



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום

מתרגלת : גלית יום-טוב

תאריך הבחינה : 17.10.2010

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד ב' – סמסטר אביב תש"ע 2010

פתרון

- המבחן נמשך **שלוש** שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 29 עמודים, כולל עמוד זה, ועמוד נוסחאות בסופו.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

הרצאות/תרגולים/בחינות קודמות	10 מתוך	שאלה 1	ניקוד :
תרגילי בית	10 מתוך	שאלה 2	
יישום	20 מתוך	שאלה 3	
תיאוריה	10 מתוך	שאלה 4	

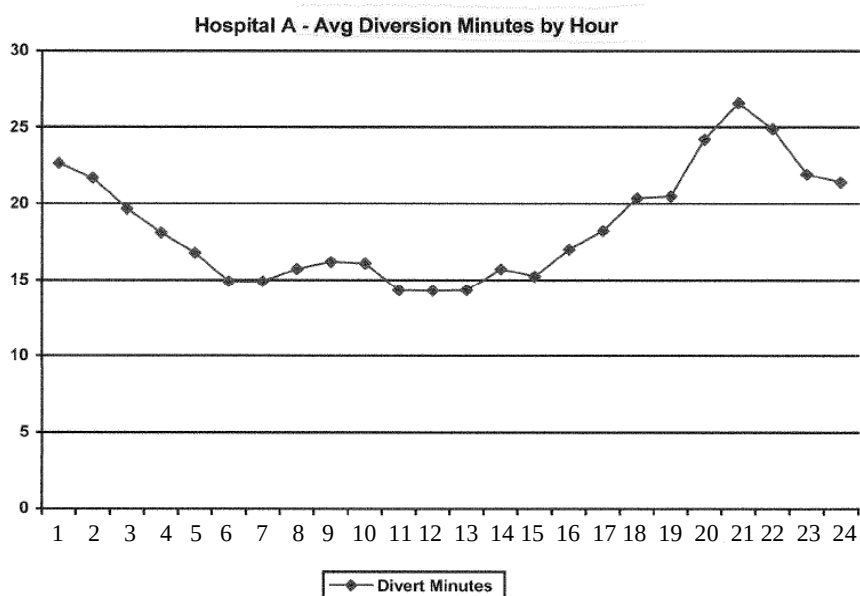
סה"כ _____ מתוך 50 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 - תרגילי כיתה/הרצאות/מבחנים קודמים

חלק 1. תחזיות ועומס מוצע

הגרף הבא מתאר את מדיניות ה-Ambulance Diversion (הסטת אמבולנסים) שנידונה בכיתה (ונפוצה בארה"ב). למשל, ערך הגרף בשעה 21:00 הוא אחוז הפעמים בתקופה הנמדדת שהשעה 20:00-21:00 הוכרזה כשעה שבה המיון חסום לכניסת חולים חדשים דרך אמבולנסים (במקרה שלנו 27%).



1.1.1 תנו דוגמאות לשתי סיבות היכולות לגרום לבית חולים להכריז על מדיניות מסוג זה. אחת הקשורה ישירות למיון ואחת שנובעת מחוץ למיון.

תשובה:

סיבות שנובעות מהמיון עצמו : חוסר במיטות במיון או חוסר בצוות רפואי שיטפל בחולים הגורמים לצפיפות יתר בחדר המיון.

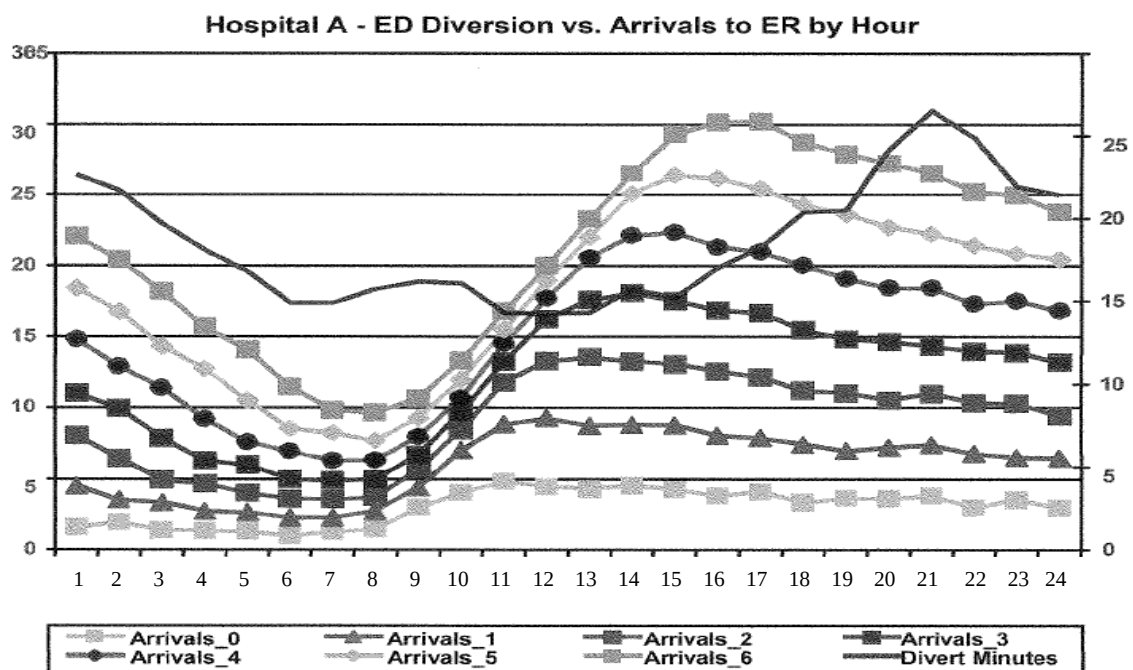
השפעות של כלל בית החולים על המיון : חוסר במיטות אשפוז פנויות במחלקות מרכזיות, כמו מחלקות פנימיות או טיפול נמרץ, מונע העברת חולים, ולכן חסימת המיון. בנוסף, חוסר בצוות רפואי שיקבל את החולים במחלקות יכול לגרום לעיכוב חולים במיון, ולעומסים.

1.1.2 על פי מדיניות זו, חולים מועברים לבתי חולים אחרים בסביבה. הסבירו איזה עיקרון תפעולי מנסה מדיניות זו להשיג?

תשובה:

המדיניות מנסה לאזן בין הביקושים של בתי החולים (load balancing) ולקרב אותם למצב של שיתוף משאבים (pooling).

1.1.3 הגרף הבא מנסה לקשר בין שעת שיא הסטת האמבולנסים לשיא העומס במיון. הסבירו את הגרף. באיזה קרוב של נוסחת העומס המוצע (offered load) הוא משתמש? כיצד ניתן היה אולי לשפר את ההתאמה בין הזמנים בהם מתרחשים השיאים? שימו לב: תוחלת זמן השהיה במיון הנדון היא 6 שעות.



תשובה:

הגרף Arrivals_0 (הנמוך ביותר) מתאר את מספר החולים הממוצע לשעה שהגיעו למיון לאורך היום, עם שיא הגעות ב- 11 בבוקר. הגרף Arrival_1 בשעה t הוא מספר ההגעות בשעה t + מספר ההגעות בשעה t-1, כלומר הוא סוכם את ההגעות בשעתיים האחרונות. וכו'... כלומר הגרף Arrivals_6 (הגבוה ביותר) סוכם את ההגעות ב- 6 השעות האחרונות ע"י הנוסחה:

$$Arrivals_6(t) = \lambda(t) + \lambda(t-1) + \dots + \lambda(t-6)$$

לכן גרף 6 מחשב בפועל את העומס המוצע (R(t)) לפי הקירוב הבא:

$$R(t) = E[\Lambda(t) - \Lambda(t-S)] \approx \Lambda(t) - \Lambda(t-E[S]) = \lambda(t) + \lambda(t-1) + \dots + \lambda(t-6)$$

בעזרתו מראים ששיא העומס מתקבל בשעה 15-17, כלומר הוא מוזז בזמן לעומת שיא ההגעות שקורה ב- 10-11.

אך עדיין יש פער זמן לא מוסבר בין שיא העומס הנ"ל לשיא ההסטות (שמתרחש בשעה 21). הפרש זה יכול לנבוע, למשל, מאחד ההסברים הבאים (או משילובם): א. האמד ל- R(t) לא מספיק מדויק. במקרה זה אנו ממליצים על השיפור הבא: כדאי להשתמש בנוסחת העומס המוצע המדויקת $R(t) = E \int_{t-S}^t \lambda(t) dt$, או באמד סטטיסטי, כפי שהוסבר בכיתה.

ב. הסטת האמבולנסים, כפי שהוסבר בכיתה, בדרך כלל מופעלת כאשר מחלקות האשפוז (ולאו דווקא

המיון) חסומות, וזה קורה בשעה יותר מאוחרת, מאשר שעת שיא העומס במיון.

ג. יתכן שפער הזמנים מצביע על כך שהפעלת נוהל הסטת האמבולנסים מופעל מאוחר מדי, כלומר רק לאחר שרואים עומס בלתי סביר במיון, מתחילים להפעיל אותו ועד שהוא מגיע לאפקטיביות מירבית עובר זמן משמעותי.

חלק 2 - איוש משמרות

מוקד טלפוני פתוח למתן שירות במשך 10 שעות ביום. על-ידי מדידות של תהליך ההגעות ומשכי השירות, נמצא שניתן לחלק את יום העבודה ל-3 חלקים, כאשר כל אחד מהם מאופיין ע"י קצב מופע ממוצע לשעה וממוצע משך שירות. להלן טבלה המסכמת מדידות אילו:

שעות פעילות	משך שירות ממוצע	קצב מופע ממוצע (לקוחות לשעה) λ
07:00-10:00	2 דקות	2250
10:00-15:00	2.5 דקות	3200
15:00-17:00	2 דקות	1440

הניחו כי ניתן למדל את תהליך המופע כתהליך פואסון (עם קצב מופע קבוע כל שעה), משך השירות מפורג מעריכית וכי תופעת נטישת לקוחות היא זניחה במוקד הנידון.

1.2.1 נסמן ב- $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ את רמות האיוש המינימאליות המבטיחות אחוז נענים מיידית של לפחות 50%. (למשל, N_1 מתאים לשעה 07:00-08:00). היעזרו בגרף המצורף בעמוד 28 בכדי לקבוע רמות איוש אלו לאורך היום.

תשובה:

מדובר בתור Erlang-C, ולכן על מנת להבטיח כי אחוז הממתנים לא יעלה על 50%, נאייש לפי כלל השורש (QED) עם $\beta = 0.5$ (נקודת שבת), כלומר

$$N_1 = N_2 = N_3 = \left\lceil R_1 + 0.5\sqrt{R_1} \right\rceil = \left\lceil 75 + 0.5 \cdot \sqrt{75} \right\rceil = 80,$$

$$N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = \left\lceil R_2 + 0.5\sqrt{R_2} \right\rceil = \left\lceil 133.33 + 0.5 \cdot \sqrt{133.33} \right\rceil = 140,$$

$$N_9 = N_{10} = \left\lceil R_3 + 0.5\sqrt{R_3} \right\rceil = \left\lceil 48 + 0.5 \cdot \sqrt{48} \right\rceil = 52.$$

מנהלת המוקד מעוניינת להשיג רמת שירות כמתואר בסעיף הקודם, אך קיימת הבעיה שלא ניתן להזמין מוקדנים רק לחלק מיום העבודה. את המשמרות האפשריות במוקד ניתן לתאר באופן הבא: משמרת חדשה מגיעה למוקד פעם בשעתיים החל מ- 07:00, ומוקדן במשמרת נותן שירות במהלך 3 השעות הראשונות של המשמרת, לאחר מכן יוצא להפסקה של שעה ואחריה חוזר לשעתיים נוספות של מתן שירות. נסמן עלות מוקדן במשמרת ה- j - ית ב- C_j . על המנהלת לכסות את 10 שעות פעילות המוקד.

הינכם מתבקשים לעזור למנהלת לקבוע את רמת האיוש האופטימלית (עלות מינימאלית) למשמרת, תחת האילוצים הנ"ל, וכפי שנלמד בכיתה.

1.2.2 הגדירו מטריצה $A = [a_{ij}]$ המתארת את המשמרות האפשריות (ז"א הגדירו את אברי המטריצה

a_{ij}).

תשובה:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if an agent working according to schedule } j \text{ is available during interval } i; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

where $j=1,2,3$ and $i=1,2,3,\dots,10$, and

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.3 נסחו בעיית תכנות בשלמים, שפתרונה נותן איוש אופטימלי למשמרת עבור כל המשמרות האפשריות, דהיינו במטרה להביא למינימום את עלות האיוש היומית של המוקד. הגדירו במדויק את הפרמטרים בהם אתם משתמשים.

תשובה:

משתני ההחלטה: X_j - מספר המוקדנים במשמרת ה- j .

$$\min \sum_{j=1}^3 C_j X_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} X_j \geq N_i \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$X_j \geq 0 \text{ integer}$$

נסמן ב- R_i את העומס המוצע על המערכת בשעה ה- i , וב- N_i^* את מספר המוקדנים בשעה ה- i , הנובע מפתרון בעיית התכנות בשלמים, $i = 1, 2, \dots, 10$. נזכור עוד כי סימנו ב- N_i את מספר המוקדנים המינימלי המבטיח אחוז ממתנינים שלא עולה על 50%, $i = 1, 2, \dots, 10$.

1.2.4 קבעו מהו היחס ($>, \geq, =, <, \leq$) בין זוגות המשתנים. הסבירו בקצרה אך במדויק.

תשובה:

$$R_i \square N_i \bullet$$

בחרו ביחס המתאים:

א. $>$ ב. $\geq$ ג. $=$ ד. $\leq$ ה. $<$ ו. לא ניתן לקבוע בוודאות

הסבר:

מכלל השורש עם $\beta = 0.5 > 0$.

$$N_i \square N_i^* \bullet$$

בחרו ביחס המתאים:

א. $>$ ב. $\geq$ ג. $=$ ד. $\leq$ ה. $<$ ו. לא ניתן לקבוע בוודאות

הסבר:

N_i^* התקבל תוך כדי התחשבות באילוץ זה - קודם נקבע הערך N_i ולאחר מכן נקבעו רמות האיוש של המשמרות תוך כדי האילוץ כי בכל שעה יאויש המוקד לפחות ב- N_i מוקדנים.

שאלה 2 – תרגילי בית

חלק 1 - עדיפויות

לקוחות מגיעים למכונת צילום לפי תהליך פואסון עם קצב מופע של אדם אחד לדקה. מספר העותקים שכל לקוח מבצע מתפלג אחיד בין 1 ל-10. לצילום כל עותק דרושות 9 שניות בדיוק.

2.1.1 חשבו את נצילות מכונת הצילום.

תזכורת: מ"מ אחיד בדיד המקבל ערכים בקבוצה $\{1, 2, \dots, N\}$ הוא בעל תוחלת $\frac{N+1}{2}$ ושונות $(N^2 - 1)/12$.

תשובה:

מהנתונים ברור כי $\lambda = 1$

וכי תוחלת זמן צילום היא: $E[S] = \frac{5.5 \cdot 9}{60} = 0.825 \text{ min}$

ועל כן נצילות השרת היא: $\rho = \lambda * E[S] = 1 * 0.825 = 0.825$, דהיינו 82.5%.

2.1.2 מצאו את ממוצע זמן ההמתנה בתור. (במידת הצורך השתמשו בנוסחאות בעמוד הבא)

תשובה:

יש להשתמש בנוסחת חניצ'ין פולטשק.

מספר העותקים מתפלג אחיד בין 1 ל-10.

לכן שונות מספר העותקים היא: $\text{Var}(U(1,10)) = (10^2 - 1)/12 = 8.25$

ומקדם ההשתנות של מספר העותקים הוא: $CV(U(1,10)) = \sqrt{8.25} / 5.5 = 0.52$

לכן, מקדם ההשתנות של זמן הצילום גם הוא 0.52 (זמן צילום = מספר עותקים $\times$ 9).

$$E[W_q] = E[S] \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1 + C^2}{2} = 0.825 \frac{0.825}{1 - 0.825} \frac{1 + 0.52^2}{2} = 2.47 \text{ min}$$

2.1.3 מצאו את ממוצע מספר האנשים בתור.

תשובה:

עפ"י חוק Little:

$$E[L_q] = \lambda E[W_q] = 2.47$$

Derivation of Khintchine-Pollaczek

For customer $n = 1, 2, \dots$, denote

$W_q(n)$ = waiting-time of n -th customer.

$R(n)$ = residual service time, at time of the n -th arrival;
 (= 0, for arrivals without waiting).

$L_q(n)$ = # of customers in queue, at time of n -th arrival.

$\{S_n\}$ = sequence of service-times.

$$W_q(n) = R(n) + \sum_{k=n-L_q(n)}^{n-1} S_k, \quad n \geq 1.$$

$$EW_q(n) = ER(n) + E(S_1) \cdot EL_q(n), \quad \text{by Wald,}$$

$$E(W_q) = E(R) + E(S_1)E(L_q), \quad n \uparrow \infty, \text{ assuming} \\ \exists \text{ limit + PASTA,}$$

$$= E(R) + \lambda E(S_1)E(W_q), \quad \text{by Little,}$$

$$E(W_q) = E(R) + \rho E(W_q), \quad \rho < 1 \Leftrightarrow \exists \text{ steady-state,}$$

$$E(W_q) = E(R)/(1 - \rho).$$

Left to calculate $E[R]$?

Via **Biased Sampling** (see next page):

- ρ = Prob. of arriving to a busy server. (**PASTA+Little**)

$$- E(R) = (1 - \rho) \cdot 0 + \rho \cdot E(S) \cdot \frac{1 + C^2(S)}{2}. \quad \text{q.e.d.}$$

מנהל החנות החליט לתת עדיפות ללקוחות שצריכים לצלם עד וכולל שלושה עותקים, תוך הסכמה שאין עוצרים ביצוע של עבודת צילום באמצע.

תחת המדיניות החדשה, זמן השירות של הלקוחות עם העדיפות הגבוהה מתפלג $U(9,18,27)$ (אחיד על המספרים $\{9,18,27\}$) ושל הלקוחות עם העדיפות הנמוכה $U(36,45,54,63,72,81,90)$. לכן, תוחלת זמן הצילום של כל קבוצה היא: $E[S_1] = 18\text{sec} = 0.3\text{min}$, $E[S_2] = 63\text{sec} = 1.05\text{min}$.
 שונות זמן השירות ללקוחות מסוג (1) היא: $Var[S_1] = \frac{3}{200}$, ו- $E[S_1^2] = m_1^2 + Var[S_1] = 0.105$,
 שונות זמן השירות ללקוחות מסוג (2) היא: $Var[S_2] = 0.9$, ו- $E[S_2^2] = m_2^2 + Var[S_2] = 1.9125$.

2.1.4 חשבו את פרופיל התעסוקה של המכונה, דהיינו אחוז הזמן המוקדש לכל סוג לקוח ואחוז זמן הבטלה.

תשובה:

מהנתונים ברור כי $\lambda_1 = 0.3$; $\lambda_2 = 0.7$
 על כן, אחוז הזמן שהשרת נותן שרות ללקוחות מהסוג העדיף (1) היא
 $\rho_1 = \lambda_1 E[S_1] = 0.3 * 0.3 = 0.09$
 ולסוג (2): $\rho_2 = \lambda_2 E[S_2] = 0.7 * 1.05 = 0.735$
 נובע כי פרופורצית זמן הבטלה היא $1 - 0.09 - 0.735 = 0.256$.

2.1.5 מצאו את ממוצע זמן ההמתנה בתור של לקוחות עם יותר מ-3 עותקים? (דפי ההרצאה הרלוונטים מצורפים בשלושת העמודים הבאים 11-13).

תשובה:

$E[R] = \frac{1}{2} (\lambda_1 E[S_1^2] + \lambda_2 E[S_2^2]) = 0.685$
 על כן, זמן ההמתנה של לקוחות בעדיפות גבוהה יהיה: $E[W_q^1] = \frac{E[R]}{1 - \rho_1} = 0.753 \text{ min}$
 וללקוחות בעדיפות נמוכה: $E[W_q^2] = \frac{E[R]}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)} = 2.84 \text{ min}$.

Recitation 13: Priority Queues

M/G/1 with priorities

- K customer classes, indexed by $k = 1, \dots, K$.
- **Class k arrivals:** Poisson, rate λ_k .
- **Class k service times:** S_k - generally distributed, with $m_k = E(S_k)$ and $E(S_k^2)$ both finite.
- **Setting the priorities:** Set highest priorities to 1, then $2, \dots$; lowest to K .
- Assume FCFS within each priority class.
- Non preemptive first (Later, preemptive-resume).

Steady state $\Leftrightarrow \rho \triangleq \rho_1 + \dots + \rho_K < 1$, where $\rho_k = \lambda_k m_k$.

Convenient notation: $\bar{\rho}_k = \rho_1 + \dots + \rho_k$, $1 \leq k \leq K$.

Note: ρ_k = fraction of time allocated by server to class k .

$1 - \rho$ = idleness/availability.

- * $E(W_q^k)$ - expected waiting time of class k customer.
- * $E(L_q^k)$ - expected number of waiting class k customers.
- * $E(U)$ - expected unfinished work in the system.
- * $E(R)$ - expected residual service time.

Calculation of $E(W_q^k)$. Non-preemptive regime

$$\begin{aligned}
1. \quad & E(W_q^1) = E(R) + m_1 E(L_q^1) = E(R) + \rho_1 E(W_q^1) \\
& \Rightarrow E(W_q^1) = E(R)/(1 - \rho_1), \text{ as before } (K = 1). \\
2. \quad & E(W_q^2) = E(R) + \underbrace{m_1 E(L_q^1) + m_2 E(L_q^2)}_{\text{wait due to class 1 \& 2 in queue}} + \underbrace{m_1 \lambda_1 E(W_q^2)}_{\text{wait due to class 1, arriving during wait of 2.}} \\
& \Rightarrow E(W_q^2) = E(R) + \rho_1 E(W_q^1) + \rho_2 E(W_q^2) + \rho_1 E(W_q^2) \\
& \Rightarrow E(W_q^2) = [E(R) + \rho_1 E(W_q^1)]/(1 - \rho_1 - \rho_2) = \\
& \quad = E(R)/[(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)] \\
& \quad \quad \quad \uparrow \\
& \quad \quad \text{substitute } E(W_q^1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k. \quad & EW_q^k = ER + m_1 \cdot EL_q^1 + \dots + m_k \cdot EL_q^k + \lambda_1 m_1 EW_q^k + \\
& \quad \dots + \lambda_{k-1} m_{k-1} EW_q^k \\
& \Rightarrow = ER + \rho_1 EW_q^1 + \dots + \rho_{k-1} EW_q^{k-1} + (\rho_1 + \dots + \rho_k) EW_q^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(W_q^k) &= \frac{E(R) + \rho_1 E(W_q^1) + \dots + \rho_{k-1} E(W_q^{k-1})}{(1 - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho_k)}, \quad k \geq 1 \\
&= (\text{Induction}) \frac{E(R) \cdot \left[1 + \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} + \frac{\rho_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)} + \frac{\rho_{k-1}}{(1 - \bar{\rho}_{k-2})(1 - \bar{\rho}_{k-1})} \right]}{1 - \bar{\rho}_k} \\
&= \frac{E(R)}{(1 - \bar{\rho}_{k-1})(1 - \bar{\rho}_k)}
\end{aligned}$$

The last equality can be derived via simple calculations.

We now show
$$E(R) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \lambda_k E(S_k^2)$$

$$E(R) = (1 - \rho) \cdot 0 + \sum_k \rho_k \cdot m_k \cdot \frac{1 + C_k^2(S)}{2} = \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k E(S_k^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(W_q^k) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \lambda_j E(S_j^2)}{(1 - \rho_1 - \cdots - \rho_{k-1})(1 - \rho_1 - \cdots - \rho_k)}}, 1 \leq k \leq K.$$

Calculation of $E(W_q^k)$. Preemptive regime

Now, Class k *does not* “see” classes $k+1, \dots, K$.

Recall: for M/G/1-like queues, $E(U) = \frac{E(R)}{1 - \rho} = E(W_q)$

$$E(W_q^k) = \frac{E(R^k)}{1 - (\rho_1 + \cdots + \rho_k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j m_j [E(W_q^k) + m_k]$$

$\uparrow$
 $j \leq k-1$ preempts k

$$= \frac{E(R^k)}{1 - \bar{\rho}_k} + \bar{\rho}_{k-1} [E(W_q^k) + m_k]$$

$$E(W_q^k) = \frac{E(R^k)}{(1 - \bar{\rho}_k)(1 - \bar{\rho}_{k-1})} + \frac{\bar{\rho}_{k-1}}{1 - \bar{\rho}_{k-1}} m_k$$

where $E(R^k) = \sum_{j=1}^k \rho_j \cdot m_j \cdot \frac{1 + C^2(S_j)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \lambda_j E(S_j^2)$

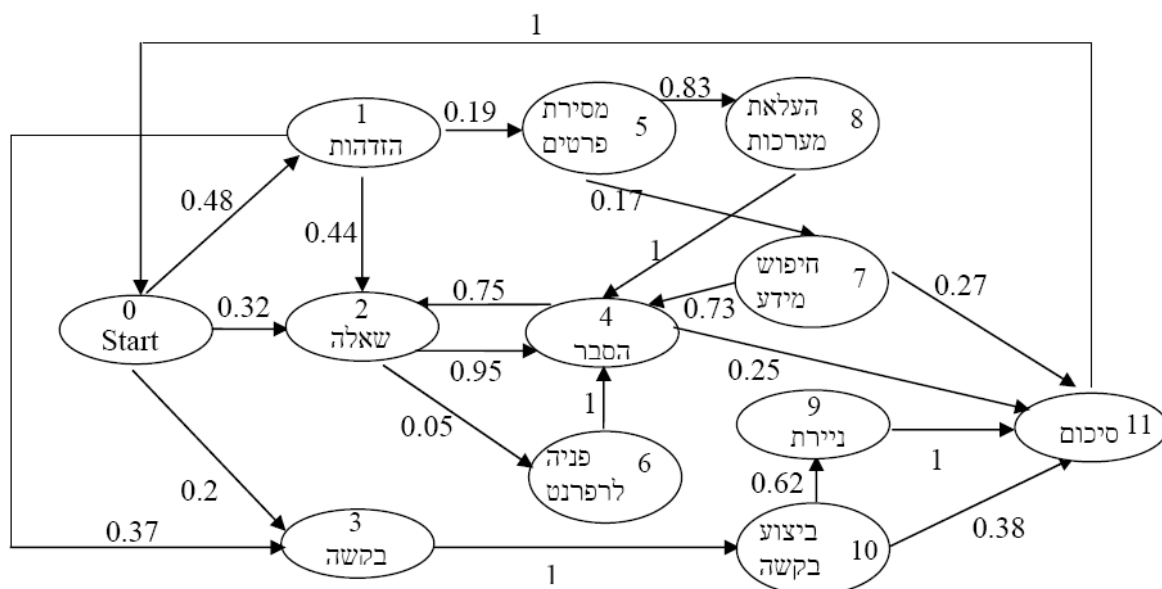
$$\boxed{E(W_q^k) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \lambda_j E(S_j^2)}{(1 - \bar{\rho}_{k-1})(1 - \bar{\rho}_k)} + \frac{\bar{\rho}_{k-1}}{1 - \bar{\rho}_{k-1}} E(S_k)}$$

בשנת 2007 בוצע בפקולטה לתעשייה וניהול פרויקט שנתי בשיתוף פעולה עם מוקד טלפוני של בנק ישראלי גדול. אחת ממטרות הפרויקט הייתה: חקר תהליך ביצוע שיחות מסוג שירות מסוים. על מנת לאפיין את תהליך השיחה ביחידת שירות זו, בוצעו מדידות ראשוניות על ידי האזנה למוקדנים. לאחר ניתוח השיחות, נמצא כי ניתן לחלק את השיחה לפאזות עיקריות (אלמנטים). אלמנטים אלו מתאימים לכל השיחות בשירות הנדון.

האלמנטים העיקריים המרכיבים שיחה (אין צורך להתעמק בתיאור האלמנטים):

1. **הזדהות** - אם ללקוח יש קוד סודי והוא מקיש אותו במענה הקולי אזי הזיהוי הוא אוטומאטי. אם הקוד לא הוקש, מתבקש הלקוח להזדהות מול המוקדן ולענות על מספר שאלות לאימות הנתונים.
2. **שאלה** - שאלה של לקוח. לדוגמא הבהרה של מכתב שהתקבל מהבנק, בירורים לגבי אופן התשלום, ריבית ועוד.
3. **בקשה** - בקשה של הלקוח.
4. **הסבר** - מתן הסבר על-ידי הבנקאי לשאלות הלקוח.
5. **מסירת פרטים** - מסירת פרטים על-ידי הלקוח לבנקאי, כדי לאפשר לבנקאי לבצע פעולות מסוימות, לדוגמא משלוח פקס עם פרטי הלקוח.
6. **פנייה לרפרנט** - אם הבנקאי לא מצא תשובה, יש באפשרותו לפנות לבנקאי ותיק יותר (הרפרנט) ולבקש ממנו עזרה. הפנייה לרפרנט **קוטעת** את השיחה.
7. **חיפוש מידע** - מעבר על היסטוריה של הלקוח לצורך מציאת מידע.
8. **העלאת מערכות** - בנקאים עובדים מול שלוש מערכות. על מנת להתחיל את תהליך הטיפול בלקוח, יש צורך לחכות ששלושת המערכות תעלנה על מסך הבנקאי. זמן המתנה זה כלול באלמנט.
9. **ניירת** - כתיבת הוראות במחשב כגון- הוראה למשלוח פקס ועוד. כמעט ואין ביצוע ניירת פיזית כגון שליחת מכתבים.
10. **בצוע בקשה** - ביצוע בקשת הלקוח על-ידי בנקאי, כוללת את כל הפעולות הנדרשות מהבנקאי, לדוגמא שליחת מכתב, ביצוע שינויים ועוד.
11. **סיכום** - תיעוד השיחה במחשב.

בעזרת נתוני ההאזנות, חושבו פרופורציות המעברים (הסתברויות מעבר) בין האלמנטים (המצבים).
שרשרת מרקוב, כמתואר להלן, מהווה מודל לתהליך ביצוע האלמנטים על ידי מוקדן כלשהו, ממחלקת
השירות שנחקרה בפרויקט.



נסמן את ההתפלגות הסטציונרית של השרשרת על ידי $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{11})$.
לאחר הגדרת האלמנטים (הפאזות) בשיחה, בוצע חקר זמנים לצורך אמידת ממוצע משכי האלמנטים
והתפלגותם.

עבור כל אלמנט התקבלו הממוצעים הבאים :

מספר	תיאור אלמנט	ממוצע משך האלמנט (שניות)
1	הזדהות	46
2	שאלה	120
3	בקשה	44
4	הסבר	180
5	מסירת פרטים	64
6	פניה לפרנט	260
7	חיפוש מידע	20
8	העלאת מערכות	46
9	ניירת	61
10	ביצוע בקשה	20
11	סיכום	10

לצורך פתרון השאלות הבאות, ניתן להניח שהתפלגויות משך כל אלמנט הן מעריכיות עם תוחלות הנתונות בטבלה (המציאות לא רחוקה מאוד מהנחה זו). בנוסף, התברר ששיחות למוקדן מגיעות לפי תהליך פואסון, בקצב של 12 שיחות לשעה. אם מוקדן עסוק, השיחות מועברות למוקדן אחר.

לאחר חקר הזמנים, משתתפי הפרויקט הגיעו למסקנה שאפשר לתאר את תהליך השיחות שמבצע מוקדן על-ידי תהליך קפיצה מרקובי $X = \{X_t, t \geq 0\}$, כאשר X_t מתאר את המצב (אלמנט, פאזה) של שיחה בזמן t .

2.2.1 עבור התק"מ X , נסמן ב- $P = [P_{ij}]$ את מטריצת הסתברויות המעבר שלו, וב- $q = (q_i)$ את וקטור קצבי העזיבה. השלימו את הערכים הבאים:

תשובה: קצבים לשעה:

$$p_{12} = 0.44$$

$$q_0 = 12$$

$$p_{11} = 0$$

$$q_2 = \frac{3600}{120} = 30$$

$$p_{26} = 0.05$$

$$q_4 = \frac{3600}{180} = 20$$

$$p_{24} = 0.95$$

$$q_{11} = \frac{3600}{10} = 360$$

$$q_0 = \frac{12}{3600}, q_2 = \frac{1}{120}, \dots$$

קצבים לדקה: $q_0 = \frac{12}{3600}, q_2 = \frac{1}{120}, \dots$

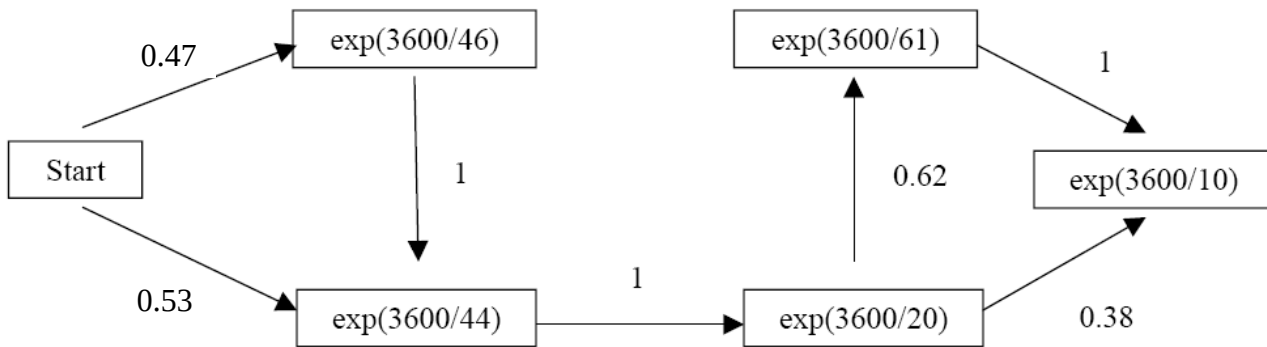
2.2.2 כיצד מתפלג משך שיחה? תארו במדויק ככל שתוכלו, ללא חישובים.

תשובה:

משך השיחה מתפלג לפי התפלגות Phase Type כך שהמעברים בין הפאזות מוגדרים בדיאגרמה שנתונה בתחילת השאלה, וזאת ללא מעבר ממצב 11 למצב 0. זמני שהיה בכל פאזות הם מעריכיים עם תוחלות הנתונות בטבלה.

2.2.3 מהי תוחלת משך השיחה של לקוח שמתקשר עם "בקשה"?

אחוז השיחות שעוברות בקשה מכלל השיחות הוא: $0.2 + 0.48 \cdot 0.37 = 0.3776$, כאשר 53 אחוז מהן עוברות ישירות ל"בקשה" $\left(\frac{0.2}{0.3776} = 0.53\right)$ ו-47% דרך הזדהות $\left(\frac{0.37 \cdot 0.48}{0.3776} = 0.47\right)$.



נסמן T- משך שיחה עם "בקשה".

$$E[T] = 44 + 0.47 \cdot 46 + 20 + 0.62 \cdot (61 + 10) + 0.38 \cdot 10 = 133.44$$

הערה: בדיאגרמה הנ"ל, הקצבים מחושבים פר שעה. בקצבים פר שניה לא יופיעו ה- 3600 הנ"ל.

שאלה 3 – יישום

אין צורך לקרוא את הטקסט הבא בעיון רב – הוא מהווה רקע בלבד.

"בית חולים רמב"ם הוא המוביל בארץ בעיתות חירום"



מתרגלים שטיפת נפגעי לוחמה כימית צילום: סמר עודה

כך העיד הבוקר (רביעי) מפקד פיקוד העורף, אלוף יאיר גולן, במסגרת תרגיל "נקודת מפנה 4" שתורגל בביה"ח. הצוותים תרגלו מצב של התקפה כימית וקבלת מאות נפגעי לוחמה כימית בחיפה. נציג הנהגלת ביה"ח ד"ר מיקי הרבלטל: "במלחמה כימית הטיהור זה הטיפול"

כתב: סמר עודה / 26/05/2010 18:00

התרגיל שהחל לפני מספר ימים הגיע היום לשיאו. לביה"ח רמב"ם שהיה דרוך ומוכן ובו התקיים תדריך של מפקד פיקוד העורף, אלוף יאיר גולן, ומפקד המשמר הלאומי האמריקאי הגנרל מקינלי. הגיעו מאות נפגעי לוחמה כימית. במהלך התרגיל הגיעו מאות אמבולנסים שהעבירו נפגעים לשטח

ביה"ח מהאזור והסביבה. מאות מיטות היו מסודרות במרחבים הפתוחים המיועדים לשימוש בעת מלחמה אמיתית וברזים וחומרי טיהור הוצבו בשטחים המיועדים לטיהור הנפגעים לפני כניסתם לביה"ח לקבלת טיפול. התרגול נעשה על בובות וגם על אורחים ששיחקו כנפגעים.

ביה"ח רמב"ם יכול לקלוט 900 נפגעים בזמן מלחמה ובתרגיל היום תורגלה קבלת 300 נפגעים. ד"ר הרבלטל, הסביר כי בית החולים ערוך בזמן אמת וכי כל כל הפצועים והנפגעים יתקבלו בחניון בית החולים בבת גלים, שם יעברו תהליך מיון לא לפני שיעברו טיהור או טיהור רטוב או יבש כי מדובר בהתקפה כימית וצריך להבין שבמלחמה כימית הטיהור זה הטיפול ויש הקפדה על הנושא. בתהליך המיון הפצועים המהלכים ישוחררו והפצועים קשה יועברו לטיפול בביה"ח ונפגעי החרדה מועברים למרכז הקונגרסים שם יקבלו סיוע וטיפול שייסייע להם להתמודד נפשית עם המצב. כל זאת כדי למנוע צפיפות שיוכלו לעקב את עבודת הצוותים הרפואיים. כל התהליך הזה תורגל הבוקר בשטח ביה"ח החיצוני.

סגן שר הביטחון מתן וילנאי, שיבח את עבודת מוכנות ביה"ח ובכלל את שיתוף הפעולה בין כל הגורמים והמוסדות וציין כי שיתוף הפעולה היום אינו דומה למה שהיה פעם והדבר תורם רבות להצלחת המוכנות בשעת אמת.

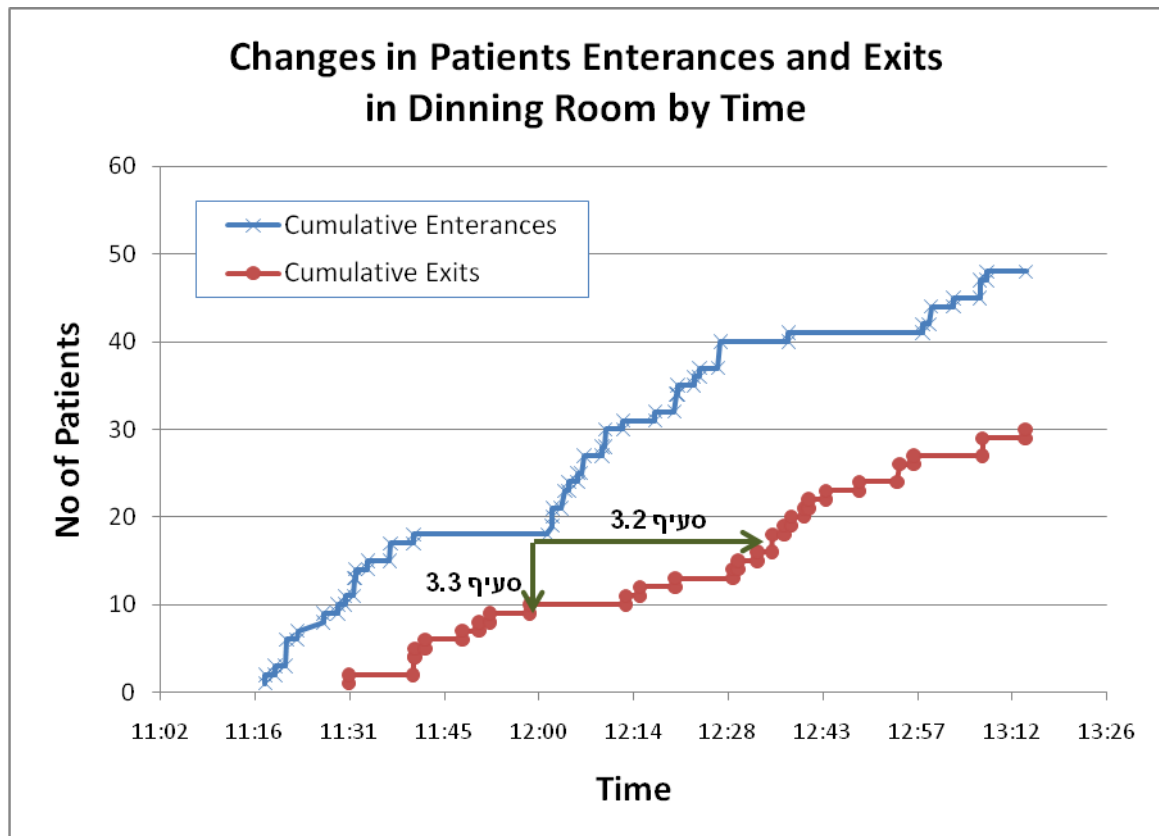
כפי שמתואר בכתבה, פיקוד העורף החליט לבצע תרגיל להתמודדות עם אירוע רב-נפגעים (אר"ן) גדול. במהלך התרגיל הגיעו לביה"ח רמב"ם כ- 300 נפגעים. התרגיל התחיל בשעה 11:00, ובשעה 13:15 הופסק (חולים הגיעו לביה"ח עד השעה 13:00). עם הגעתם עברו הנפגעים תהליך של טיהור כימי ואז מוינו לארבע קבוצות לפי חומרת הפגיעה. קבוצות החולים הם: מהלכים קל, מהלכים בינוני, קשה (שוכבים), קשה מאוד. אחוז הנפגעים מכל סוג הוא כ- 50%, 30%, 17%, ו- 3%, בהתאמה. בבית החולים נפתחו ארבעה מוקדי חירום לטיפול בכל אחת הקבוצות הנפגעים. לדוגמה, נפגעים קשים הועברו לאזור שבדרך כלל משמש כחדר אוכל, אך מצויד בציוד חירום לטיפול באירועים מסוג זה. ניח כי הגעת כלל הנפגעים לבית החולים היא לפי תהליך פואסון הומוגני בזמן.

3.1 תארו, במדויק ככל שתוכלו, את תהליך הגעת החולים מסוג "קשה" לבית החולים. ציינו הנחות לצורך תשובתכם.

תשובה:

בהנחה שחלוקת החולים לכל סוג היא אקראית עפ"י האחוזים הנ"ל, על סמך פיצול תהליך פואסון, תהליך הגעת חולים קשים לבית החולים מתפלג גם הוא פואסון עם קצב $25.5 = 0.17 * \frac{300}{2}$ חולים לשעה.

הגרף הבא מתאר את הצטברות הנפגעים הקשים באזור טיפול מיוחד שהוקצה לטיפול בהם (חדר האוכל). בגרף מסוכמים שני התהליכים הבאים : א. סך הנפגעים הקשים שהגיעו לאזור הטיפול בזמן התרגיל, ב. סך הנפגעים שהוצאו מאזור הטיפול בזמן התרגיל (נפגעים הוצאו לאשפוז במחלקות או מכיוון שנפטרו).



3.2 הסיקו מגרף זה מהו זמן שהיית נפגע שהגיע לאזור הטיפול בשעה 12:00. שרטטו על הגרף כיצד הגעתם להערכה זו. ציינו באילו הנחות השתמשתם.

תשובה:

בהנחה שהנפגעים נכנסים לאזור הטיפול לפי סדר הגעתם, זמן שהיה יהיה כ- 34 דקות.

3.3 כמה נפגעים היו באזור טיפול זה בשעה 12:00? שרטטו על הגרף כיצד הגעתם להערכה זו.

תשובה:

7 נפגעים.

3.4 הסבירו מדוע העקומה המתארת את סך הכניסות והעקומה המתארת את סך היציאות אינן נפגשות בסוף ציר הזמן? האם גם באירוע אמיתי יראה הגרף (המתאר את כניסת ויציאת החולים באירוע כולו) כך? הסבירו בקצרה.

תשובה:

התרגיל הופסק באופן שרירותי בשעה 15:1. בזמן הפסקת התרגיל היו באזור הטיפול 19 נפגעים, וזהו הפער בין העקומות. אם האירוע היה אמיתי, בסופו של האירוע אזור הטיפול המיוחד היה נסגר וכל הנפגעים ממנו היו מועברים ולכן העקומות היו חייבות להיפגש.

3.5 מדוע לא ניתן להשתמש בחוק Little על מנת לאמוד את ממוצע זמן השהיה (מכניסה עד יציאה) בחדר אוכל מנתוני התרגיל?

תשובה:

מכיוון שהתרגיל מתחיל כאשר המערכת מתחילה ריקה ומסתיימת עם 19 לקוחות, התנאים שלמדנו לשימוש בחוק Little לא מתקיימים, ולא ניתן לאמוד בעזרתו את ממוצע משכי השהיה של הנפגעים באזור הטיפול.

3.6 בשני העמודים הבאים, 21-22, מצורפת טבלת זמני הגעות ועזיבות החולים ומשכי שהיה של הנפגעים הקשים בתרגיל, כולל סיכומים. השתמשו בטבלאות אלו כדי לאמוד את ממוצע משך השהיה של חולה "קשה" בחדר האוכל

תשובה:

נתונים זמני שהיה מלאים רק עבור כמחצית מהנפגעים, כאשר שאר נתוני הטיפול הם **קטומים**, מכיוון שהתרגיל הופסק ב- 15:13. מכיוון שהנתונים קטומים (מצונזרים), נדרש שימוש בטכניקות דומות לאמידת הסבלנות בטלפון כדי לאמוד את ממוצע משך השהיה של נפגע, על כן יש להשתמש באמד הבא:

$$ALOS = \frac{\text{Total LOS of all Patients}}{\text{Number of uncensored data samples}} = \frac{44.91 * 48}{29} = 74.33 \text{ minutes}$$

כלומר, סוכמים את סך זמן השהיה של כל הלקוחות (שסיימו את התהליך + הקטומים) ומחלקים ב- 29 שהוא מספר הלקוחות שפנו מחדר האוכל לפני תום התרגיל.

Length of stay				
patient_id	entry_date	exit_date	duration (sec)	flag
4	27/05/2010 1:14:07 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	53	0
67	27/05/2010 1:08:27 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	394	0
73	27/05/2010 11:33:55 AM	27/05/2010 11:40:58 AM	423	1
18	27/05/2010 1:07:54 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	427	0
33	27/05/2010 12:05:50 PM	27/05/2010 12:13:12 PM	442	1
15	27/05/2010 1:07:15 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	466	0
35	27/05/2010 11:31:48 AM	27/05/2010 11:40:50 AM	543	1
17	27/05/2010 1:03:31 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	690	0
16	27/05/2010 11:18:19 AM	27/05/2010 11:31:04 AM	766	1
57	27/05/2010 12:59:41 PM	27/05/2010 1:14:00 PM	860	1
10	27/05/2010 12:23:32 PM	27/05/2010 12:38:23 PM	891	1
37	27/05/2010 12:59:21 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	940	0
22	27/05/2010 12:04:31 PM	27/05/2010 12:20:40 PM	970	1
37	27/05/2010 11:31:50 AM	27/05/2010 11:48:18 AM	988	1
43	27/05/2010 12:58:21 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	1000	0
31	27/05/2010 12:37:57 PM	27/05/2010 12:54:51 PM	1014	1
66	27/05/2010 11:23:17 AM	27/05/2010 11:42:39 AM	1162	1
28	27/05/2010 11:21:34 AM	27/05/2010 11:41:06 AM	1172	1
60	27/05/2010 12:27:12 PM	27/05/2010 12:48:41 PM	1288	1
12	27/05/2010 12:12:47 PM	27/05/2010 12:35:33 PM	1365	1
36	27/05/2010 12:06:23 PM	27/05/2010 12:29:30 PM	1387	1
40	27/05/2010 12:09:33 PM	27/05/2010 12:35:23 PM	1551	1
57	27/05/2010 11:32:02 AM	27/05/2010 11:58:31 AM	1589	1
52	27/05/2010 11:21:29 AM	27/05/2010 11:50:49 AM	1761	1
44	27/05/2010 11:21:25 AM	27/05/2010 11:52:30 AM	1865	1
6	27/05/2010 12:02:02 PM	27/05/2010 12:33:10 PM	1868	1
29	27/05/2010 12:21:06 PM	27/05/2010 12:54:29 PM	2003	1
21	27/05/2010 12:01:16 PM	27/05/2010 12:37:16 PM	2160	1
25	27/05/2010 12:27:35 PM	27/05/2010 1:07:28 PM	2394	1
22	27/05/2010 12:27:37 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	2844	0
32	27/05/2010 11:27:11 AM	27/05/2010 12:15:17 PM	2887	1
31	27/05/2010 11:40:54 AM	27/05/2010 12:30:16 PM	2962	1
53	27/05/2010 12:24:26 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	3035	0
71	27/05/2010 12:20:55 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	3246	0
49	27/05/2010 12:20:36 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	3264	0
52	27/05/2010 12:10:07 PM	27/05/2010 1:07:28 PM	3441	1
65	27/05/2010 12:17:38 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	3442	0
8	27/05/2010 11:37:15 AM	27/05/2010 12:40:17 PM	3783	1
63	27/05/2010 12:10:04 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	3896	0
27	27/05/2010 12:06:53 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	4088	0
46	27/05/2010 12:03:56 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	4265	0
75	27/05/2010 11:29:21 AM	27/05/2010 12:41:00 PM	4299	1
74	27/05/2010 12:03:19 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	4302	0
19	27/05/2010 12:01:58 PM	27/05/2010 1:15:00 PM	4383	0
64	27/05/2010 11:30:29 AM	27/05/2010 12:43:38 PM	4389	1

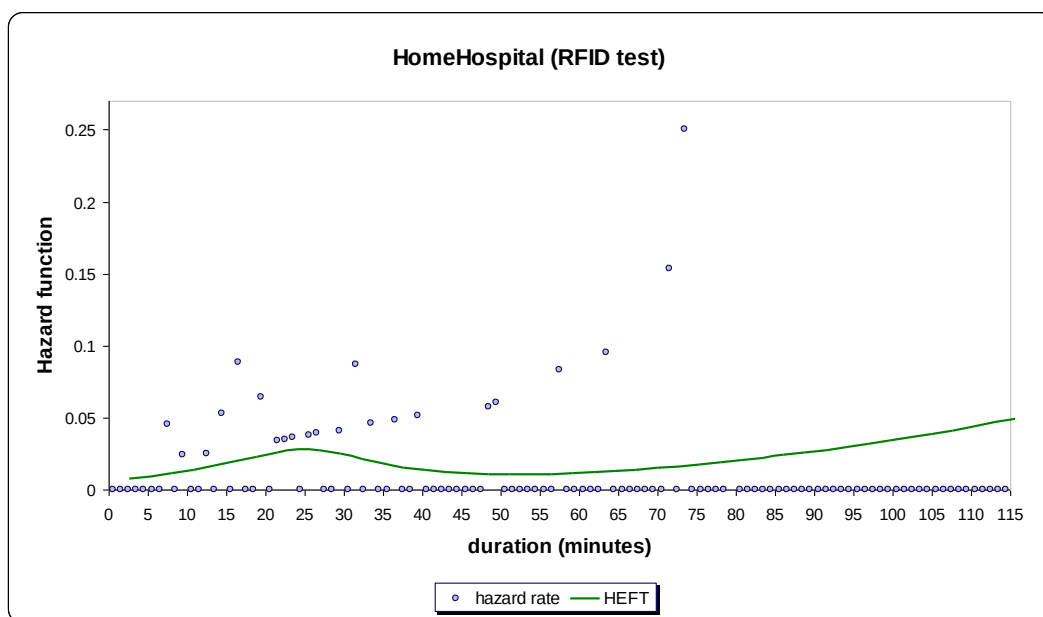
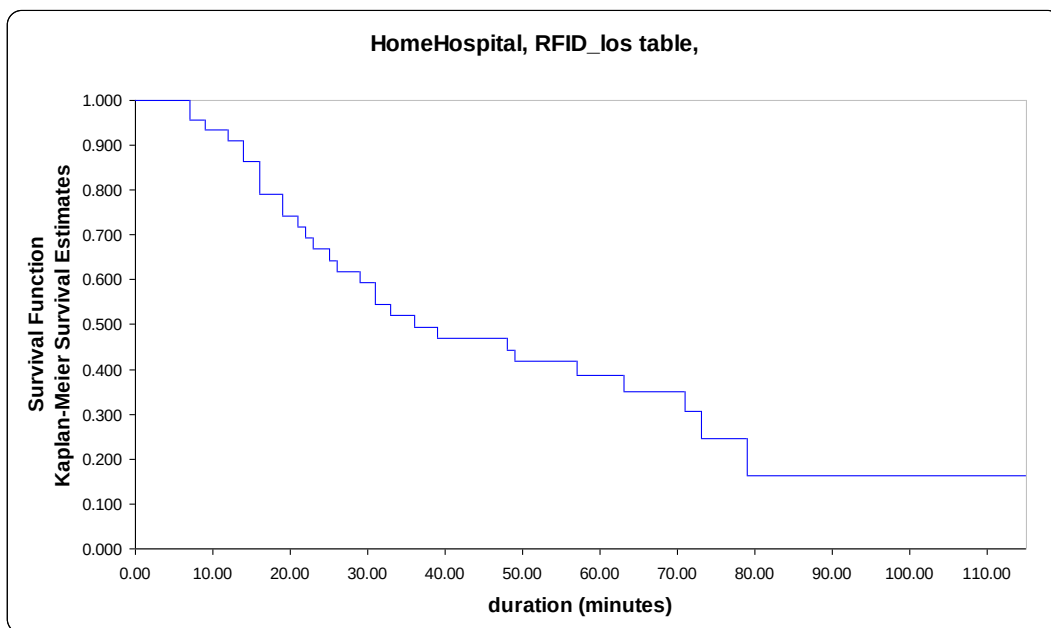
Length of stay				
patient_id	entry_date	exit_date	duration (sec)	flag
20	27/05/2010 11:37:21 AM	27/05/2010 12:57:02 PM	4781	1
69	27/05/2010 11:23:07 AM	27/05/2010 1:15:00 PM	6714	0
48	27/05/2010 11:19:47 AM	27/05/2010 1:15:00 PM	6914	0

Summary of the Number of Censored and Uncensored Values			
Total	Uncensored	Censored	Percent Censored
48	29	19	39.58

Mean Length of Stay (Minute)	Mean Standard Error	Median
44 . 91	4 . 2605	36

הערה : ממוצע זמן השהיה בטבלה זו הוא ממוצע של עמודת Duration.

על מנת לאמוד את התפלגות משכי השהיה, מציגים הגרפים הבאים את פונקצית השרידות ופונקצית הסיכון של משך השהיה בחדר הטיפול. (הנתונים חושבו בעזרת אמד קפלן- מאייר, שהוא האמד הקלאסי בניתוח שרידות)



3.7 חוו דעתכם : האם יתכן וזמן השהיה במערכת מתפלג מעריכית? הסבירו תשובתכם.

תשובה:

פונקצית הסיכון אינה קבועה ולכן לא יתכן שזמן השהיה מתפלג מעריכית

3.8 תנו הגדרה מדויקת לפונקציית השרידות.

תשובה:

פונקציית השרידות היא ההסתברות שלקוח שהה במערכת לפחות t י"ז.

$$S_x(t) = P(X > t)$$

3.9 מהו אחוז הפצועים שנשארים באתר הטיפול למעלה משעה?

תשובה:

עפ"י הגרף הראשון, כ- 40 אחוז מהפצועים נשארים במערכת למעלה מ- 60 דקות.

3.10 אם היינו מחשבים את המדד ב- 3.9 על סמך הנתונים המקורים (ללא תיקון), האם היינו מקבלים אחוז גבוה יותר או נמוך יותר?

תשובה:

אם החישוב היה מתבסס על הנתונים המקוריים, אחוז הפצועים הנשארים במערכת למעלה מ- 60 דקות היה נמוך יותר. הסבר: הנתונים הקטומים מטים כלפי מטה לא רק את ממוצע זמן השהיה אלא גם את התפלגות זמן השהיה כולה.

3.11 חוו דעתכם: מדוע פונקציית הסיכון המוחלקת עולה בסופה?

תשובה:

כל הלקוחות מפונים בסופו של דבר מחדר האוכל, או למחלקות האשפוז או חו"ח לחדר מתים. לכן, בהינתן שהחולה כבר שוהה במחלקה זמן רב, ההסתברות שהוא יפונה ב"שניה הבאה" הולכת ועולה.

3.12 חוו דעתכם: מדוע יש בפונקציית הסיכון המוחלקת מקסימום לוקאלי ב- 25 דקות?

תשובה:

כפי הנראה פרוצדורת הטיפול הדחוף השכיחה ביותר נמשכת כ- 25 דקות.

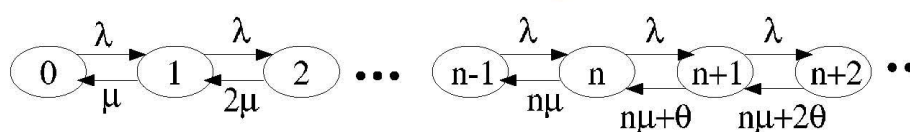
שאלה 4 – תיאוריה ושימושיה

בשאלה זו נדון במודל Erlang-A עם פרמטרים N, θ, μ, λ , המתאר מערכת שירות עם לקוחות קצרי רוח.

נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t . אזי $L = \{L(t), t \geq 0\}$ הוא תהליך לידה ומוות.

4.1. ציירו את דיאגרמת קצבי המעבר של L , וכתבו את משוואות המצב היציב. (נסמן כרגיל את הפתרון למשוואות ב- $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$).

תשובה:



משוואות המצב היציב הן:

$$\lambda \pi_i = i \mu \pi_{i+1} \quad i \leq n$$

$$\lambda \pi_i = (n\mu + (i-n)\theta) \pi_{i+1} \quad i > n$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

4.2. הוכיחו מתמטית שמודל Erlang-A הוא תמיד ארגודי (סטבילי). דהיינו, הוכיחו שהטור הרלוונטי ממשוואות המצב היציב אכן מתכנס.

פתרון:

מערכת משוואות המצב היציב מ-4.1, שקולה ל-

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} \pi_0 \quad i \leq n$$

$$\pi_i = \prod_{k=n+1}^i \frac{\lambda}{(n\mu + (k-n)\theta)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \pi_0 \quad i > n$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

מכיוון שהתהליך אי-פריק, כדי להוכיח ארגודיות, הכרחי ומספיק להוכיח שלמערכת המשוואות הנ"ל יש

פתרון. כלומר, צריך להוכיח שהטור $\pi_0^{-1} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \prod_{k=n+1}^i \frac{\lambda}{(n\mu + (k-n)\theta)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}$ מתכנס.

מכיוון ש- $n\mu + (k-n)\theta \geq k \min(\mu, \theta)$ לכל $k \geq n$, ו- $k\mu \geq k \min(\mu, \theta)$ לכל $k < n$, מתקיים:

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} \pi_0 \leq \left(\frac{\lambda}{\mu \wedge \theta}\right)^i \frac{1}{i!} \pi_0 \quad i \leq n$$

$$\pi_i = \prod_{k=n+1}^i \frac{\lambda}{(n\mu + (k-n)\theta)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \pi_0 \leq \left(\frac{\lambda}{\mu \wedge \theta}\right)^i \frac{1}{i!} \pi_0 \quad i > n$$

$$\pi_0 \geq \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu \wedge \theta}\right)^j \frac{1}{j!} \right]^{-1} = e^{\frac{\lambda}{\mu \wedge \theta}} > 0 \quad \text{נובע כי } \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

מאחר ו- $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$, נובע כי $\pi_0 > 0$.

שכמובן שקול להתכנסות הטור הרלוונטי.

ולכן, לכל ערכי פרמטרים λ, μ, θ, N , מודל Erlang-A ארגודי.

הערה: החסמים הנ"ל "הומצאו" בעזרת האטת קצבי המוות, עובדה שנלמדה בכיתה כדי לחסום מלמעלה (סטוכסטית) את Erlang-A על ידי מודל $M/M/\infty$ מתאים (שהוא תמיד ארגודי).

4.3. נניח שלקוח מוצא את כל השרתים עסוקים, ובנוסף ממתניים j לקוחות בתור ($0 \leq j$). נניח שללקוח זה סבלנות סופית המתפלגת $\exp(\theta)$. נסמן ב- $P_j\{Sr\}$ את ההסתברות שהלקוח הנידון יקבל שירות. הוכיחו

$$P_j\{Sr\} = \frac{n\mu}{n\mu + (j+1)\theta}, \quad j \geq 0.$$

תשובה:

נוכיח באינדוקציה על $j = 0, 1, 2, \dots$:

נשתמש בתכונת חוסר הזיכרון של ההתפלגות המעריכית ונקבל כי

$$P_0\{Sr\} = \frac{n\mu}{n\mu + \theta}$$

נניח כי הנ"ל מתקיים עבור $j-1$, ונוכיח באינדוקציה כי מתקיים עבור j .

$$P_j\{Sr\} = \frac{n\mu + j\theta}{n\mu + (j+1)\theta} \times P_{j-1}\{Sr\} = \frac{n\mu + j\theta}{n\mu + (j+1)\theta} \times \frac{n\mu}{n\mu + j\theta}$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{מכפלה} \\ \text{"טלסקופית"}}}{=} \frac{n\mu}{n\mu + (j+1)\theta}, \quad j \geq 0.$$

כאשר המעבר השני הוא לפי הנחת האינדוקציה.

q.e.d.

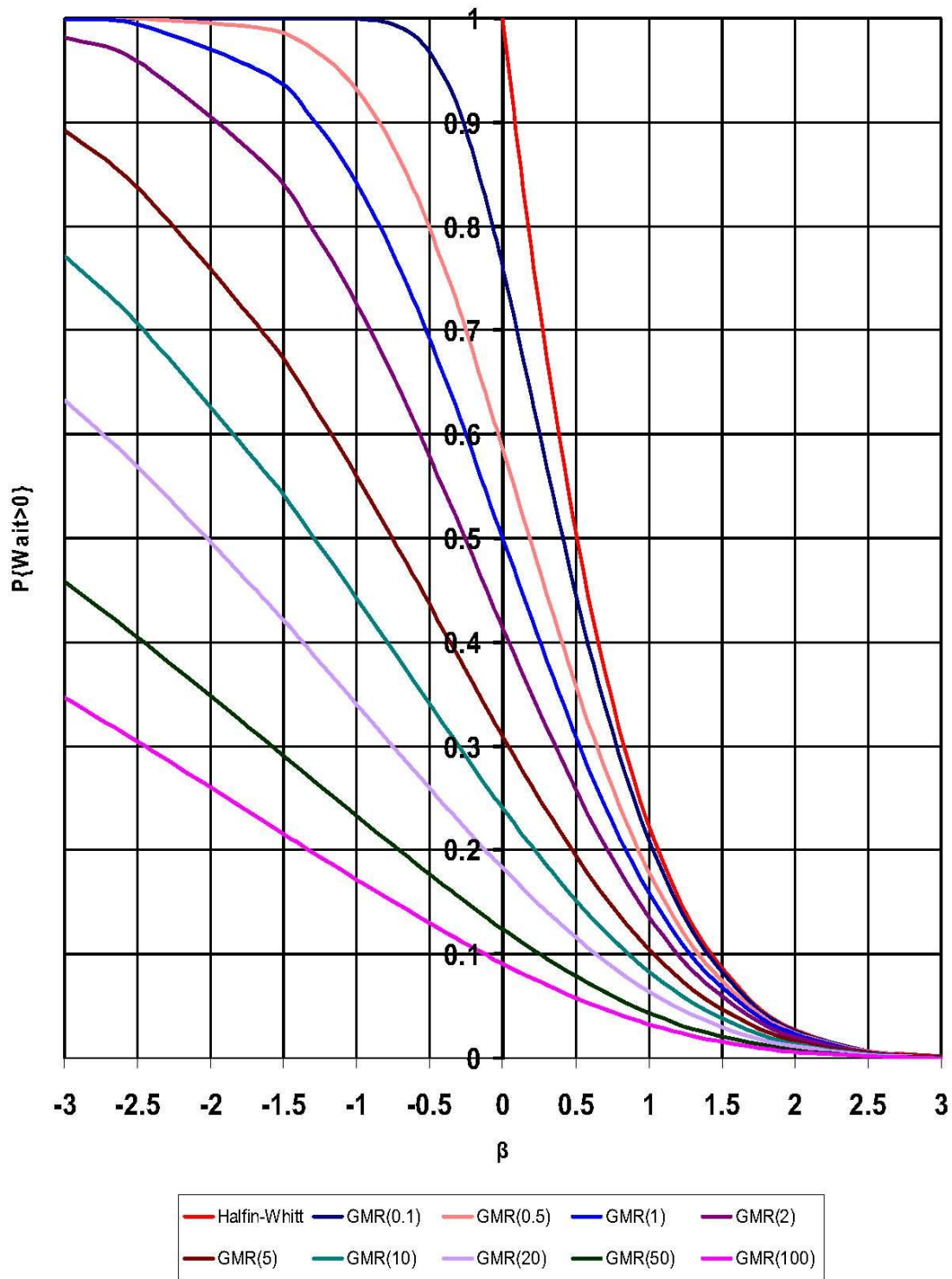
4.4. כיצד ניתן לחשב (עקרונית) בעזרת סעיף 4.3 את ההסתברות לנטישה? הסבירו תשובתכם.

תשובה:

$$P(Ab) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{n+j} [1 - P_j(Sr)]$$

ההסתברות לנטוש כאשר מוצאים j בתור ($n+j$ במערכת) היא ההסתברות שלקוח יגיע במצב זה כפול ההסתברות שאם הוא הגיע במצב זה הוא לא יקבל שרות. חישוב זה מסתמך על תכונת PASTA.

Erlang-A: $P\{\text{Wait} > 0\} = \alpha$ vs. β ($N = R + \beta\sqrt{R}$)



GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\frac{\theta}{\mu} = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Gen. Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$N \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multi-nomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ ($i \neq j$)	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(m, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; m \geq 1$	$k = m, m+1, \dots$	$\left[\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t} \right]^m$	$\frac{mp}{p}$	$\frac{mq}{p^2}$	Number of trials till m -th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$\exp\{-\lambda(1 - e^t)\}$	λ	λ	
Hyper-geometric	$X \sim HG(N, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N + M$	$\max(0, n - M) \leq k$ $k \leq \min(n, N)$	$\sum_k e^{tk} p(k)$	$\frac{n \cdot N}{N+M}$	$n \cdot \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M-n} \cdot \frac{N}{N+M-1}$	N – special elements M – ordinary ones n – sample size k – special in sample
		Density Function						
Beta	$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	Complicated	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ $= (x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp \left\{ t\mu + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2 \right\}$	μ	σ^2	