16.7 \text{ min}$$

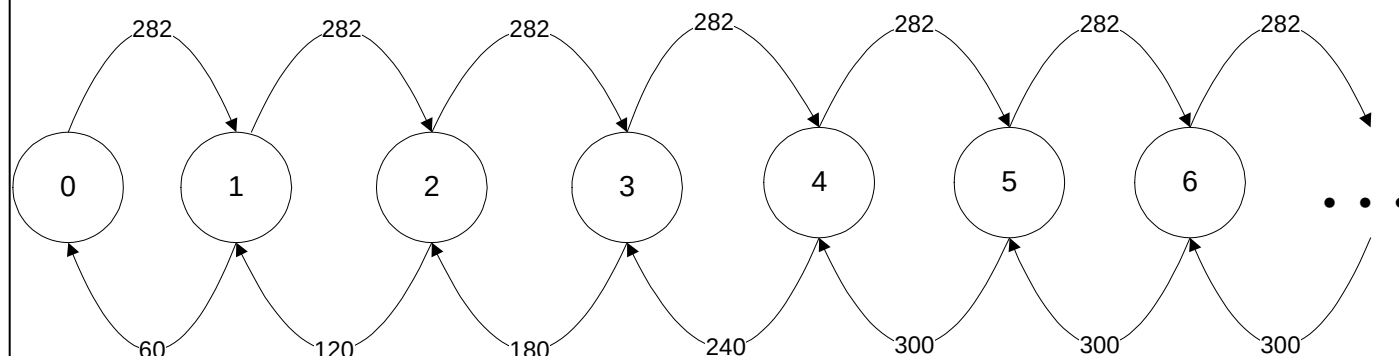
$$E(W_q^1) = E(W_{\text{sys}}^1) - E(\text{Service}) = 16.7 - 1 = 15.7 \text{ min}$$

1.1.3. השלימו את דיאגרמת קצבי המעבר של תור M/M/5:

(יש לרשום במפורש את הערכים של קצבי המעבר).

(1 נקודה)

תשובה:



1.1.4. נסמן W_q^5 = זמן ההמתנה בתור במצב יציב במודל M/M/5. מהו היחס בין $E(W_q^1)$ ל-

$$E(W_q^5), \text{ כלומר, מהו הערך של } \frac{E(W_q^1)}{E(W_q^5)} \text{ ? הסבירו את תשובתכם.}$$

לנוחיותכם מצורף צילום מסך של תוכנת 4CC, מומלץ להיעזר בו בחישוביכם.

(2 נקודות)

	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Agent's Occupancy	Average Speed of Answer	%Answer within Target	Average Queue Length
Results	60.0	00:00.0	5.0	01:00.0	282.0	94.0%		14.6%	13.4
1									
2									

תשובה:

תחילה נחשב את נצילות שתי המערכות:

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{\lambda_1}{n \cdot \mu_1} = \frac{282/5}{1 \cdot 60} = 0.94 \\ \rho_5 = \frac{\lambda_5}{\mu_5} = \frac{282}{5 \cdot 60} = 0.94 \end{cases}$$

(את נצילות השרתים בתור M/M/5 ניתן לקחת ישירות מתוך צילום המסך של תוכנת ה-4CC).

$$E(W_q^5) = \frac{E(S)}{5} \cdot \frac{P(\text{Wait} > 0)}{1 - \rho_5} = \frac{E(S)}{5} \cdot \frac{E_{2,5}}{1 - \rho_5} \quad \text{ו-} \quad E(W_q^1) = E(S) \cdot \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \quad \text{כעת}$$

מתוכנת ה-4CC ניתן לראות כי $P(\text{Wait} > 0) = E_{2,5} = 1 - 0.146 = 0.854$ וכן קיבלנו כי

$$\rho_1 = \rho_5 = 0.94 \quad \text{ולכן:}$$

$$E(W_q^5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{0.854}{1 - 0.94} = 2.847$$

$$E(W_q^1) = 1 \cdot \frac{0.94}{1 - 0.94} = 15.67$$

$$\frac{E(W_q^1)}{E(W_q^5)} = 5.5$$

1.1.5. האם התשובה שהגעתם אליה בסעיף הקודם הייתה צפויה? מדוע?

(1 נקודה)

תשובה:

התשובה צפויה. מדובר למעשה ב-Pooling, כלומר איחוד חמישה תורי M/M/1 לתור אחד של M/M/5.

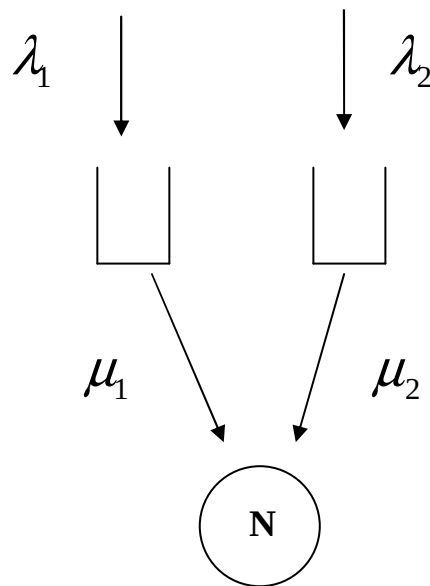
אנחנו מעריכים כי בתצורה זו משך ההמתנה יתקצר מכמה סיבות:

1. "כולם עוזרים לכולם" - בניגוד לתצורה הקודמת כאן לא ייתכן מצב שבו שרת אחד בטל ויש תור מול עמדה אחרת.

2. Economies of Scale - איחוד התורים מקטין את הסטוכסטיות היחסית במערכת.

חלק 2 – מודל נוזלים

נתונה מערכת תורים בארכיטקטורת V, המתוארת בצירוף הבא:



הפרמטרים של מודל המערכת נתונים ע"י :

- ♦ λ_1 (λ_2) - קצבי מופע לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ μ_1 (μ_2) - קצבי שירות לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ N - מספר השרתים בתחנה

המערכת פועלת לפי מדיניות שהיא *preemptive*, ז"א ניתן בכל רגע להפסיק שירות של לקוח ולהחזירו להמתנה בתור מהסוג שלו, אבל אסור "לזרוק" לקוחות מהמערכת. בנוסף, המדיניות הינה *work conserving*, דהיינו, השרתים נותנים שירות כאשר יש לקוחות בתור (ז"א לא ייתכן מצב שבו יש שרתים פנויים ובעת ובעונה אחת יש גם לקוחות הממתינים בתור).

לצורך בנית **מודל נוזלים** למערכת הנ"ל, נגדיר את המשתנים הבאים :

$$X_1(t) = \text{סה"כ מספר הלקוחות מסוג 1 במערכת (בשירות או בתור), בזמן } 0 \leq t.$$

$$X_2(t) = \text{סה"כ מספר הלקוחות מסוג 2 במערכת (בשירות או בתור), בזמן } 0 \leq t.$$

1.2.1 כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$, תחת ההנחה שהתחנה נותנת

עדיפות ללקוחות מסוג 1.

(1 נקודה)

תשובה:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = \lambda_1 - \mu_1(X_1 \wedge N)$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = \lambda_2 - \mu_2(X_2 \wedge (N - X_1)^+)$$

1.2.2 כתבו ביטוי למספר הכולל של הממתינים בתור בזמן t . (השתמשו ב- N , $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$).

(1 נקודה)

תשובה:

$$(X_1(t) + X_2(t) - N)^+$$

כאלטרנטיבה לעדיפות הנ"ל ללקוחות מסוג 1, נגדיר מדיניות חדשה ששומרת על תורים שווים בשני הסוגים. ז"א, משרתים לקוחות מסוג 1 ומסוג 2 באופן שבכל רגע $0 \leq t$, מספר הממתינים בתור מסוג 1 שווה למספר הממתינים בתור של סוג 2.

1.2.3 כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$, תחת מדיניות אלטרנטיבית זו.

(2 נקודות)

תשובה:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = \lambda_1 - \mu_1 \left(X_1 - \frac{1}{2}(X_1 + X_2 - N)^+ \right)$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = \lambda_2 - \mu_2 \left(X_2 - \frac{1}{2}(X_1 + X_2 - N)^+ \right)$$

שאלה 2 - תרגילי בית (10 נקודות)

חלק 1 – אמידת סבלנות

להלן ארבעה מודלים לתיאור סבלנות של לקוחות:

1. **מודל אקספוננציאלי סטנדרטי.**

הזמן שלקוח מוכן להמתין הוא מהתפלגות אקספוננציאלית עם פרמטר θ .

2. **מודל אקספוננציאלי עם נטישות מיידיות.**

לקוח המתקשר ומסתבר לו שהוא נדרש להמתין בתור, נוטש באופן מיידי בהסתברות p (באופן מעשי זמן הנטישה ייקח מספר שניות). במידה והלקוח לא נוטש מיידית, סבלנותו תהיה אקספוננציאלית עם פרמטר θ .

3. **סבלנות בת שתי פאזות.**

סבלנות $X + Y^d$. כאשר X הינו משתנה מקרי (או קבוע) המתאים לזמן בו הלקוח "מרגיש בסדר" ולא חושב על נטישה, המ"מ Y מתאים לזמן בו הלקוח מתחיל להיות קצר רוח, והתפלגות Y הינה אקספוננציאלית עם פרמטר θ . לבסוף, X ו Y בלתי תלויים.

4. **התנהגות אדפטיבית.**

סבלנות הלקוחות משתנה במשך שעות היום (לדוגמא בשעות אשר הלקוחות מצפים להמתין זמן רב תהיה להם סבלנות ארוכה).

עליכם למדל את סבלנותם של לקוחות ממענה קולי טלפוני מסוים. כדי לבחור מודל מתאים לסוגים שונים של לקוחות, שורטטו ארבעת הגרפים הבאים:

- כל גרף מייצג סוג לקוחות מסוים (PS, IN, NE, NW).
- כל גרף מתאר פיזור נקודות, כאשר כל נקודה מחושבת כממוצע במשך רבע שעה.
- ערכי נקודה בגרף הם: ממוצע זמן ההמתנה של הלקוחות שהמתינו בתור, ברבע שעה מסוימת, מול אחוז הנוטשים של לקוחות אשר המתינו בתור באותה רבע שעה.
- בכל גרף משורטט קו ישר אשר נוצר על ידי רגרסיה ליניארית בין שני המשתנים.

Figure 1 NE customers.
 $P\{\text{Abandon} \mid \text{Wait} > 0\}$ vs. $E[\text{Wait} \mid \text{Wait} > 0]$.

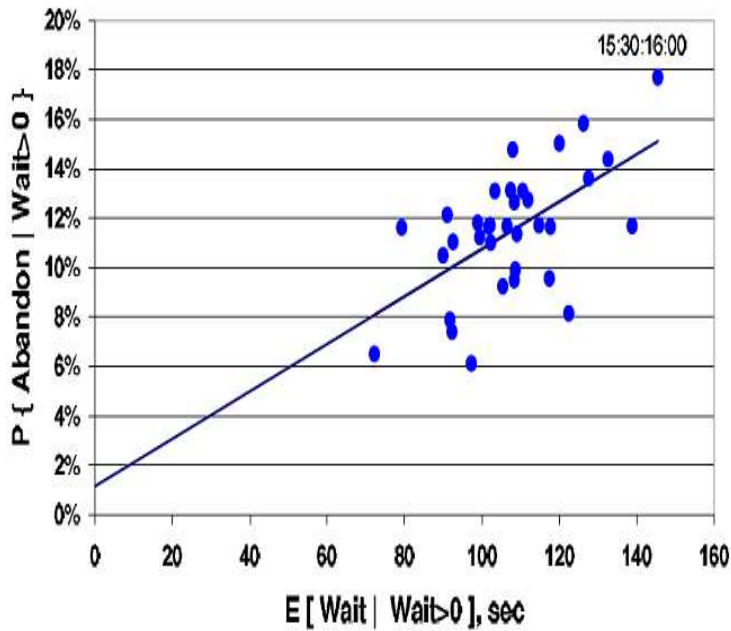


Figure 2 NW customers.
 $P\{\text{Abandon} \mid \text{Wait} > 0\}$ vs. $E[\text{Wait} \mid \text{Wait} > 0]$.

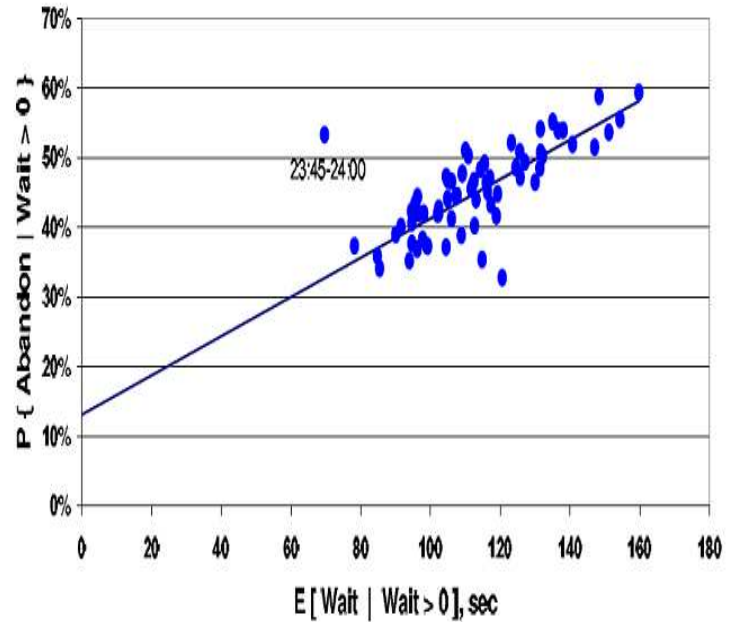


Figure 3 PS customers.
 $P\{\text{Abandon} \mid \text{Wait} > 0\}$ vs. $E[\text{Wait} \mid \text{Wait} > 0]$.

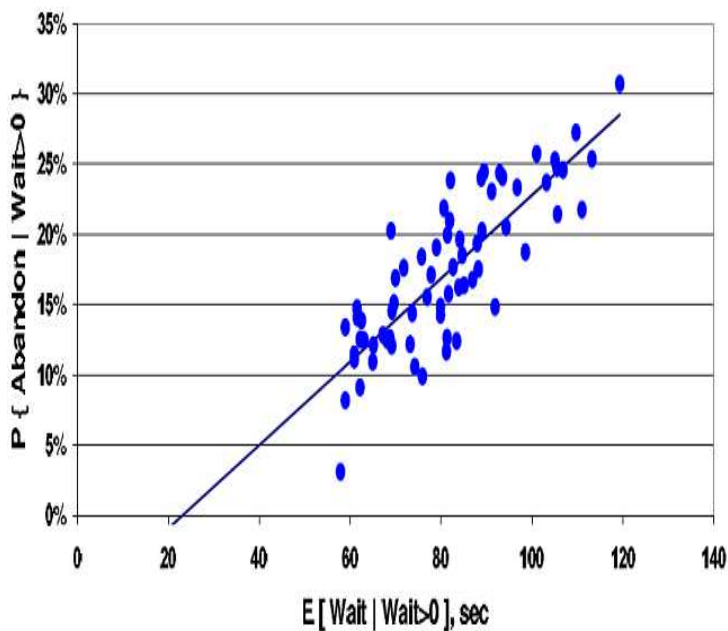
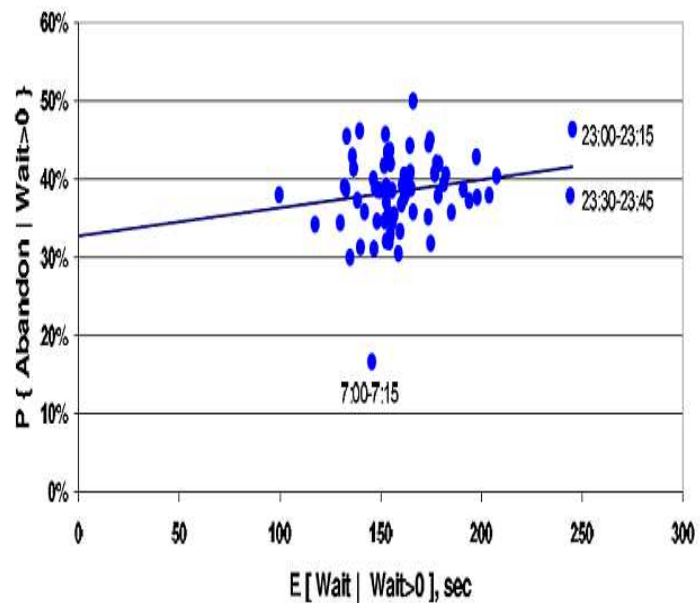


Figure 4 IN customers.
 $P\{\text{Abandon} \mid \text{Wait} > 0\}$ vs. $E[\text{Wait} \mid \text{Wait} > 0]$.



2.1.1 הסבירו בקצרה מדוע הנתונים שנבחרו עבור מידול הסבלנות (אותם נתונים אשר מופיעים בארבעת הגרפים), הם נתונים המדברים על לקוחות שהמתינו בתור בלבד, ולא על כלל הלקוחות. (במילים אחרות, מדוע לא נכללו הלקוחות ששורתו מיידית?)

(1 נקודה)

תשובה:

כאשר אנו אומדים סבלנות לקוחות אשר לא המתינו בתור, אלו לא תורמים מידע לגבי סבלנותם.

על סמך הגרפים הנ"ל, התאימו מודל סבלנות מתאים (מארבעת המודלים המוצגים בשאלה) לכל אחד מארבעת סוגי הלקוחות. הסבירו את תשובתכם.

2.1.2 לקוחות NE

(1 נקודה)

תשובה:

המודל המתאים הוא מודל אקספוננציאלי סטנדרטי. מאחר ובמודל אקספוננציאלי מתקיים הקשר $P(\text{Abandon} | \text{Wait} > 0) = \theta \cdot E(\text{Wait} | \text{Wait} > 0)$, עבור גרף בו קיים קשר ליניארי העובר בראשית הצירים נבחר את המודל האקספוננציאלי הסטנדרטי (הגרף "כמעט" עובר דרך הראשית).

2.1.3 לקוחות NW

(1 נקודה)

תשובה:

מאחר וישנה נקודת חיתוך עם ציר Y בערך ב- $P(\text{Abandon} | \text{Wait} > 0) \approx 0.12$, המודל המתאים יהיה מודל אקספוננציאלי עם נטישות מיידיות, בו ישנה הסתברות חיובית לנטוש ללא זמן המתנה משמעותי ולאחר מכן אנו מקבלים קו ישר, כלומר לקוחות אשר החליטו לא לנטוש ישר הם בעלי סבלנות אקספוננציאלית.

PS 2.1.4 לקוחות

(1 נקודה)

תשובה:

מאחר והחיתוך עם ציר ה- X הינו בערך ב- $E(\text{Wait} | \text{Wait} > 0) \approx 21\text{sec}$, אנו נבחר את מודל שתי הפאזות כאשר X הינו מ"מ דטרמיניסטי השווה ל 21 שניות ולאחר מכן אנו עוברים לפאזה השנייה Y אשר יוצרת קו ישר ולכן מתאימה להתפלגות אקספוננציאלית.

IN 2.1.5 לקוחות

(1 נקודה)

תשובה:

מאחר ואנו מקבלים קו ישר בעל שיפוע קטן מאוד אנו למדים כי ההסתברות לנטישה של לקוחות אלו כמעט ולא תלויה בזמן ההמתנה שלהם ולכן המודל המתאים ביותר יהיה המודל האדפטיבי.

חלק זה של העמוד נשאר ריק

חלק 2 – ניתוח נתוני דוח ACD

להלן טבלה המסכמת חלק מנתוני דוח ACD ממוקד שרות איטלקי.

	ASA	Avg Aban Time	ACD Calls	Aban Calls	Avail Time	Staffed Time
Totals	29.99	126.24	6719	929	63:27:00	1088:50:00
8:00	475.00	0.00	1	0	5:25:00	13:32:00
8:30	8.73	15.55	113	11	3:06:00	23:48:00
9:00	4.86	0.00	239	0	7:39:00	41:51:00
9:30	17.08	16.46	391	39	1:05:00	44:48:00
10:00	25.03	10.71	432	28	1:21:00	53:06:00
10:30	1.16	0.00	392	0	5:12:00	54:34:00
11:00	0.15	4.50	357	2	6:48:00	53:56:00
11:30	0.00	0.00	350	0	9:12:00	60:02:00
12:00	5.59	13.17	334	12	3:00:00	58:29:00
12:30	11.90	9.84	337	19	1:05:00	58:47:00
13:00	7.40	9.40	298	15	1:57:00	33:35:00
13:30	11.43	13.09	289	23	1:27:00	33:15:00
14:00	6.35	15.09	323	22	1:27:00	55:13:00
14:30	6.40	13.10	345	21	1:51:00	57:48:00
15:00	22.76	18.05	432	22	1:28:00	58:17:00
15:30	2.41	4.57	574	7	2:35:00	57:55:00
16:00	1.08	5.00	533	1	4:38:00	58:06:00
16:30	50.28	36.57	406	121	1:00:00	59:17:00
17:00	163.99	50.97	431	317	0:00:00	53:53:00
17:30	426.70	214.25	128	216	0:00:00	31:37:00
18:00	584.69	737.27	13	49	0:00:00	26:08:00

להלן פירוט השדות בדוח:

- ASA – Average Speed of Answer (sec)
זמן המתנה ממוצע בתור של לקוחות שקיבלו שירות.
- Avg Aban Time – Average Abandon Time (sec)
זמן המתנה ממוצע בתור של לקוחות שקיבלו שירות.
- ACD Calls
מספר הלקוחות שקיבלו שירות
- Aban Calls
מספר הלקוחות שנטשו.
- Avail Time – Available Time
סך כל זמן הבטלה של השרתים.
- Staffed Time

סך כל זמן ה- Log in של השרתים (זמן בין התחברות לעמדת העבודה ועד יציאה מעמדת העבודה). בזמן זה השרת יכול לענות לשיחות, לטפל בניירת, לבצע פעילויות אחרות או להיות בטל).

2.2.1. תארו כיצד יש לחשב את סך ההגעות, אחוז הנוטשים ותוחלת זמן ההמתנה באינטרוול של חצי שעה.

(1.5 נקודות)

תשובה :

$$\text{Average waiting time} = \frac{\text{Avg Speed Ans} \times \text{ACD Calls} + \text{Avg Aban Time} \times \text{Aban Calls}}{\text{Number of arrivals}},$$

where

$$\text{Number of arrivals} = \text{ACD Calls} + \text{Aban Calls}.$$

$$\text{Fraction of abandoning customers} = \frac{\text{Aban Calls}}{\text{Number of arrivals}}.$$

2.2.2. תארו בפירוט כיצד תאמדו את ממוצע זמן הסבלנות בכל אינטרוול? כיצד תחשבו את ממוצע זמן הסבלנות היומי?

(1.5 נקודות)

תשובה :

ממוצע הסבלנות בכל אינטרוול i הינו :

$$E[\tau_i] = \frac{1}{\theta_i} = \frac{\text{Total waiting time}_i}{\# \text{abandon}_i} = \frac{\text{Average waiting time}_i}{P\{Ab\}_i}$$

$$= \frac{\text{Average waiting time}_i \cdot \text{Number of arrivals}_i}{\text{Aban Calls}_i}$$

ממוצע הסבלנות היומי הינו ממוצע של הסבלנות הממוצעת בכל אינטרוול :

$$E[\tau] = \frac{1}{\theta} = \frac{\text{Total waiting time}}{\# \text{abandon}} = \frac{\sum_i \text{Number of arrivals}_i \times \text{Average waiting time}_i}{\sum_i \text{Number of arrivals}_i \times \% \text{Abandon}_i}$$

כאשר האינדקס i מתייחס לחצי השעה המתאימה מתחילת יום העבודה.

2.2.3. תארו כיצד ניתן לחשב את משך השירות הממוצע ואת האיוש הממוצע בכל אינטרוול באמצעות נתוני הדו"ח.

(2 נקודות)

תשובה:

נחשב את משך השירות הממוצע ע"י הנוסחה הבאה:

$$Average\ service\ time = \frac{Staffed\ Time - Avail\ Time}{ACD\ Calls}$$

האיוש בכל אינטרוול יחושב באופן הבא:

$$Staffing = \frac{Staffed\ Time\ (in\ hours)}{1 / 2\ hour}$$

חלק זה של העמוד נשאר ריק

להלן כתבה שהתפרסמה בעיתון "TheMarker" ביוני 2013. שימו לב, אין צורך לקרוא את הכתבה בעיון, הפרטים הרלוונטיים יופיעו בשאלות עצמן.

חשיפת TheMarker // תמריץ כספי לחברה פרטית כדי שתימנע מהפניית חיילים לחדר מיון

ההסכם עם החברה שהחליפה את קצין העיר נחשף ■ גורם בצה"ל: "יש מענה טוב למקרים דחופים, ולא קרה שחייל לא הופנה למיון אף שהיה זקוק לכך" ■ בצבא עורכים לביקורופא ביקורות פתע, מטילים קנסות על אי-עמידה בדרישות ומקפידים על כללי שירות נוקשים

14:01 | 27.06.2013 | מאת: רוני לינדר-גנץ

הסכם ההתקשרות בין חברת ביקורופא למשרד הביטחון וצה"ל נחשף, בעקבות בקשת מידע שהגישה התנועה לחופש המידע לבקשת TheMarker. לפני כמה שנים סגר צה"ל בהדרגה את מרפאות קצין העיר והעביר את השירות לידיה של החברה הפרטית ביקורופא. רופאים אזרחיים הם אלה שנדרשים כיום להכריע מי מהחיילים יקבל גימ"ל (ימי חופשה) או בי"ת (מנוחה בבסיס), מי יופנה לחדר מיון ומי יחזור ליחידה. במקביל מתנהל כיום פיילוט שבו עשרות אלפי חיילים מטופלים בקופות החולים.

בניגוד לאגדה האורבנית, בהסכם אין תמריץ לרופאים להימנע ממתן גימ"לים לחיילים, אך הוא כולל תמריץ שלא להפנות את החיילים לחדר המיון בבית חולים. כך למשל, ביקורופא מתחייבת לשיעור מסוים (במסמך שהגיע לידינו המספר מושחר) של הפניות למיון מתוך ביקורי החיילים במרפאה בשנה, ובנוסף מופיע תמריץ מיוחד לאי-הפניה למיון. אם תחרוג החברה משיעור ההפניות שנקבע היא תשלם קנס (הסכום מושחר) על כל הפניה נוספת. מנגד, אם שיעור ההפניות למיון יפחת מהשיעור שנקבע, ישלם משרד הביטחון לביקורופא סכום (מושחר) כפול ההפרש בין מספר ההפניות שנקבע לבין ההפניות בפועל. כלומר, ביקורופא מרוויחה יותר ככל שפוחת שיעור ההפניות למיון.

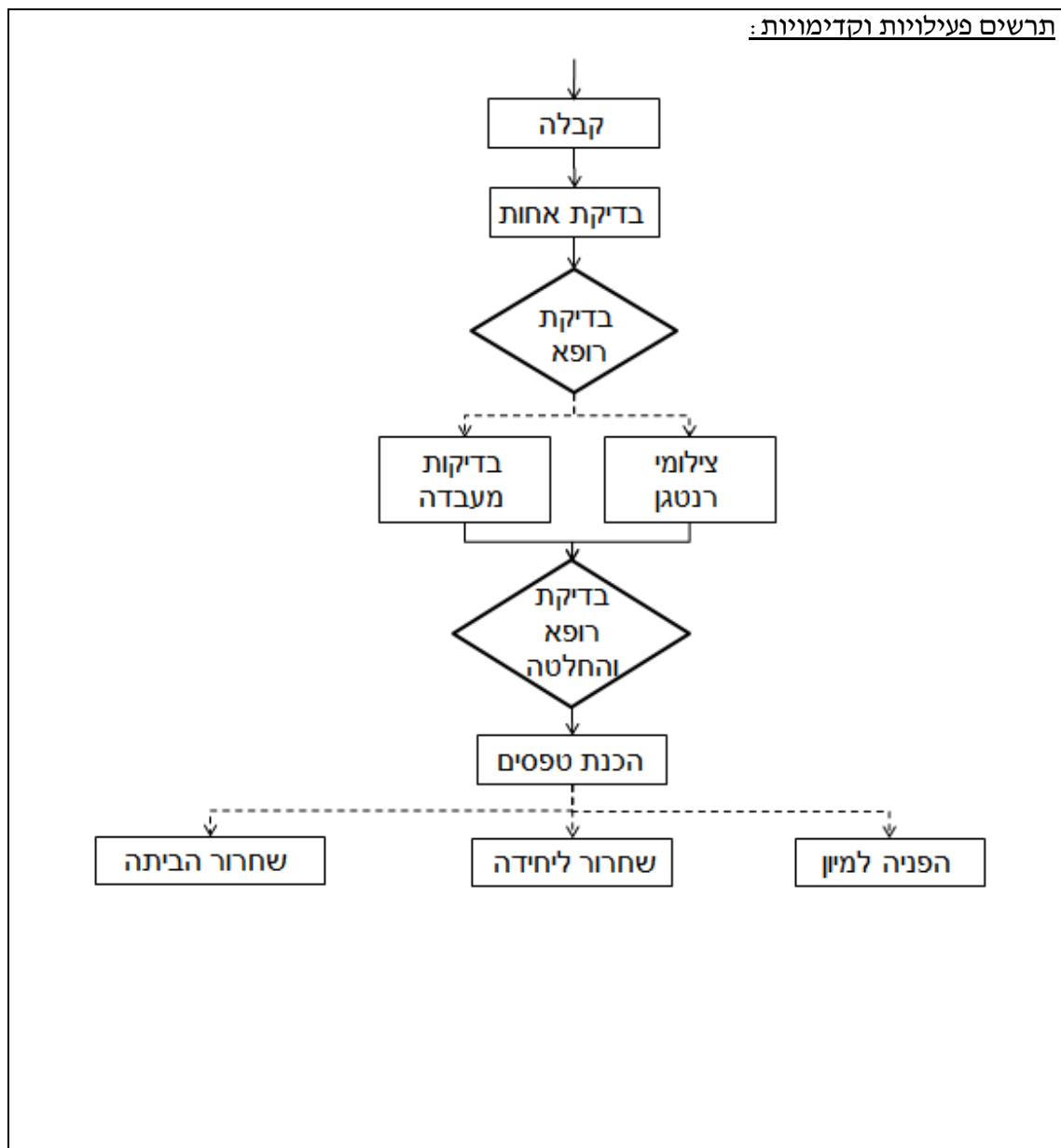
מלבד מפרט רפואי מלא של המרפאות, יש בהסכם התחייבות לעמידה בלוח זמנים קשיח ביותר בטיפול בחיילים: עד 15 דקות המתנה לבדיקה ראשונית במרפאה, עד שעה וחצי לבדיקת רופא, עד שעה המתנה לצילום רנטגן ופיתוחו ועד שעה לקבלת תוצאות בדיקת מעבדה מרגע לקיחת הדגימה.



3.1. על פי הכתבה, חברת "ביקורופא" מפעילה מרפאות ברחבי הארץ. כחלק מהסכם ההתקשרות בין החברה לבין משרד הביטחון חיילים המגיעים למרפאות עוברים בדיקה ראשונית ע"י אחות ולאחריה מופנים לבדיקת רופא. הרופא קובע האם נדרשות בדיקות נוספות כגון בדיקות מעבדה (דם ושתן) או צילומי רנטגן. לצורך פשטות נניח כי כל החיילים מופנים לבדיקות נוספות - בדיקות מעבדה ו/או צילומי רנטגן. הבדיקות הנ"ל מתבצעות גם הן במרפאה ולאחר קבלת התוצאות החייל מגיע שוב אל הרופא שמחליט האם לשחרר את החייל לביתו עם ימי מחלה (גימ"לים), לשלוח אותו חזרה ליחידתו או להפנותו למיון. לפני תחילת התהליך החייל יעבור בקבלה על מנת לעדכן את פרטיו במערכת. לפני השחרור או המעבר למיון על החייל להמתין לקבלת טפסים מתאימים מפקיד/ת הקבלה. החייל אינו צריך להמתין שוב בתור לקבלה, הבקשה להכנת הטפסים מועברת אוטומטית מהרופא, וברגע שהם מוכנים החייל נקרא לקבלה, אוסף את טפסיו ויוצא.

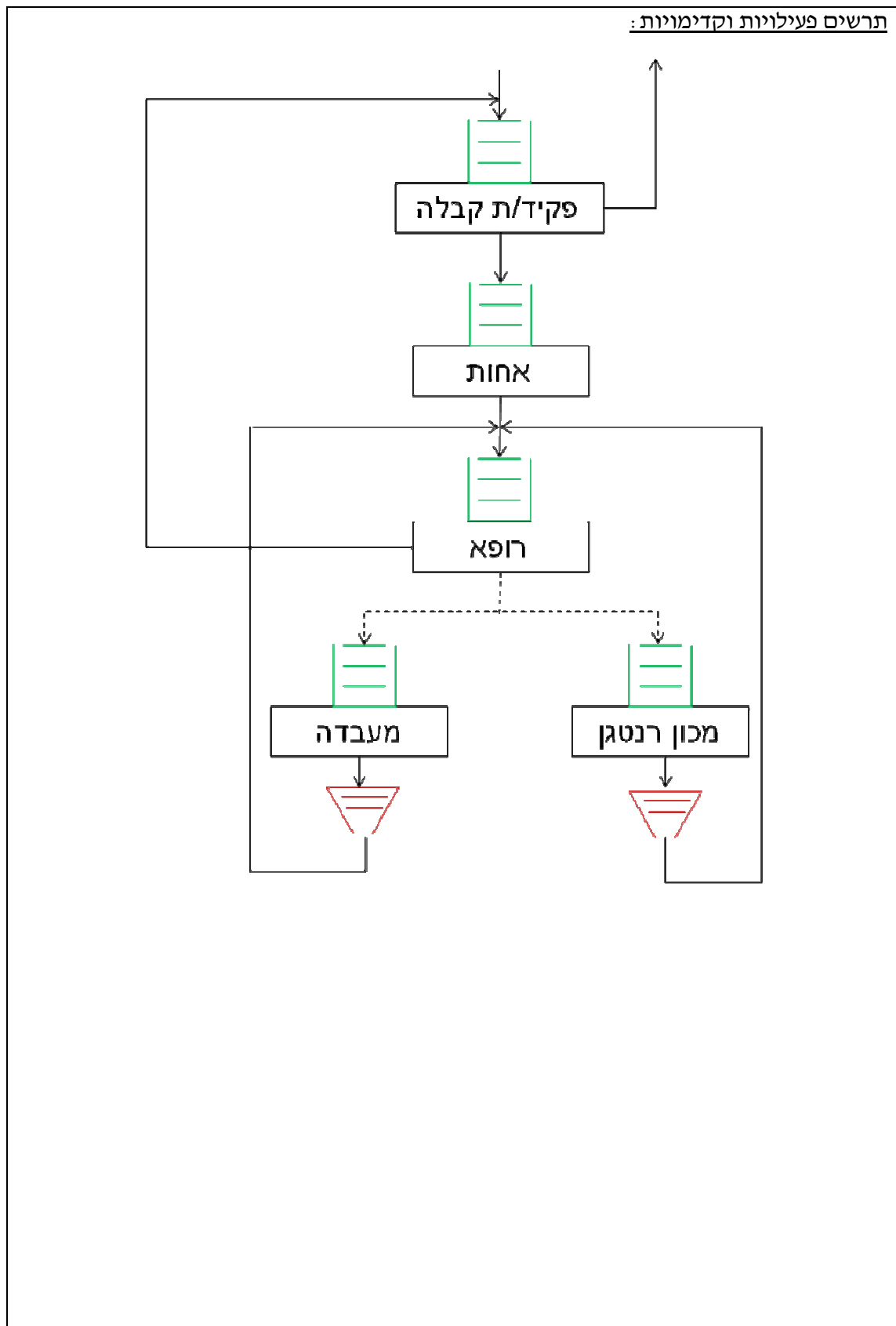
שרטטו תרשים פעילויות וקדימויות של התהליך – **Activities Flow Chart**.

(3 נקודות)



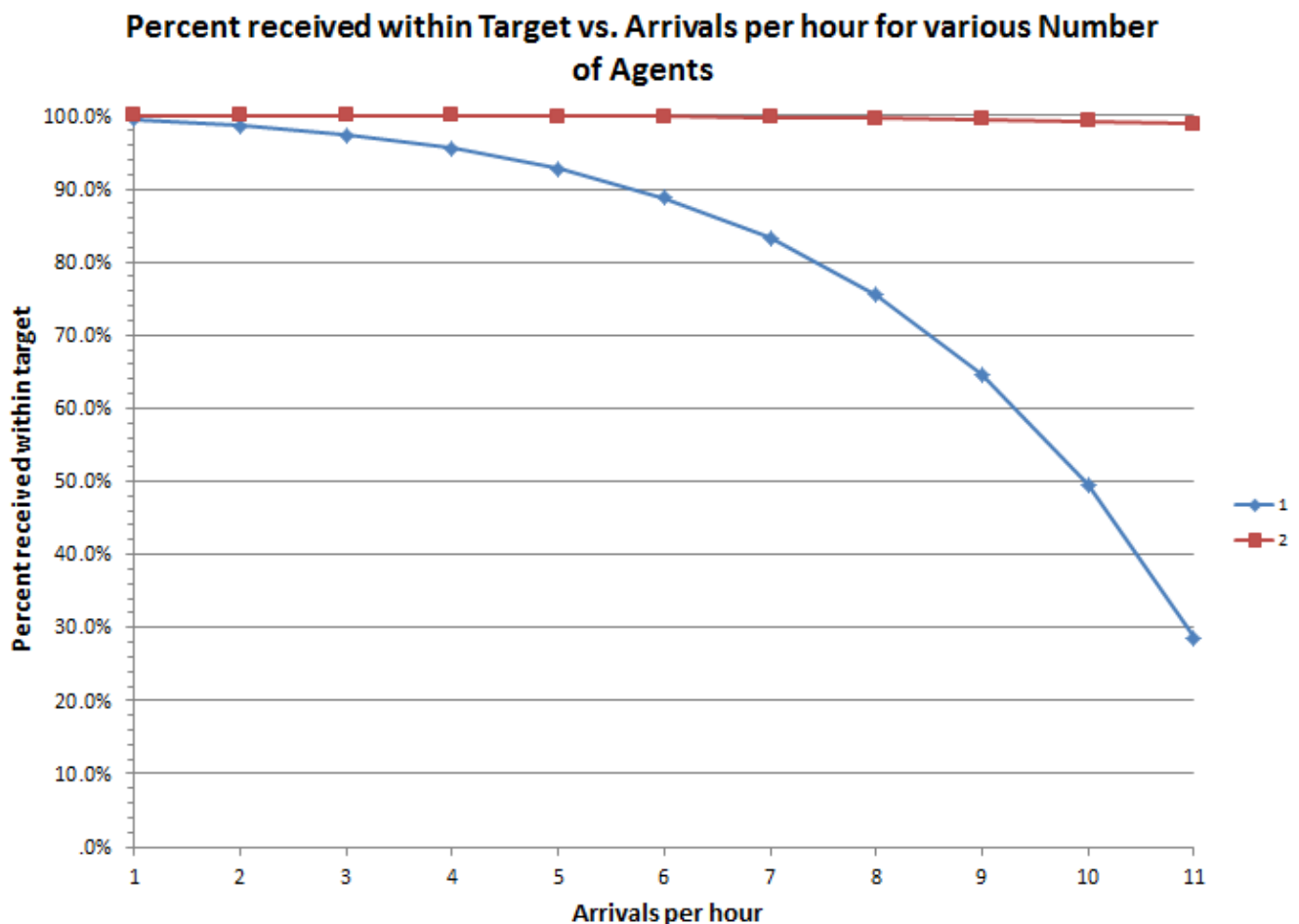
3.2. שרטטו תרשים רשת משאבים של התהליך – Resource Flow Chart.

(3 נקודות)



3.3. נניח כי בכל מרפאה יש אחות אחת בלבד וכי זמן הבדיקה הינו משתנה מקרי אקספוננציאלי עם תוחלת של 5 דקות. כמו כן נניח כי תהליך ההגעה של חיילים למרפאות הינו תהליך פואסון וכי קצב הגעת החיילים למרפאה במרכז הארץ הינו 8 חיילים בשעה. על פי ההסכם, זמן ההמתנה של חייל לבדיקה ראשונית לא יעלה על 15 דקות. גרף מספר 1 מתאר את קצב הגעת החיילים למרפאה אל מול אחוז החיילים המקבלים שירות תוך זמן קצר מ-15 דקות, עבור איוש של אחות אחת במרפאה ועבור איוש של שתי אחיות. נניח כי כל דקת המתנה של חייל עולה ל"ביקורופא", על פי ההסכם, חצי שקל ועל כל חייל שממתין מעבר לזמן המטרה עליהם לשלם קנס של 20 ₪ נוספים. כמו כן, נניח כי עלות מעביד של אחות ב"ביקורופא" הינה 60 ₪. האם תמליצו להעסיק אחות נוספת במרפאה זו? **ניתן להיעזר בנוסחאות בעמוד 28.** (3 נקודות)

גרף 1



תשובה :

נחשב את משך ההמתנה הממוצע :

$$P(W > 0) = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{12} = 0.667$$

$$E(W) = E(W|W > 0) \cdot P(W > 0) = \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right) \cdot \rho$$
$$= \frac{0.667}{12 \cdot (1-0.667)} = 0.1667 \text{ hour} = 10 \text{ min}$$

לפיכך עלות ההמתנה הינה $10 \cdot 8 \cdot 0.5 = 40$ ₪ לשעה. לעלות זו יש להוסיף את העלות בגין המתנה מעבר ל-15 דקות. ע"פ גרף 1 ניתן לראות כי כאשר קצב ההגעה הינו 8 חיילים בשעה אחוז החיילים שאינם מקבלים שירות תוך 15 דקות הינו 0.25% כלומר, 2 חיילים בשעה ולפיכך אל עלות ההמתנה נוספת עלות של 40 ₪ בשעה עקב אי עמידה בזמן המטרה, סה"כ עלות של 80 ₪ בשעה.

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{8}{2 \cdot 12} = 0.333 \text{ כי נקבל כי}$$

ניתן לראות מגרף אחד כי כאשר יש שתי אחיות כולם נענים תוך 15 דקות ולכן נותר רק לחשב את עלות ההמתנה במקרה זה.

$$\text{מכיוון ש- } E_{2,n} \leq \rho \text{ נקבל } E(W) \leq \frac{0.333}{2 \cdot 12 \cdot (1-0.333)} = 0.02 \text{ hour} = 1.25 \text{ min}$$

כלומר, עלות ההמתנה במקרה זה קטנה מ- $1.25 \cdot 8 \cdot 0.5 = 5$ ₪. עלות העסקת אחות נוספת הינה 60 ₪ לשעה ולפיכך כדאי להעסיק אחות נוספת כי אז העלות הכוללת תהיה לכל היותר 125 ₪ לשעה לעומת 140 ₪ לשעה באיוש של אחות אחת.

3.4. בחוזה בין משרד הביטחון ל"ביקורופא" נקבע גם משך ההמתנה לרופא לא יעלה על 90 דקות. על מנת לעמוד ביעד זה החליטה החברה לנהוג במדיניות הבאה : האחות תסווג את החיילים לשני סוגים – דחופים ולא דחופים. מקרים דחופים יישלחו למיון מיידי, מקרים שאינם דחופים ימתנו לרופא. חיילים שממתינים לרופא שעה וחצי ישלחו לבתיהם ויקבלו תור לרופא, בשעה מוגדרת בשעות הערב, לאחר שעות הפעילות ה"רגילות" של המרפאה. דני, מהנדס תעשייה וניהול ב"ביקורופא" מציע להשתמש בפונקציית ה – Overflow של תוכנת ה – 4CC על מנת למצוא את אחוז החיילים שחיכו לרופא יותר משעה וחצי. נציג את המאפיין Overflow אשר מופיע בתוכנת ה 4CC :

- בחירה ב "Overflows" היא עבור מערכת בה לקוחות הממתינים זמן מסוים (90 דקות במקרה זה) מפונים מהמערכת למערכת אחרת (במקרה זה שעות הערב בהן הם מגיעים בזמנים קבועים מראש).
 - קלט : Overflow Time Limit : כאן נקבע הזמן אשר לקוחות הממתינים יותר ממנו יופנו למערכת האחרת.
 - פלט : %Overflow מציין את אחוז הלקוחות אשר עברו את הזמן המדובר (90 דקות) והופנו למערכת האחרת.
- דני טוען כי שיטתו תתאר טוב יותר את המתרחש במציאות מאשר קביעת ה – Target time כ – 90 דקות ושימוש בתוצאה של Answered within target %. (אנו מניחים כי חולים אינם נוטים את המרפאה בהמתינם לרופא). האם אתם מסכימים איתו? מדוע? האם אתם מצפים כי במדיניות החדשה אחוז החיילים הממתינים לרופא פחות מ-90 דקות יהיה גבוה יותר? זהה? נמוך יותר? מה לגבי זמן ההמתנה הממוצע?
- (3 נקודות)**

תשובה :

דני צודק מאחר ואותם חיילים אשר קיבלו זימון לשעות הערב יוצאים מהמערכת ומפנים מקום לחיילים שיופיעו אח"כ (בדומה לנטישה אחרי 90 דקות). תופעה זו מתרחשת במודל עם ה – Overflows ולא במודל עם ה – Target time שם נשארים להמתין גם יותר מ – 90 דקות. מסיבה זו אנו גם מצפים כי אחוז החיילים הממתינים לרופא פחות מ-90 דקות יהיה גבוה יותר במדיניות החדשה וזמן ההמתנה הממוצע יהיה נמוך יותר.

3.5. במודל של דני מניחים כי החייל מקבל תור חדש לשעות הערב לאחר שהמתין 90 דקות ואז עוזב את המערכת. זהו כמובן מצב לא רצוי (שירות לא טוב) ודני מצביע על כך בפני הנהלת החברה. הציעו שני פתרונות לשינוי מצב זה (ללא הוספת רופאים נוספים). תנו תשובה אחת אותה ניתן לנתח בעזרת ה- 4CC ותשובה אחת חופשית. לגבי התשובה הניתנת לניתוח באמצעות ה- 4CC הסבירו האם וכיצד ישתנה ממוצע זמן ההמתנה ואחוז החיילים המקבלים שירות תוך 90 דקות (לעומת המדיניות שהוצגה בסעיף הקודם).

(3 נקודות)

תשובה:

תשובה אותה ניתן לנתח בעזרת 4CC:

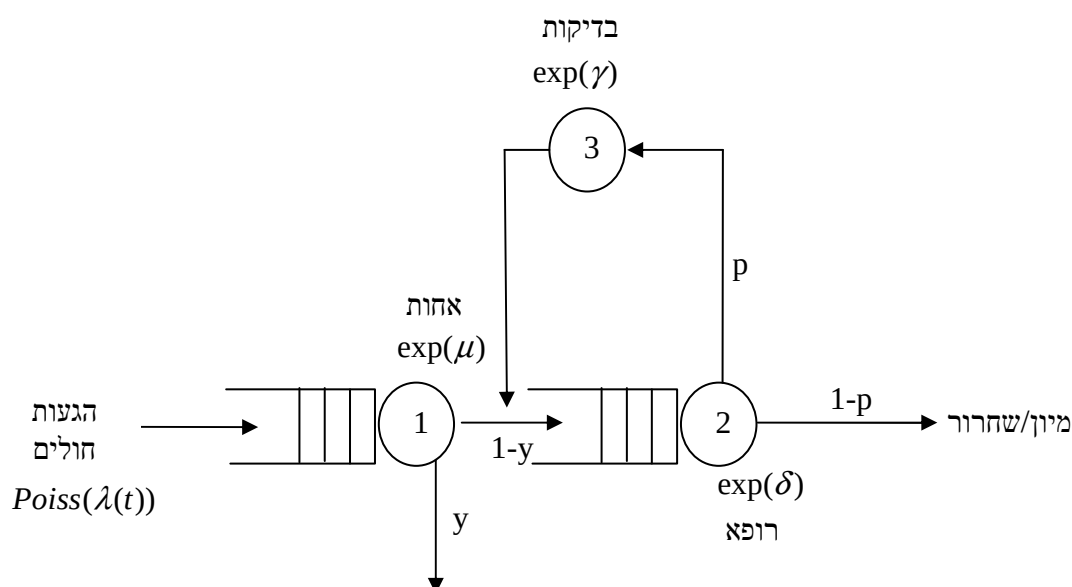
המוקד יכול לחזות בעת כניסת החייל לתור של הרופא (לפי מספר החיילים בתור לרופא) מהו זמן ההמתנה הצפוי (נניח שהאמד מדויק). במידה וזמן זה יעלה על 90 דקות, ישלח החייל מיידית (מיד בזמן הגעתו) לביתו ויקבל תור לשעות הערב. במילים אחרות מודל ה- Overflow מכסה גם את המקרה שבו החיילים שעוזבים את המערכת עוזבים בתחילת ההמתנה ולא לאחר 90 דקות. בפרט זמן ההמתנה הממוצע ואחוז החיילים המקבלים שירות תוך פחות מ-90 דקות אינם משתנים.

תשובה חופשית:

לאחר 90 דקות של המתנה לרופא יוצגו בפני החייל שתי אפשרויות:

1. לעזוב ולחזור במועד מוגדר בערב.
 2. להישאר ולהמשיך להמתין בתור עד לקבלת שירות.
- כאן נדרש לבנות מודל חדש מעבר לתוכנת ה- 4CC, כיוון שצריך לתאר את תהליך "בחירת" החיילים באחת משתי האופציות.

ניתן לתאר (בקירוב שימושי) את התהליך המתואר בסעיפים הקודמים בעזרת רשת התורים הבאה :



תחנה 1 מתארת את הביקור אצל האחות. התור לפני התחנה הוא התור לביקור אצל האחות. נניח כי זמן הביקור אצל אחות מתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר μ . לאחר כל ביקור אצל האחות היא מחליטה האם מצבו של החייל דחוף או לא, אם מצבו דחוף היא שולחת אותו למיון מיד. אחוז החיילים המופנים למיון בכל ביקור אצל האחות הוא $100 \cdot y$.

תחנה 2 מתארת את הביקור אצל הרופא. התור לפני התחנה הוא התור לביקור אצל הרופא. נניח כי זמן הביקור אצל רופא מתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר δ .

תחנה 3 מתארת את תהליך הבדיקות שהחולה צריך לעבור. אנו לא נמדל במפורט תהליך זה, אלא רק את העיכוב הכללי שנוצר כתוצאה מבדיקות אלו. לכן נניח כי בתחנה 3 אינסוף שרתים, וזמן הבדיקות מתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר γ .

בזמן כל ביקור אצל הרופא, מחליט הרופא אם יש צורך בבדיקות נוספות או לא. אחוז החיילים שעבורם נדרשות בדיקות נוספות הוא $100 \cdot p$ (לכן, מספר הביקורים הכולל אצל הרופא מתפלג גיאומטרית עם פרמטר "הצלחה" $(1-p)$).

עד כה תארנו את המודל באופן פרמטרי, מדידות במרפאה מראות שערכי הפרמטרים הם כדלקמן: נמצא כי בממוצע חייל שמצבו אינו דחוף עובר 3 ביקורים אצל הרופא לפני החלטה על שחרור/העברה למיון. עוד נמצא כי ביקור בודד של חייל אצל רופא מתפלג אקספוננציאלית עם ממוצע של 15 דקות. כאמור, זמן ביקור אצל אחות מתפלג אקספוננציאלית עם ממוצע של 5 דקות, וזמן הבדיקות מתפלג אקספוננציאלית עם ממוצע של 40 דקות.

3.6. ניתן לתאר את התפלגות זמן הטיפול הכולל בחולה קל בחדר המרפאה בעזרת התפלגות Phase-type (זמן טיפול כולל טיפול אחות, רופא, ובדיקות ללא המתנות)? כתבו את הפרמטרים של התפלגות זו.

ניתן להיעזר בנוסחאות בעמוד 29.

(3 נקודות)

תשובה:

זמן הטיפול הכולל מתפלג Phase-type, עם פאזות מעריכיות במבנה התואם את הרשת הנ"ל.

$$q = [1 \ 0 \ 0], \quad m = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & \frac{1}{\delta} & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} = [5, 15, 40] \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1-y & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.7. מהו ממוצע משך הטיפול הכולל בחייל שמצבו אינו דחוף?

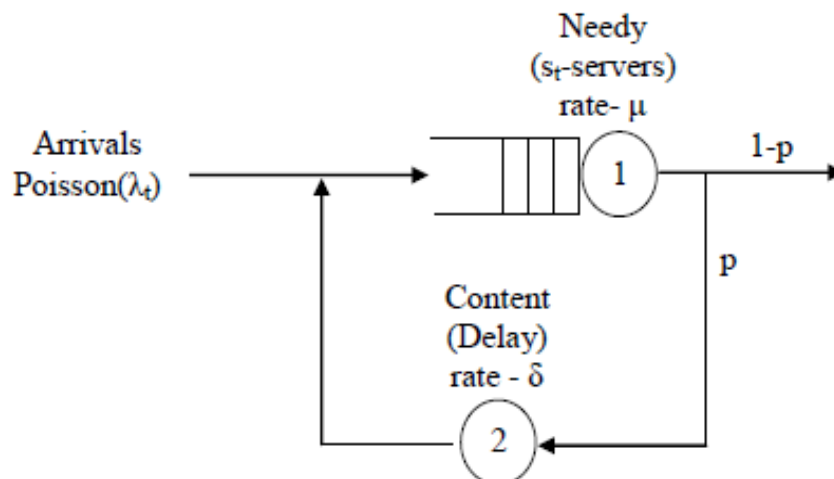
(2 נקודות)

תשובה:

$$5 + 15 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 130 \text{ min} = 2.167 \text{ hour} \quad \text{ממוצע זמן הטיפול הוא:}$$

שאלה 4 – תאוריה (10 נקודות)

בהרצאה תואר מודל Erlang R עם המבנה הבא :



4.1. תנו דוגמה לשני מצבים הניתנים לתיאור באמצעות מודל זה.

(2 נקודות)

תשובה :

דוגמה ראשונה :

חולים המגיעים לחדר מיון נבדקים ע"י רופא. לצורך מתן דיאגנוזה רפואית והחלטה על המשך הטיפול נדרשות לפעמים מספר בדיקות (כגון בדיקות דם, דימות וכו'). התרשים לעיל מתאר את התהליך באופן הבא : חולים מגיעים לחדר המיון (נניח על פי תהליך פואסון) וממתינים בתור עד שאחד הרופאים בחדר המיון יקבל אותם (בתרשים מתואר כתחנה מספר 1, שלב ה - Needy). נניח כי בדיקת הרופא הינה בעלת משך אקספוננציאלי. לאחר בדיקת הרופא p אחוז מהם נשלחים לבצע בדיקות נוספות (בתרשים מתואר כתחנה מספר 2, שלב ה - Content) שבסופן עליהם לשוב אל הרופא וחוזר חלילה. אנו מניחים כי יש מספר מוגבל של רופאים אך אין אילוצי קיבולת על שלב ה - Content, כלומר המשאבים בשלב השני אינם מוגבלים. $1-p$ אחוז מהחולים אינם נדרשים לבצע בדיקות נוספות ועוזבים את המערכת.

דוגמה שנייה :

תהליך בדיקות תוכנה. בודקי התוכנה הינם השרתים. תוכנות לבדיקה מגיעות לקבוצת הבודקים (שלב ה - Needy), לאחר הבדיקה אחוז מסוים מהן יעברו את התהליך בהצלחה וישוחררו והשאר יוחזרו לתיקונים (שלב ה - Content) שלאחריהם שוב ייכנסו לבדיקה אצל בודקי התוכנה וחוזר חלילה.

4.2. בהרצאה תוארה דרך לחשב את ה – Offered Load באמצעות משוואות זרימה. כתבו את משוואות הזרימה המתאימות למודל זה.

(2 נקודות)

תשובה:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_1(t) &= \lambda_t + \delta R_2(t) - \mu R_1(t), \\ \frac{d}{dt}R_2(t) &= p\mu R_1(t) - \delta R_2(t).\end{aligned}$$

4.3. כתבו ביטוי נוסף ל- $R(t)$.

(2 נקודות)

תשובה:

$$R_i(t) = E[\lambda_i^+(t - S_{i,e})]E[S_i]$$

where,

$$\begin{aligned}\lambda_1^+(t) &= \lambda(t) + E[\lambda_2^+(t - S_2)] \\ \lambda_2^+(t) &= pE[\lambda_1^+(t - S_1)]\end{aligned}$$

4.4. נניח שקצב הכניסה למערכת משתנה לאורך היממה. בנוסף, נניח שאנו רוצים לייצב את רמת השירות במערכת לאורך היום, כך שלקוחות שמגיעים בשעות שונות ימתינו בהסתברות זהה. הצע כלל איוש המשיג מטרה זו.

(2 נקודות)

תשובה:

למדנו בהרצאה שכדי לייצב את הסתברות ההמתנה במהלך היום כך שתהיה עם ערך קבוע α לאורך כל היום יש להשתמש בנוסחה: $n(t) = R(t) + \beta\sqrt{R(t)}$, כאשר הקשר בין β ל- α נקבע באמצעות פונקציית Halfin Whitt. כאשר $R(t)$ מחושב לפי הנוסחאות מסעיף 4.3.

4.5 גלית מציעה להשתמש בכלל השורש "הרגיל" של מודל Erlang-C. כלומר, במקום לחשב את ה-offered-load של Erlang-R (על סמך הנוסחאות בסעיף 4.2 או 4.3), היא תחשב את ה-

offered-load על סמך הנוסחה $R(t) = E\left(\int_{t-s}^t \lambda(u) du\right)$, אך זמן השירות S יהיה סכום של זמן

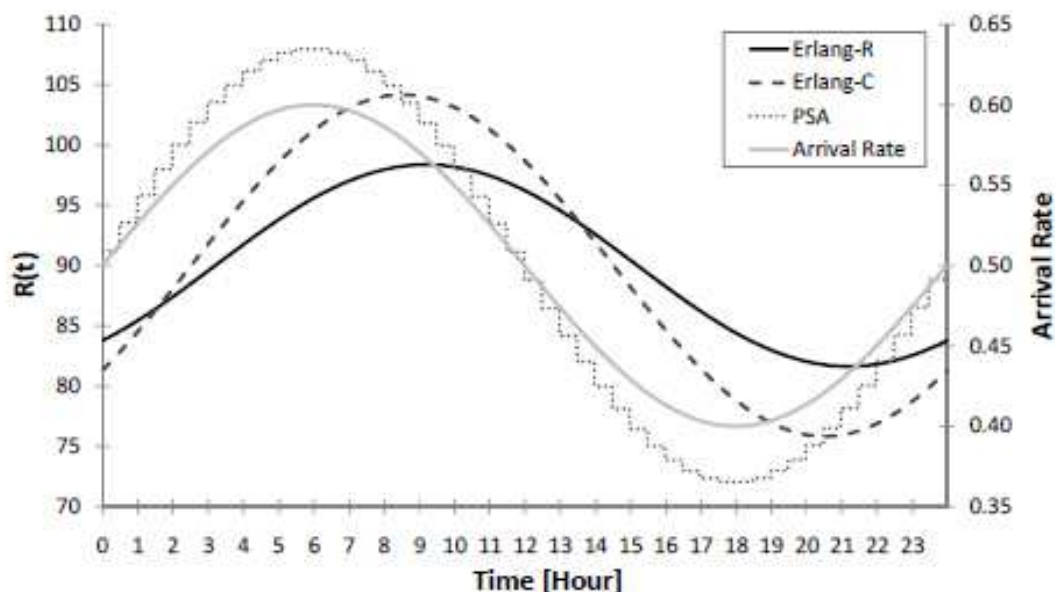
השירות Needy. בהתבסס על העובדה שסכום גיאומטרי של משתנים מקריים אקספוננציאלי מתפלג גם הוא אקספוננציאלי, S יהיה מ"מ אקספוננציאלי עם קצב $\mu_c = (1-p)\mu$.

גרף 2 מדגים את פונקצית ה-offered-load המחושבת לפי שתי השיטות (המדויקת על פי Erlang-R והמקורבת על פי Erlang-C). גרף 3 מציג את רמת השירות המתקבלת במערכת כתוצאה משימוש בכל אחת מהן.

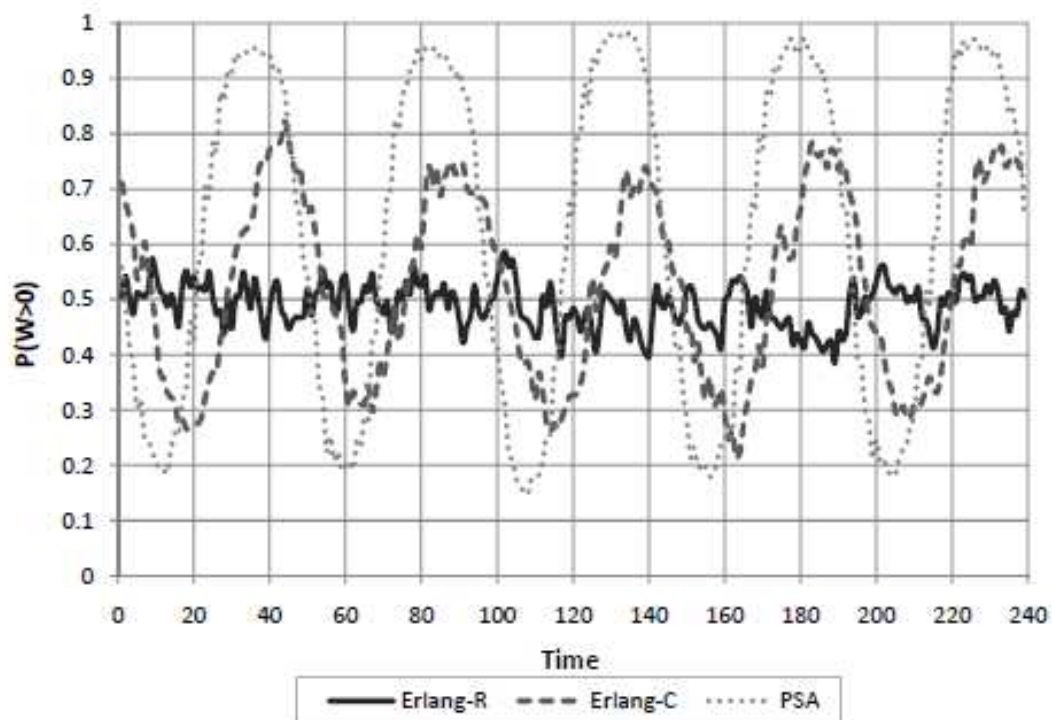
הסבירו מדוע רמת השירות בשימוש ב-Erlang-C, אינה מייצבת את המערכת? בתשובתכם התייחסו לקשר בין שני הגרפים.

(2 נקודות)

גרף 2



גרף 3



תשובה:

על פי הגרף הימני, Erlang C ייתן בחלק מהיום הערכת יתר ל- $R(t)$, מה שיגרום ל- $n(t)$ להיות גבוה יותר מהאיוש הדרוש בפועל על מנת להגיע להסתברות המתנה α ולכן הסתברות ההמתנה שנקבל בחלק זה של היום תהיה נמוכה מ- α . בחלק השני של היום Erlang C ייתן הערכת חסר ל- $R(t)$, מה שיגרום ל- $n(t)$ להיות נמוך יותר מהאיוש הדרוש בפועל על מנת להגיע להסתברות המתנה α ולכן הסתברות ההמתנה שנקבל בחלק זה של היום תהיה גבוהה מ- α . בסה"כ נקבל הסתברות המתנה שאינה יציבה במהלך היום אלא נעה בין ערכים נמוכים משמעותית מ- α וגבוהים משמעותית מ- α . כאשר משתמשים במודל Erlang R לקביעת $R(t)$ ההסתברות להמתנה הרבה יותר יציבה במהלך היום ונעה בתחום קטן מסביב ל- α .

M/M/1: Further Properties

- Delay probability (PASTA):

$$P\{W_q > 0\} = \rho.$$

- Waiting time in queue (given delay, it is exp):

$$\frac{W_q}{1/\mu} \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - \rho \\ \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{1-\rho}\right) & \text{wp } \rho \end{cases}$$

$$\text{Note: } E\left[\frac{W_q}{1/\mu}\right] = 0 \times (1 - \rho) + \frac{1}{1-\rho} \times \rho = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Number-in-system/queue:

$$E[L] = \frac{\rho}{1-\rho}; \quad E[L_q] = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

M/M/n Queue: Properties

Erlang-C Formula (1917) for the Delay probability:

$$P\{W_q > 0\} \triangleq E_{2,n} = \sum_{i \geq n} \pi_i = \frac{R^n}{n!} \frac{1}{1-\rho} \cdot \pi_0.$$

Erlang-C computation: via recursion, see Erlang-B below.

Erlang-C approximations: important later in course.

Number-in-queue:

$$P\{L_q = i\} = E_{2,n} \cdot (1 - \rho)\rho^i, \quad i > 0,$$

or

$$L_q = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Geom}_{\geq 0}(1 - \rho) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Waiting time distribution:

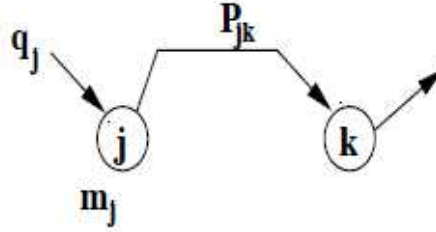
$$\frac{W_q}{1/\mu} = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Exp}\left(\text{mean} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Phase-Type Service Times (Durations).

Service-Time = a sequence/collection of tasks, of an *exponential* duration.
There are K types of tasks, indexed by $k = 1, \dots, K$.

m_k = expected duration of task k ; $\mathbf{m} = (m_k)$
 q_k = % of services in which k is first; $\mathbf{q} = (q_k)$
 P_{jk} = % of incidences in which task j is immediately followed by k . $\mathbf{P} = [P_{jk}]$

$1 - \sum_{\ell=1}^K P_{k\ell}$ = probability to end service at k .



Fact: service = *finite* number of tasks $\Leftrightarrow \exists [I - P]^{-1}$
 Indeed, $[I - P]_{jk}^{-1}$ = expected number of “visits to k ”, given j was first.
 $(q[I - P]^{-1})_k$ = expected number of “visits to k ”.

As will be articulated below, service-time duration is *Phase-type* (PH).
 (Assuming independence among task-durations.)

Definition. Phase-type distribution = absorption time of a finite-space continuous-time Markov chain, with a single absorbing state.

Formally: $X = \{X_t, t \geq 0\}$ Markov on states $\{1, 2, \dots, K, \Delta\}$, with infinitesimal generator

$$Q = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ K \\ \Delta \end{matrix} \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{R} & r \\ 0 & \dots 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} \bullet \Delta \text{ absorbing} & (\text{since } q_{\Delta\Delta} = 0) \\ \bullet r = -R1 & (\text{since } Q1 = 0) \\ \bullet 1, \dots, K \text{ transient} & \Leftrightarrow \exists R^{-1} \text{ (fact)} \end{array}$$

and initial distribution (of X_0) is given by $(q_1, \dots, q_K, 0) = (\mathbf{q}, 0)$.

Recall:

$$P\{X_t = k\} = \sum_j q_j [\exp(tR)]_{jk} = q[\exp(tR)]_k$$

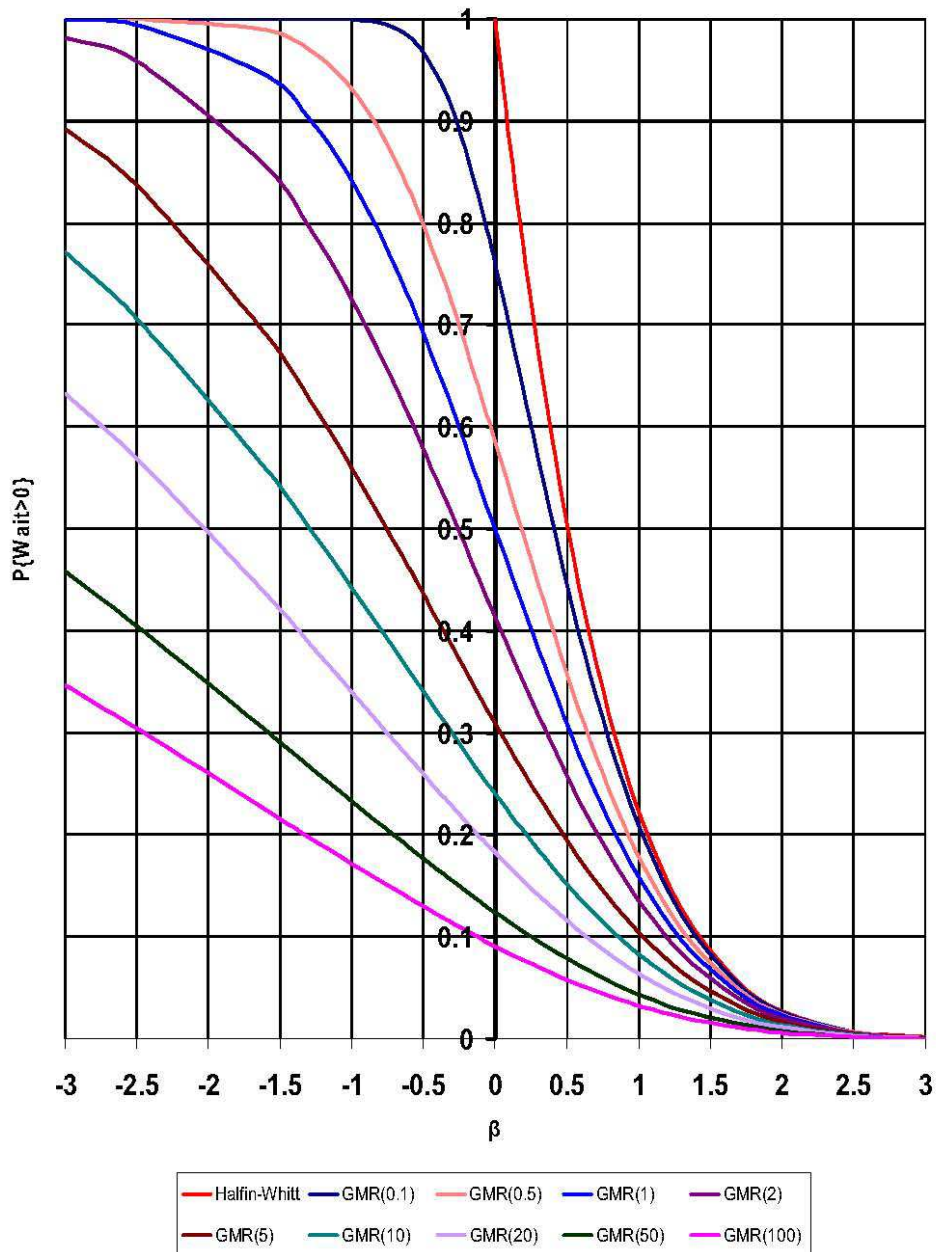
Define: $\mathbf{T} = \inf\{t > 0 : X_t = \Delta\}$ has phase-type distribution, say $F_T(\cdot)$.

Claim: $F_T(t) = 1 - qe^{tR}1, t \geq 0$.

Proof. $P(T > t) = P\{X_t \neq \Delta\} = \sum_k q(e^{tR})_k = qe^{tR}1$.

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .



GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\frac{\theta}{\mu} = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

Note: **Erlang-C** = limit of **Erlang-A**, as patience $\uparrow$ indefinitely.

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Gen. Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$N \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multi-nomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(m, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; m \geq 1$	$k = m, m+1, \dots$	$\left[\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t} \right]^m$	$\frac{m}{p}$	$\frac{mq}{p^2}$	Number of trials till m -th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$\exp\{-\lambda(1 - e^t)\}$	λ	λ	
Hyper-geometric	$X \sim HG(N, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N + M$	$\max(0, n - M) \leq k$ $k \leq \min(n, N)$	$\sum_k e^{tk} p(k)$	$\frac{n \cdot N}{N+M}$	$n \cdot \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N-M-n}{N+M-1}$	N – special elements M – ordinary ones n – sample size k – special in sample
		Density Function						
Beta	$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	Complicated	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ $= (x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp\left\{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\}$	μ	σ^2	