



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגלת : גלית יום-טוב

תאריך הבחינה : 23.04.2009

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד ב' – סמסטר חורף תשס"ט 2009

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 30 עמודים, כולל עמוד זה ועמוד אחרון של נוסחאות מהסתברות.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

תרגילי בית	מתוך 10 נקודות	שאלה 1	ניקוד:
הרצאות ותרגולים\בחינות קודמות	מתוך 10 נקודות	שאלה 2	
יישום	מתוך 17 נקודות	שאלה 3	
תיאוריה	מתוך 8 נקודות	שאלה 4	

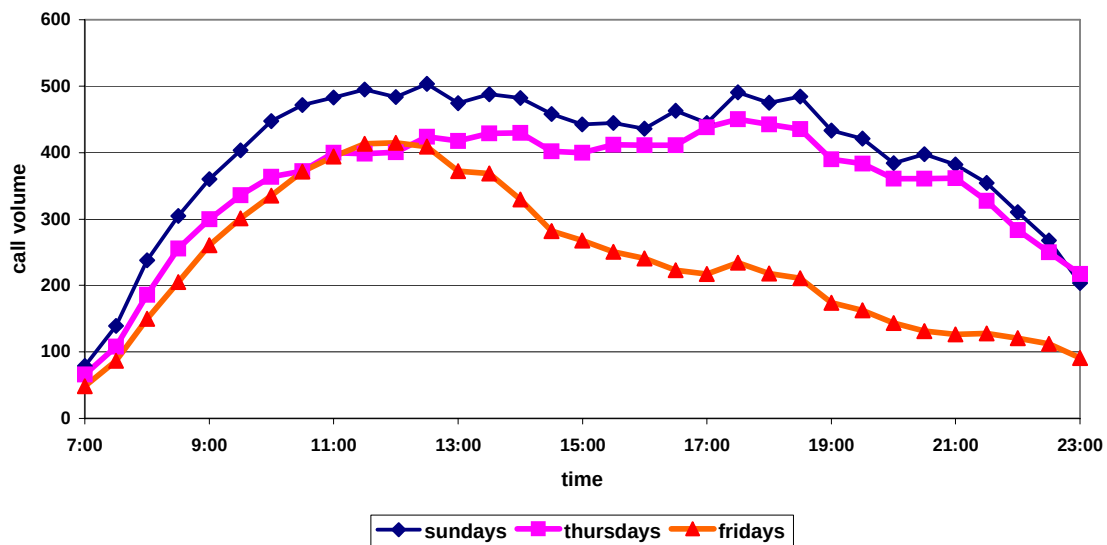
סה"כ _____ מתוך 45 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 – תרגילי בית (10 נקודות).

חלק 1 - SEESat

1.1 נתונים סיכומים של נתוני שיחות טלפון, במוקד של חברת תקשורת ישראלית, על פני שנה. הנתונים כוללים, לכל אינטרוול זמן של 1/2 שעה, את כמות השיחות הנכנסות למוקד. מוגדרים 33 אינטרוולים במהלך יום עבודה, בין השעות 7:00 ל- 23:30. הגרף הבא מציג את ממוצע מספר המופעים בכל אינטרוול זמן (חצי שעה) במהלך היום, בימי ראשון, חמישי ושישי בחודש יוני.



תארו במדויק ככל שתוכלו כיצד ניתן לייצר את הגרף הנ"ל בעזרת תוכנת SEESat. (לשם תזכורת הפונקציות של התוכנה, צרפנו תצוגה של שני עמודים מממשק התוכנה בעמוד הבא).

תשובה:

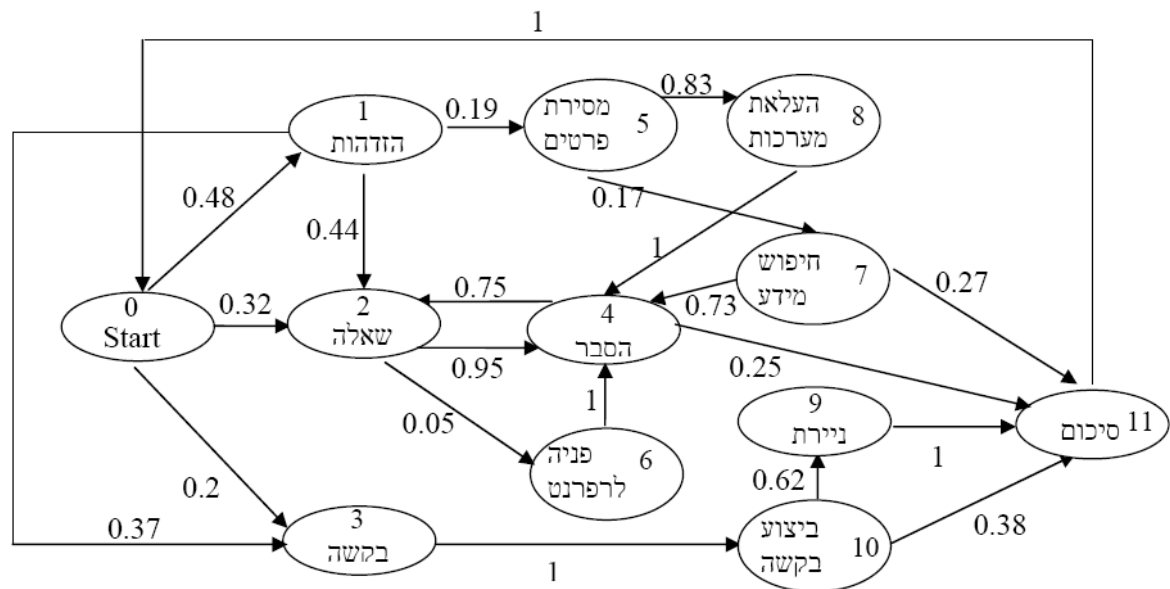
נבחר במשתנה Arrivals to system, ב- options באופציה count, בסוג שרות total. וברזולוציה של 30 דקות, משעה 7:00 עד 23:30. נעבור לבחירת התאריכים ונסמן את יוני 2004. נבחר באופציית ה- aggregated days ונסמן את ימי ראשון, חמישי ושישי.

בשנת 2007 בוצע בפקולטה לתעשייה וניהול פרויקט שנתי בשיתוף פעולה עם מוקד טלפוני של בנק ישראלי גדול. אחת ממטרות הפרויקט הייתה: חקר תהליך ביצוע שיחות מסוג שירות מסוים. על מנת לאפיין את תהליך השיחה ביחידת שירות זו, בוצעו מדידות ראשוניות על ידי האזנה למוקדנים. לאחר ניתוח השיחות, נמצא כי ניתן לחלק את השיחה לפאזות עיקריות (אלמנטים). אלמנטים אלו מתאימים לכל השיחות בשירות הנדון.

האלמנטים העיקריים המרכיבים שיחה (אין צורך להתעמק בתיאור האלמנטים):

1. **הזדהות**- אם ללקוח יש קוד סודי והוא מקיש אותו במענה הקולי אזי הזיהוי הוא אוטומאטי. אם הקוד לא הוקש, מתבקש הלקוח להזדהות מול המוקדן ולענות על מספר שאלות לאימות הנתונים.
2. **שאלה**- שאלה של לקוח. לדוגמא הבהרה של מכתב שהתקבל מהבנק, בירורים לגבי אופן התשלום, ריבית ועוד.
3. **בקשה**- בקשה של הלקוח.
4. **הסבר**- מתן הסבר על-ידי הבנקאי לשאלות הלקוח.
5. **מסירת פרטים**- מסירת פרטים על-ידי הלקוח לבנקאי, כדי לאפשר לבנקאי לבצע פעולות מסוימות, לדוגמא משלוח פקס עם פרטי הלקוח.
6. **פנייה לרפרנט**- אם הבנקאי לא מצא תשובה, יש באפשרותו לפנות לבנקאי ותיק יותר (הרפרנט) ולבקש ממנו עזרה. הפנייה לרפרנט **קוטעת** את השיחה.
7. **חיפוש מידע**- מעבר על היסטוריה של הלקוח לצורך מציאת מידע.
8. **העלאת מערכות**- בנקאים עובדים מול שלוש מערכות. על מנת להתחיל את תהליך הטיפול בלקוח, יש צורך לחכות ששלושת המערכות תעלנה על מסך הבנקאי. זמן המתנה זה כלול באלמנט.
9. **ניירת**- כתיבת הוראות במחשב כגון- הוראה למשלוח פקס ועוד. כמעט ואין ביצוע ניירת פיזית כגון שליחת מכתבים.
10. **בצוע בקשה**- ביצוע בקשת הלקוח על-ידי בנקאי, כוללת את כל הפעולות הנדרשות מהבנקאי, לדוגמא שליחת מכתב, ביצוע שינויים ועוד.
11. **סיכום**- תיעוד השיחה במחשב.

בעזרת נתוני ההאזנות, חושבו פרופורציות המעברים (הסתברויות מעבר) בין האלמנטים (המצבים). שרשרת מרקוב, כמתואר להלן, מהווה מודל לתהליך ביצוע האלמנטים על ידי מוקדן כלשהו, ממחלקת השירות שנחקרה בפרויקט.



נניח שההתפלגות הסטציונרית של השרשרת נתונה על ידי $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{11})$. לאחר הגדרת האלמנטים (הפאזות) בשיחה, בוצע חקר זמנים לצורך אמידת ממוצע משכי האלמנטים והתפלגותם.

עבור כל אלמנט התקבלו הממוצעים הבאים:

מספר	תיאור אלמנט	ממוצע משך האלמנט (שניות)
1	הזדהות	46
2	שאלה	120
3	בקשה	44
4	הסבר	180
5	מסירת פרטים	64
6	פניה לרפרנט	260
7	חיפוש מידע	20
8	העלאת מערכות	46
9	ניירת	61
10	ביצוע בקשה	20
11	סיכום	10

לצורך פתרון השאלות הבאות, ניתן להניח שהתפלגויות משך כל אלמנט הן מעריכיות עם תוחלות הנתונות בטבלה (המציאות לא רחוקה מהנחה זו). בנוסף, התברר ששיחות למוקדן מגיעות לפי תהליך פואסון, בקצב של 12 שיחות לשעה. אם מוקדן עסוק, השיחות עוברות למוקדן אחר.

לאחר חקר הזמנים, משתתפי הפרויקט הגיעו למסקנה שאפשר לתאר את תהליך השיחות שמבצע מוקדן על-ידי תהליך קפיצה מרקובי $X = \{X_t, t \geq 0\}$, כאשר X_t מתאר את המצב (אלמנט, פאזה) של שיחה בזמן t .

1.2.1 עבור התק"מ X , נסמן ב- P את מטריצה הסתברויות המעבר שלו וב- q את וקטור קצבי עזיבה. השלימו את הערכים הבאים:

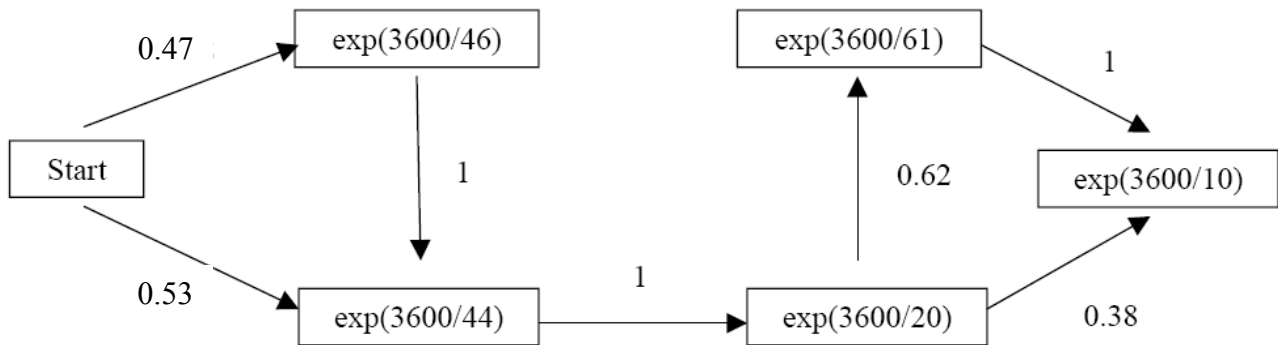
$p_{12} = 0.44$	$q_0 = 12$
$p_{11} = 0$	$q_2 = \frac{3600}{120} = 30$
$p_{26} = 0.05$	$q_4 = \frac{3600}{180} = 20$
$p_{24} = 0.95$	$q_{11} = \frac{3600}{10} = 360$

1.2.2 כיצד מתפלג משך שיחה? תארו במדויק ככל שתוכלו.

משך השיחה מתפלג לפי התפלגות Phase Type כך שהמעברים בין הפאזות מוגדרים בדיאגרמה שנתונה בתחילת השאלה, וזאת ללא מעבר ממצב 11 למצב 0. זמני השהיה בכל פאזות הם מעריכיים עם תוחלות הנתונות בטבלה.

1.2.3 מהי תוחלת משך השיחה של לקוח שמתקשר עם "בקשה"?

אחוז השיחות שעוברות בקשה מכלל השיחות הוא: $0.2 + 0.48 \cdot 0.37 = 0.3776$, כאשר 53 אחוז מהן עוברות ישירות ל"בקשה" $\left(\frac{0.2}{0.3776} = 0.53\right)$ ו- 47% דרך הזדהות $\left(\frac{0.37 \cdot 0.48}{0.3776} = 0.47\right)$.



נגדיר T - זמן שיחה עם "בקשה".

$$E[T] = 44 + 0.47 \cdot 46 + 20 + 0.62 \cdot (61 + 10) + 0.38 \cdot 10 = 133.44$$

חלק 3 – ניתוח נתוני דוח ACD

להלן טבלה המסכמת חלק מנתוני דוח ACD ממוקד שרות איטלקי.

	ASA	Aban Time	ACD Calls	Aban Calls	Avail Time	Staffed Time
Totals	29.99	126.24	6719	929	63:27:00	1088:50:00
8:00	475.00	0.00	1	0	5:25:00	13:32:00
8:30	8.73	15.55	113	11	3:06:00	23:48:00
9:00	4.86	0.00	239	0	7:39:00	41:51:00
9:30	17.08	16.46	391	39	1:05:00	44:48:00
10:00	25.03	10.71	432	28	1:21:00	53:06:00
10:30	1.16	0.00	392	0	5:12:00	54:34:00
11:00	0.15	4.50	357	2	6:48:00	53:56:00
11:30	0.00	0.00	350	0	9:12:00	60:02:00
12:00	5.59	13.17	334	12	3:00:00	58:29:00
12:30	11.90	9.84	337	19	1:05:00	58:47:00
13:00	7.40	9.40	298	15	1:57:00	33:35:00
13:30	11.43	13.09	289	23	1:27:00	33:15:00
14:00	6.35	15.09	323	22	1:27:00	55:13:00
14:30	6.40	13.10	345	21	1:51:00	57:48:00
15:00	22.76	18.05	432	22	1:28:00	58:17:00
15:30	2.41	4.57	574	7	2:35:00	57:55:00
16:00	1.08	5.00	533	1	4:38:00	58:06:00
16:30	50.28	36.57	406	121	1:00:00	59:17:00
17:00	163.99	50.97	431	317	0:00:00	53:53:00
17:30	426.70	214.25	128	216	0:00:00	31:37:00
18:00	584.69	737.27	13	49	0:00:00	26:08:00

1.3.1. תארו כיצד יש לחשב את סך ההגעות, % הנוטשים ותוחלת זמן ההמתנה באינטרוול של חצי שעה.

תשובה:

$$\text{Average waiting time} = \frac{\text{Avg Speed Ans} \times \text{ACD Calls} + \text{Avg Aban Time} \times \text{Aban Calls}}{\text{Number of arrivals}},$$

where

$$\text{Number of arrivals} = \text{ACD Calls} + \text{Aban Calls}.$$

$$\text{Fraction of abandoning customers} = \frac{\text{Aban Calls}}{\text{Number of arrivals}}.$$

1.3.2. הניחו כי ברשותכם דו"ח ה-ACD היומי המלא. תארו בפירוט כיצד תאמדו את ממוצע זמן הסבלנות? אם הינכם משתמשים בממוצע יומי של מדד ביצוע כלשהו, הציגו את אופן חישובו באמצעות הנתונים שבדו"ח. הניחו כי ממוצע הסבלנות קבוע במהלך היום.

תשובה:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{\text{Total waiting time}}{\# \text{ abandon}} = \frac{\sum_i \text{Arrivals}_i \times \text{Average_Wait}_i}{\sum_i \text{Arrivals}_i \times \% \text{Abandon}_i}$$

כאשר האינדקס i מתייחס לשעה מתחילת יום העבודה.

1.3.3. תארו כיצד ניתן להעריך את מספר המוקדנים שנתנו שרות בכל אינטרוול זמן. האם הנוסחה תהיה זהה גם באינטרוול 13:00-13:30?

תשובה:

נחשב את מספר המוקדנים הפעילים בעזרת:

$$\text{Staffing} = \frac{\text{Staffed time (in hours)}}{1/2 \text{ hour}} .$$

על נתון זה יש להוסיף את כמות המוקדנים בהפסקה (ערך זה יהיה גבוה יותר בשעת הצהרים).

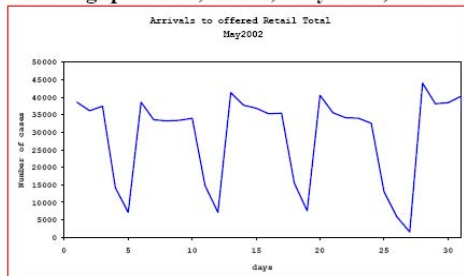
שאלה 2 – הרצאות/תרגולים/בחינות קודמות (10 נקודות).

חלק 1. חוק Little

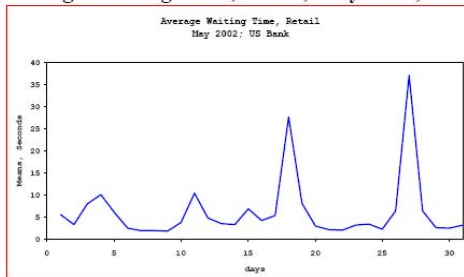
2.1.1 מצורפים בזאת 3 עמודים שהוצגו בהרצאה, המתארים את קיומו או אי-קיומו של חוק Little במערכות שונות (בכל עמוד מוצגים 3 גרפים). הסבירו, עבור כל עמוד, האם נראה שחוק Little מתקיים, ומדוע הוא צפוי/לא צפוי להתקיים במקרה זה.

גרף 1: ימי חודש מאי 2002 Little's Law for Retail calls, May 2002: US Bank

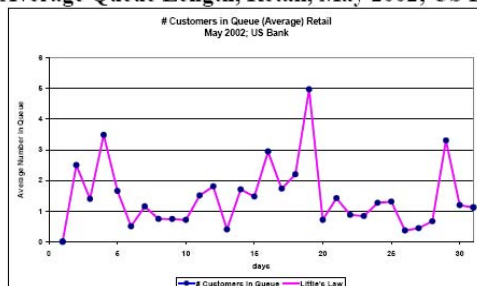
λ : Throughput Rate, Retail, May 2002; US Bank



W: Average Waiting Time, Retail, May 2002; US Bank (W_q)



L: Average Queue Length, Retail, May 2002; US Bank (L_q)



Date	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
λ	38476	36144	37414	14194	7107	38587	33572	33220	33349	34009	14807	7141	41293	37653	36872	35266
W	5.6	3.3	8.0	10.0	6.1	2.6	1.9	1.9	1.8	3.8	10.5	4.8	3.5	3.4	6.8	4.2
$\lambda * W$	2.49	1.39	3.48	1.65	0.50	1.14	0.74	0.74	0.69	1.50	1.79	0.40	1.69	1.47	2.91	1.71
L	2.50	1.40	3.49	1.66	0.50	1.15	0.74	0.74	0.71	1.51	1.81	0.40	1.71	1.47	2.94	1.73

Date	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
λ	35338	15533	7530	40534	35493	34070	34005	32512	13100	5909	1558	43980	38163	38416	40284
W	5.4	27.6	8.1	3.0	2.1	2.1	3.2	3.5	2.3	6.4	37.0	6.5	2.7	2.5	3.2
$\lambda * W$	2.19	4.96	0.71	1.41	0.87	0.83	1.25	1.30	0.35	0.44	0.67	3.29	1.18	1.11	1.47
L	2.20	4.97	0.71	1.42	0.88	0.84	1.27	1.31	0.37	0.44	0.67	3.30	1.20	1.12	1.48

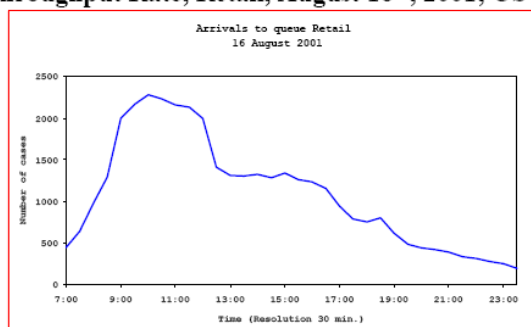
תשובה: חוק Little מתקיים/לא מתקיים: צפוי/לא צפוי (סמנו בעיגול את התשובה הנכונה).

הסבר:

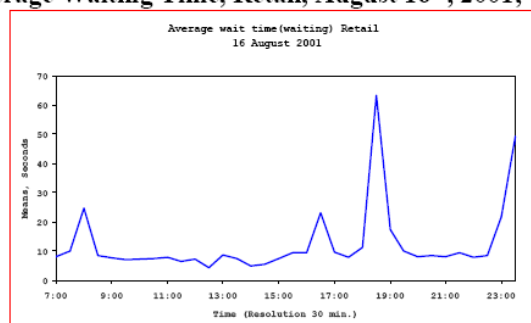
גרף 1 מאשש את קיומו של חוק Little ברזולוציה של ימים. בסוף כל יום מוקד השרות נסגר ולכן ברזולוציה זו אנו מצפים שחוק Little יתקיים: גירסת אופק סופי המתחיל ומסתיים ריק.

Little's Law for Retail calls, August 16th, 2001: US Bank

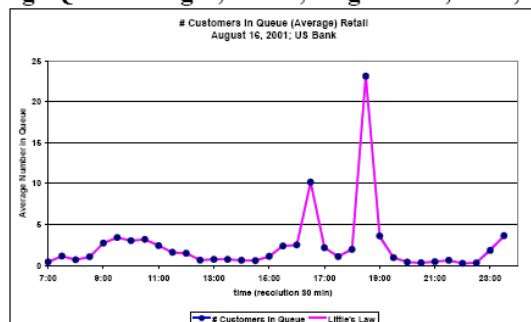
λ : Throughput Rate, Retail, August 16th, 2001; US Bank



W: Average Waiting Time, Retail, August 16th, 2001; US Bank



L: Average Queue Length, Retail, August 16th, 2001; US Bank



Time	7:00	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00	12:30	13:00	13:30	14:00	14:30	15:00
λ	443	639	987	1291	1998	2166	2278	2231	2158	2135	2000	1408	1311	1303	1323	1285	1340
W	1.7	3.2	1.2	1.5	2.4	2.8	2.4	2.6	2.0	1.3	1.3	0.8	1.0	1.0	0.8	0.8	1.5
$\lambda * W$	0.42	1.14	0.68	1.06	2.72	3.42	3.01	3.18	2.44	1.55	1.47	0.64	0.72	0.72	0.62	0.59	1.09
L	0.42	1.14	0.68	1.06	2.72	3.40	3.02	3.17	2.41	1.59	1.48	0.64	0.72	0.72	0.62	0.57	1.11

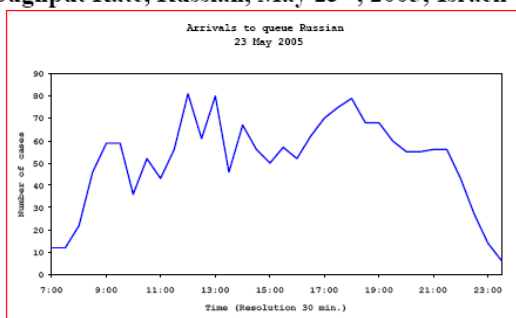
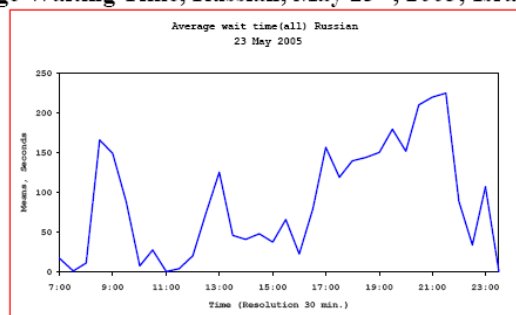
Time	15:30	16:00	16:30	17:00	17:30	18:00	18:30	19:00	19:30	20:00	20:30	21:00	21:30	22:00	22:30	23:00	23:30
λ	1258	1235	1157	942	788	752	803	619	485	437	421	386	336	311	274	251	193
W	3.5	3.6	15.8	4.2	2.4	4.9	51.9	10.0	3.5	1.7	1.3	2.1	3.3	1.4	2.0	14.3	32.6
$\lambda * W$	2.422	2.45	10.2	2.173	1.06	2.05	23.16	3.43	0.95	0.41	0.314	0.44	0.62	0.24	0.30	2.00	3.50
L	2.37	2.49	10.17	2.16	1.07	1.94	23.11	3.59	0.95	0.40	0.31	0.45	0.62	0.24	0.30	1.83	3.63

תשובה: חוק Little מתקיים/לא מתקיים; צפוי/לא צפוי (סמנו בעיגול את התשובה הנכונה).

הסבר:

גרף 2 מאשש את קיומו של חוק Little גם ברזולוציה של חצאי שעות, מקרה זה הוא מפתיע, אך מתקיים כיוון שהמערכת גדולה ומגיעה מהר למצב יציב, וכן בגלל שזמני השרות וזמני ההמתנה קצרים (דקות) בהרבה מהרזולוציה בה אנו בוחנים את המערכת: גירסת מצב יציב.

Little's Law for Russian calls, May 23rd, 2005: Israeli Telecom

 λ : Throughput Rate, Russian, May 23rd, 2005; Israeli TelecomW: Average Waiting Time, Russian, May 23rd, 2005; Israeli TelecomL: Average Queue Length, Russian, May 23rd, 2005; Israeli Telecom

Time	7:00	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00	12:30	13:00	13:30	14:00	14:30	15:00
λ	12	12	22	46	59	59	36	52	43	56	81	61	80	46	67	56	50
W	16.9	1.3	11.4	166.0	148.9	88.7	7.9	27.4	0.7	3.9	20.3	74.9	125.4	46.3	41.4	47.9	37.7
$\lambda * W$	0.11	0.01	0.14	4.24	4.88	2.91	0.16	0.79	0.02	0.12	0.91	2.54	5.57	1.18	1.54	1.49	1.05
L	0.08	0.04	0.14	3.97	4.88	3.18	0.16	0.79	0.02	0.12	0.88	2.57	5.32	1.44	1.36	1.67	1.00

Time	15:30	16:00	16:30	17:00	17:30	18:00	18:30	19:00	19:30	20:00	20:30	21:00	21:30	22:00	22:30	23:00	23:30
λ	57	52	62	70	75	79	68	68	60	55	55	56	56	43	27	14	6
W	65.7	22.4	79.2	156.6	118.6	139.3	143.6	150.2	179.2	151.3	209.5	219.5	224.7	88.4	33.7	107.0	0.7
$\lambda * W$	2.08	0.65	2.73	6.09	4.94	6.11	5.42	5.68	5.97	4.62	6.40	6.83	6.99	2.11	0.51	0.83	0.00
L	2.13	0.62	2.34	5.51	5.82	5.61	6.03	3.04	8.63	4.34	5.99	7.18	6.85	2.61	0.51	0.83	0.00

תשובה: חוק Little מתקיים (לא מתקיים: צפוי) לא צפוי (סמנו בעיגול את התשובה הנכונה).

הסבר:

גרף 3 מראה לנו שאכן ברזולוציה של חצאי שעות, חוק Little לא תמיד מתקיים. הסיבה שהוא לא מתקיים כאן היא שמקרה זה מתאר מוקד קטן העובד בעומס גבוה. במוקד קטן זה יש לקוחות הממתינים יותר מחצי שעה, ולכן ברזולוציה שכזו יש השפעה הדדית של חצאי שעות עוקבים הגורמים לנוסחת Little לא להתקיים.

2.1.2. עבור המקרים בהם נוסחת Little לא מתקיימת, הציעו אלטרנטיבה שסביר שתעבוד, המקשרת בין קצב מופע, מספר השיחות במערכת בזמן שהיה במערכת.

תשובה:

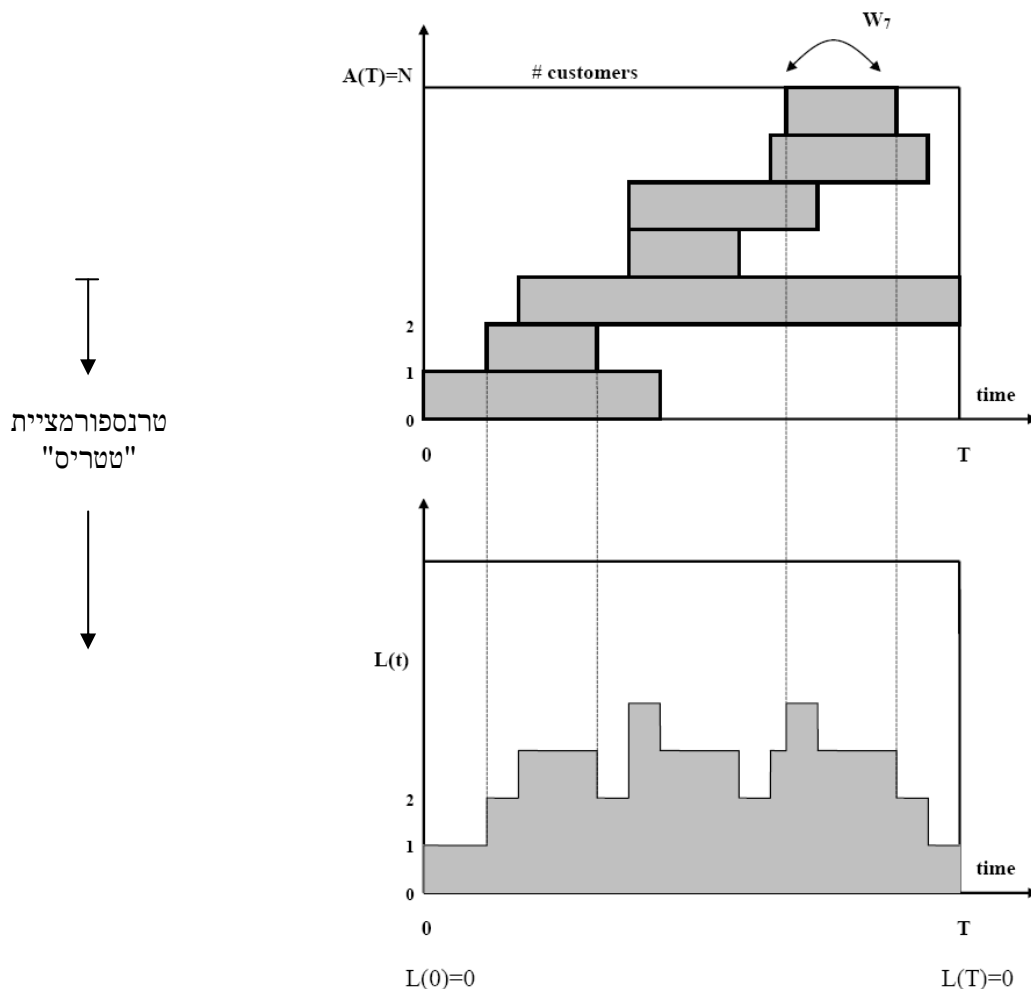
ניתן להשתמש בנוסחה לחישוב ה-offered-load, שבעצם מהווה אנלוג לנוסחת Little במערכת עם דינמיקה תלוית-זמן:

$$L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(u) P(W > t - u) du$$

כאשר $L(t)$ – הוא ממוצע מספר האנשים במערכת בזמן t , W – משתנה מקרי המתאר את זמן שהיה במערכת, ו- $\lambda(u)$ – קצב המופע בזמן u .

2.1.3. הוכחת חוק Little באופן סופי (מערכת דטרמיניסטית):

נקבע אינטרוול זמן סופי $[0, T]$. נסמן N – מספר הלקוחות שעברו במערכת בזמן האינטרוול, W_i – זמן שהיה של לקוח i , $L(t)$ – מספר הלקוחות במערכת בזמן t , λ – קצב הגעת לקוחות למערכת. הוכיחו בעזרת הגרף הבא את חוק Little: $E[L] = \lambda * E[W]$. (כתבו את ההוכחה בעמוד הבא.)



תשובה:

נסמן $S = W_1 + W_2 + \dots + W_N$, סך כל זמני השהיה, של כל הלקוחות, בזמן $[0, T]$.

על כן מתקיים: $E[W] = S / N$, ו- $\lambda = N / T$.

על סמך טרנספורמצית טוריס מתקיים: $E[L] = \frac{1}{T} S$.

מהנ"ל נובע:

$$E[L] = \frac{S}{T} = \frac{N}{T} \frac{S}{N} = \lambda E[W]$$

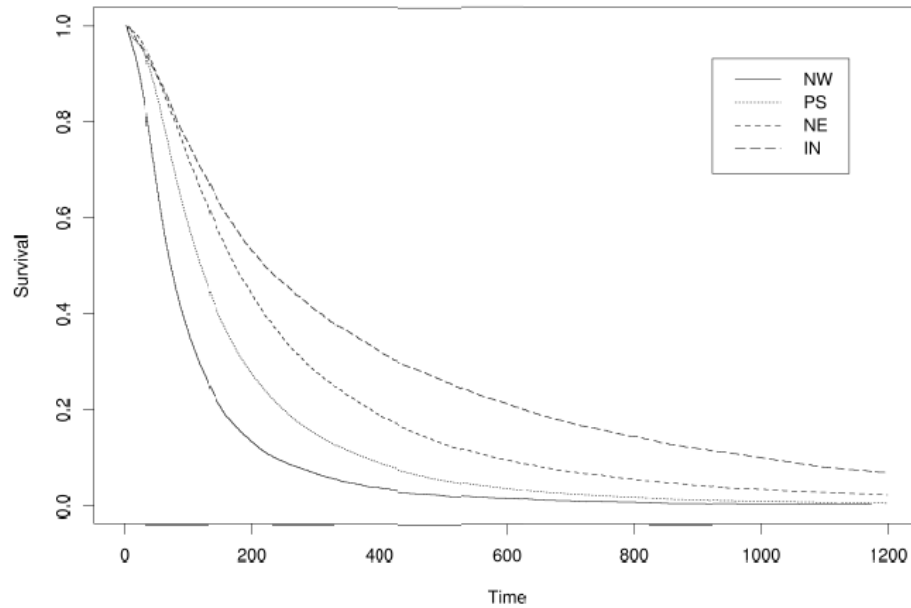
מש"ל.

חלק 2. פונקציות שרידות ופונקציות סיכון של זמני שירות

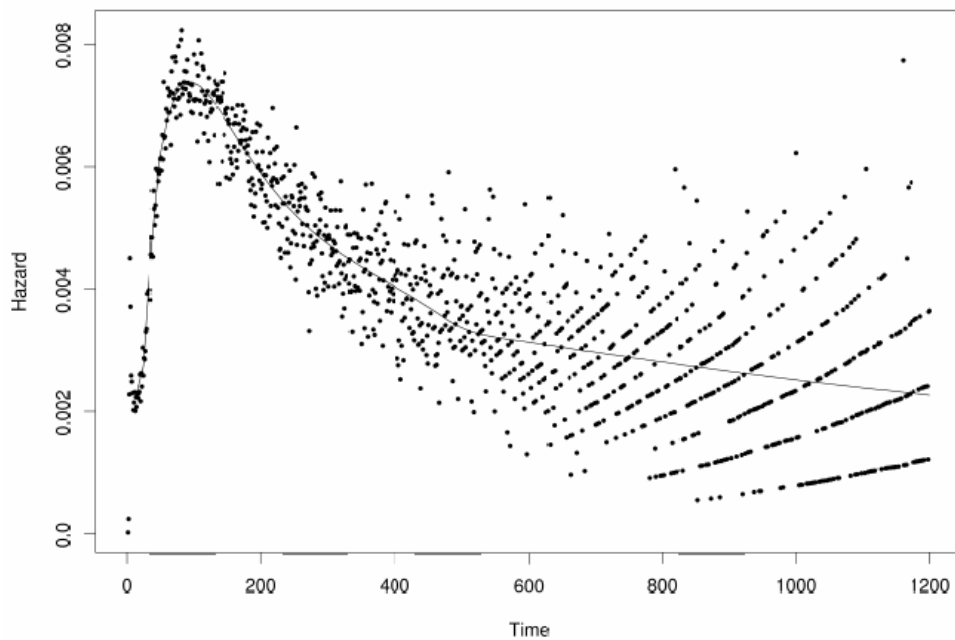
שני הגרפים שלהלן מבוססים על נתוני מוקד שירות טלפוני של בנק ישראלי קטן. נותחו ארבעה סוגי שירות עיקריים: NW, NE, IN, PS. גרף 1 מתאר פונקציות שרידות (survival functions) של ארבעת סוגי השירות. נקודות בגרף 2 הן אמדים לפונקצית הסיכון (hazard rate) של זמן השירות הכולל (כל סוגי השירות ביחד), ברזולוציה של שנייה אחת. הקו בגרף 2 הוא אמד לפונקצית הסיכון אחרי החלקה.

גרף 1

Nov-Dec



גרף 2



2.2.1 איך הייתם אומדים את תוחלת זמן השירות של סוג שירות מסוים, לו הייתה נתונה לכם רק פונקציית השרידות (survival) שלו $S(x), x \geq 0$?

תשובה:

$$\text{נשתמש בנוסחת הזנב: } E[S] = \int_0^{\infty} S(x) dx.$$

2.2.2 איך הייתם אומדים את תוחלת זמן השירות של סוג שירות מסוים, לו הייתה נתונה לכם רק פונקציית הסיכון (hazard rate) שלו $h(x), x \geq 0$?

תשובה:

ניתן לקבל את פונקציית השרידות מפונקציית הסיכון: $S(x) = \exp\left\{-\int_0^x h(u) du\right\}$ ואחר כך להשתמש בנוסחת הזנב.

2.2.3 סדרו את ארבעת סוגי השירות לפי תוחלתם (מהקצרה ביותר לארוכה ביותר)

תשובה:

$$E(NW) < E(PS) < E(NE) < E(IN)$$

2.2.4 הסבירו את הצורה של "נקודות המסודרות על קו עולה", הבולטת בחלק הימני של גרף 2.

הערה:

האמידה של פונקצית הסיכון בגרף 2 נעשתה באופן הבא:

- נסמן ב A_k את מספר התצפיות עם זמן שירות שווה ל- k שניות.
- נסמן ב η_k את מספר התצפיות עם זמן שירות שגדול או שווה מ- k שניות.
- האמידים לפונקצית הסיכון בשניה k (נקודות בגרף 2) חושבו ע"י $\widehat{h(k)} = A_k / \eta_k$.

הסבר:

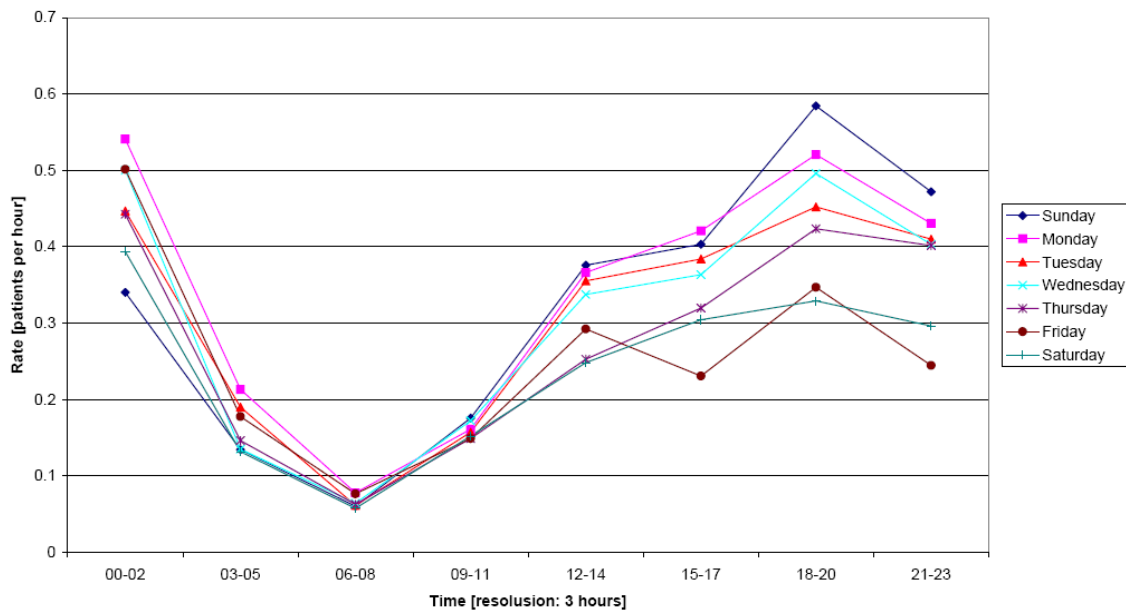
הנקודות המסודרות על קו עולה מתאימות ל- $A_k = 1$, $A_k = 2$, ..., משום ש- η_k יורד כאשר הזמן עולה, קוים אלו עולים. (למשל הקו התחתון מתאים ל- $A_k = 1$)

שאלה 3 – יישום: בתי חולים (17 נקודות).

בית חולים כולל מחלקות אשפוז שונות. בכל מחלקה מספר קבוע של מיטות - N (בין 10 ל-50). כאשר מוחלט במיון לאשפוז חולה במחלקה כלשהי, מתבצע ברור האם אכן יש מקום במחלקה. במידה וכל המיטות תפוסות (המחלקה מלאה), החולה מועבר לאשפוז במחלקה אחרת, בה מטפלים בו. בדרך כלל רמת הטיפול במחלקה החלופית פחות טובה לחולה, כיוון שהצוות הסיעודי בה פחות מיומן בטיפול בבעיותיו הספציפיות. מצב זה אינו רצוי ולכן הוחלט לעקוב אחרי אחוז החולים שאין להם מקום במחלקה אליה יועדו לראשונה.

3.1. הגרף הבא מראה את קצב הגעת חולים למחלקה מסוימת במהלך יממה, לכל יום בשבוע.

Average Arrival Rate per Hour, Ward A, 2004-2008



3.1.1. תארו את "צורתו" של תהליך ההגעה ביום ראשון, היום העמוס בשבוע. בפרט, מהו קצב המופע השעתי המקסימלי בשבוע?

תשובה: קצב ההגעה יורד מחצות הלילה עד הבוקר (6-8), מגיע למינימום של כ-0.05 לקוחות בשעה, ואז מתחיל לעלות ומגיע לשיא של כ-0.6 לקוחות בשעה, בין השעות 18-20 ומשם מתחיל לרדת שוב.

3.1.2. האם הצורה זהה לכל ימי השבוע? אלו ימים דומים ואלו שונים?

תשובה: הצורה זהה לימים ראשון-חמישי ושונה בסוף השבוע (לשישי ושבת התנהגות דומה לימי השבוע בין השעות 00-14, אך שונה מהם בשעות אחה"צ והערב. בשעות אלו, ביום שישי, נראית תבנית שונה, ושבת די דומה לימות השבוע אך עם שינויים יותר מתונים).

3.1.3. האם סביר שתהליך ההגעה הוא תהליך פואסון הומוגני בזמן? הסבירו.

תשובה: כיוון שקצב ההגעה בבירור אינו קבוע בזמן, לא יתכן שתהליך ההגעות הוא פואסון הומוגני בזמן.

3.1.4. כיצד הייתם בודקים סטטיסטית את ההשערה שהתהליך הוא פואסוני הומוגני בזמן?

תשובה:

יש לחשב את הזמנים הבין-מופעיים, ולבדוק האם הם מהתפלגות מעריכית עם פרמטר קבוע. בדיקה ראשונית ע"י חישוב CV ובדיקה האם הוא קרוב ל-1, ובדיקה ויזואלית של היסטוגרמת נתוני הזמנים הבין מופעיים. בדיקה נוספת QQPlot: ממינים את נתוני הזמנים הבין-מופעיים,

ומחשבים $\hat{F}_N(x)$ ע"י חישוב ממוצע כמות הנתונים הקטנים מ- x (ע"י $\hat{F}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{\{X_i \leq x\}}$).

עושים להם טרנספורמציה ע"י הנוסחה $-\ln(1 - \hat{F}(x))$ ומשווים אותם לקו ישר. שיפוע הגרף הוא λ .

3.1.5. האם סביר שתהליך ההגעה הוא תהליך פואסון לא הומוגני בזמן?

תשובה:

כן, יתכן שתהליך ההגעות הוא פואסוני לא הומוגני בזמן.

3.1.6. כדי לבדוק את ההשערה שהתהליך הוא פואסוני לא הומוגני בזמן, הוצגה בתרגול שיטה

המבוססת על הנוסחה הבאה: $R_{ij} = (J(i) + 1 - j) \left(-\ln \left(\frac{L - T_{ij}}{L - T_{i,j-1}} \right) \right)$. נוסחה זו מהווה קלט

לתרשים QQ-Plot. מה בודקים בעזרת תרשים ה-QQPlot? הסבירו בקצרה.

תשובה:

אם התהליך המקורי הוא פואסון (לא הומוגני בזמן), עם קצבים קבועים למקוטעין (על פני אינטרוולים באורך L) אזי, נוסחת הטנספורמציה, ממירה את הזמנים הבין-מופעיים לזמנים מהתפלגות מעריכית עם קצב 1. ולכן, ב-QQPlot בודקים התאמה של ה- R_{ij} לקו ישר בשיפוע 45° .

נניח, לצורך השאלה, שחולה שוהה במחלקה זמן המתפלג מעריכית עם ממוצע כלשהו $\frac{1}{\mu}$ (הנמדד

בימים), ושתהליך הגעות חולים למחלקה (מסוימת) הוא פואסוני, עם קצב הגעה של λ חולים

ביום. ניתן לתאר את הדינמיקה של מספר החולים במחלקה אחת ע"י מודל Erlang-B

(M/M/N/N), שבו מספר ה"שרתים" הוא מספר המיטות. (הפרמטרים המגדירים מודל זה הם

כרגיל: (λ, μ, N)).

3.2. בבדיקה מעמיקה התגלו הבדלים מהותיים בין רמת השרות התפעולית הניתנת במחלקות השונות. בטבלה מופיעים כמה מנתוני המחלקות, כפי שנאספו ממערכות המידע של בית החולים.

התאימו לכל מחלקה את משטר השירות בה היא מתפקדת (ED, QED, QD). הסבירו

תשובתכם בקצרה. חשבו את העומס המוצע (offered-load) של כל מחלקה. קיבעו מהו פרמטר

איכות השרות המתאים לכל מחלקה. (למשל, כאשר $N \approx R + \delta R$, δ הוא פרמטר איכות

השירות).

מחלקה	מספר מיטות	ממוצע כמות חולים שמופנים למחלקה ביום	זמן אשפוז ממוצע בימים	אחוז חולים שמופנים למחלקה ואין להם מקום	אחוז התפוסה
פנימית א'	47	7.30	6.13	8.7%	86%
פנימית ב'	35	6.71	4.78	8.5%	83%
פנימית ג'	41	7.19	5.32	8.4%	85%
פנימית ד'	44	7.12	5.83	8.5%	86%
פנימית ה'	28	6.01	4.13	8.4%	80%

תשובה:

המחלקות הפנימיות מתפקדות במשטר QED, כיוון שאחוז החסימה חד סיפרתי, אך לא קרוב ל-0, ואחוז התפוסה גבוה.

פרמטר איכות השרות של המחלקות השונות הוא:

מחלקה	$\text{offered-load} = \frac{\lambda}{\mu}$	נוסחה לחישוב פרמטר איכות השרות	פרמטר איכות השרות
פנימית א'	44.72	$\beta = \frac{N - R}{\sqrt{R}}$	0.34
פנימית ב'	32.09	$\beta = \frac{N - R}{\sqrt{R}}$	0.51
פנימית ג'	38.23	$\beta = \frac{N - R}{\sqrt{R}}$	0.45
פנימית ד'	41.46	$\beta = \frac{N - R}{\sqrt{R}}$	0.39
פנימית ה'	24.84	$\beta = \frac{N - R}{\sqrt{R}}$	0.63

- 3.3. כדי ליהנות מיתרון לגודל, מנהל בית החולים שוקל לאחד את שתי המחלקות הפנימיות ב' ו-ה' למרות שסוג החולים שהופנה אליהם עד כה היה מעט שונה.
- 3.3.1. כיצד תחשבו את זמן השהיה הממוצע במחלקה החדשה המאוחדת מתוך הנתונים הני"ל? מה יהיה ערכו?

תשובה:

ממוצע זמן השהיה החדש מחושב בעזרת ממוצע משוקלל:

$$E[S_{new}] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} E[S_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} E[S_2]$$

זמן האשפוז הממוצע החדש יהיה 4.48 יום.

- 3.3.2. כיצד האיחוד ישפיע על רמת השרות התפעולית (אחוז החולים שאין להם מקום במחלקה המאוחדת)? כיצד הוא ישפיע על ניצולת המיטות? הסבירו.

תשובה:

נתוני המחלקה המאוחדת יהיו:

מחלקה	מספר מיטות	ממוצע כמות חולים שמופנים למחלקה ביום	זמן אשפוז ממוצע בימים	offered-load	אחוז חולים שאין להם מקום	אחוז התפוסה
פנימית ב'	35	6.71	4.78	32.09	8.5%	83%
פנימית ה'	28	6.01	4.13	24.84	8.4%	80%
מאוחדת	63	12.72	4.48	56.93	4.6%	85.3%

האיחוד ישפיע באופן הבא: מכיוון שכל אחת מהמחלקות גדלה בערך פי 2, אחוז החולים שאין להם מקום ירד בערך פי $\sqrt{2}$ ואחוז התפוסה הכללי יעלה במעט. כלומר, רואים כאן תופעה של יתרון לגודל.

$$\left(P(block) \approx \frac{\gamma}{\sqrt{n}} = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(\beta)\sqrt{n}}, \text{ Occupancy} \approx 1 - \frac{\beta + \gamma}{\sqrt{n}} \right)$$

- 3.3.3. לאיחוד מחלקות יתרון תפעולי לגודל. מאידך, לאיחוד שכזה יכולים להיות גם חסרונות. תנו דוגמה לחסרון כזה.

תשובה:

חסרון יכול להתבטא ברמת הטיפול הרפואית הניתנת לחולים. למשל, עלול להיווצר מצב בו מנהל המחלקה והאחות הראשית, שהם נותני הטיפול בעלי הניסיון הרב ביותר, והינם אחראים לכל החולים במחלקה, לא יוכלו להיות מעורבים במידה מספקת בטיפול של כל החולים, ואז רמת הטיפול בחלק מהחולים תהיה בהכרח נמוכה יותר.

3.4. מספר התקנים של רופאים ואחיות, בבית החולים הנידון, נקבע באופן פרופורציוני למספר המיטות במחלקה. יחס הפרופורציה שונה בין המחלקות השונות בהתאם לחומרה הקלינית וזמני הטיפול הנדרשים. לדוגמה: לכל 6 מיטות במחלקה פנימית צריך אחות אחת, אך במחלקת טיפול נמרץ הדרישות שונות.

3.4.1. מהיבט איוש אחיות, מהו המשטר התפעולי (ED, QD או QED) המתאים למחלקת טיפול נמרץ? מדוע?

תשובה:

במחלקת טיפול נמרץ יש צורך במענה מיידי, כך שההסתברות שחולה ימתין תהיה קרובה ל-0. לכן יש לאייש לפי מדיניות QD (למשל אחות או שתיים למיטה).

3.4.2. מהיבט איוש אחיות, מהו המשטר התפעולי (ED, QD או QED) המתאים למחלקת פנימית? מדוע?

תשובה:

במחלקת פנימית ישנם חולים בדרגת דחיפות רגילה, ולכן יש צורך במענה מהיר אך לא מיידי. לכן סביר לבחור במדיניות QED.

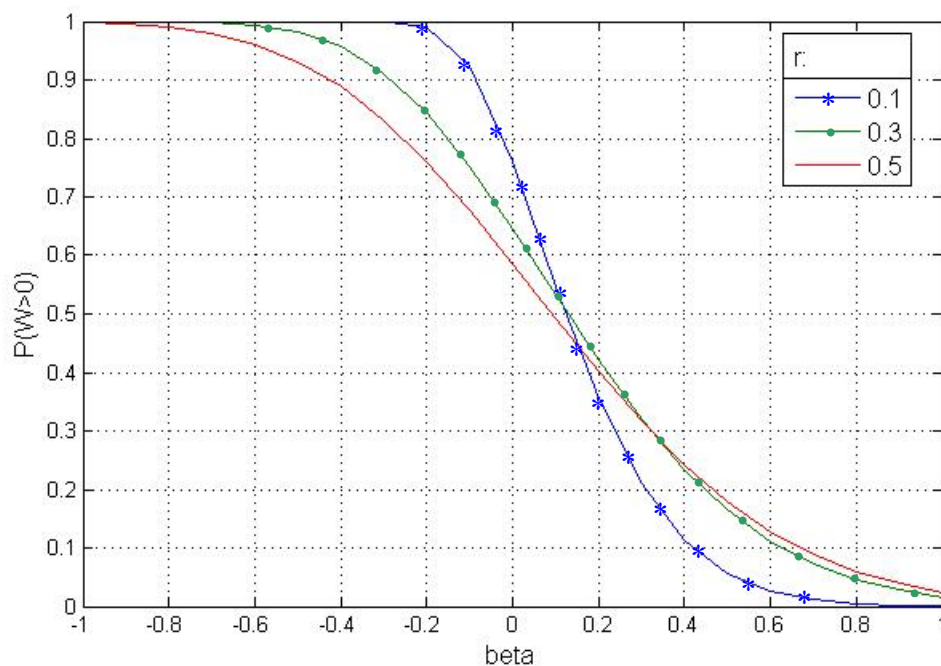
3.4.3. מתוך המודלים שנלמדו בכיתה, באיזה מודל הייתם משתמשים על מנת לקבוע את מספר האחיות הדרוש במחלקה מסוימת? מדוע?

תשובה: Erlang-C הוא המודל מתאים ביותר, כיוון שאין נטישות ואין חסימות.

3.4.4. תארו אילו תצפיות הייתם מבצעים על מנת לקבוע את הפרמטרים של המודל שבחרתם בסעיף הקודם (3.4.3)?

תשובה: מודל זה מניח תהליך כניסה פואסוני של בקשות לשרות (לאחות) וזמני שרות המתפלגים מעריכית. יש לאמוד את קצב ההגעה וקצב השרות ולבדוק האם הנחות המודל מתקיימות. לכן, יש לבצע תצפיות על זמני בקשות שרות של חולים וזמן שרות אחות שניתן בכל קריאת חולה שכזאת.

3.5. שני חוקרים (Jennings ו- de Véricourt), במאמר משנת 2007, פיתחו מודל לקביעת מספר האחיות (s) הדרוש למחלקה עם n חולים, בהנחה שמספר החולים קבוע. כלל השורש שהם פיתחו הוא: $s = rn + \beta\sqrt{n}$ כאשר n הוא מספר המיטות במחלקה, β הוא פרמטר איכות השרות ($\beta \in (-\infty, \infty)$) ו-r הוא "היחס הקריטי", שהוא אחוז הזמן, לטווח ארוך, שחולה זקוק לטיפול. לדוגמה, אם $r=0.1$, אזי כל חולה זקוק לטיפול כ- 10% מהזמן, כלומר, בממוצע בכל שעה ביממה הוא זקוק ל- 6 דקות טיפול. על סמך מודל זה נבנה הגרף הבא, המתאר את ההסתברות שחולה ימתין לאחות כפונקציה של מדד איכות השרות שנבחר - β .



קיבעו, על סמך הגרף הנ"ל, מה צריך להיות מספר האחיות במחלקה שבה אחוז הזמן שכל חולה זקוק לטיפול הוא 10% ויש בה 30 מיטות, כך שההסתברות שחולה נזקק יחכה לאחות תהיה קטנה מ-0.4?

תשובה:

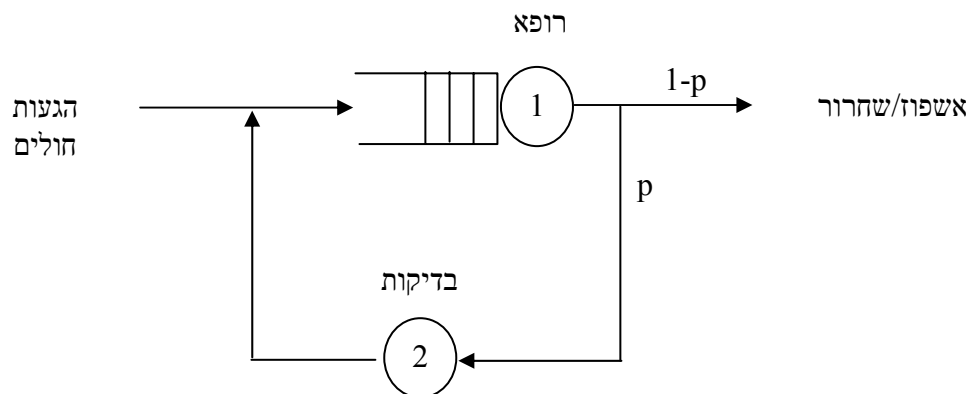
כאשר $r = 0.1$, על סמך הגרף פרמטר השרות המתאים הוא $\beta \geq 0.18$. ולכן,

$$s = 0.1 * 30 + 0.18\sqrt{30} \approx 3 + 1 = 4$$

כלומר דרושות 4 אחיות.

3.6. מחלקת (חדר) המיון שונה ממחלקות אשפוז בכך שחולים עוברים בה תהליך מורכב, המערב גורמים רבים, בזמן קצר יחסית של מספר שעות. כאשר חולה מגיע למיון, הוא צריך להיבדק ע"י אחות ורופא, בד"כ נשלח לסדרת בדיקות וכאשר מגיעות תוצאותיהן הוא חוזר לרופא; לעיתים עדיין אין אבחנה והחולה נשלח לסדרת בדיקות נוספות, שלאחריהן שוב הוא צריך להיבדק ע"י רופא. כאשר הבדיקות מושלמות ויש אבחנה, הרופא מחליט על צורת הטיפול ומחליט האם לאשפז את החולה או לשולחו לביתו.

בבדיקות נמצא כי בממוצע חולה עובר 3 ביקורים אצל הרופא לפני החלטה על אשפוז/שחרור. ניתן לתאר את התהליך מנקודת המבט של ביקורים אצל הרופא, בעזרת רשת התורים הבאה:



תחנה 1 מתארת את הביקור אצל הרופא. בתחנה זו מספר ה"שרתים" N הוא מספר הרופאים במיון, והתור לפני התחנה הוא התור לביקור אצל הרופא. נניח כי זמן הביקור אצל רופא מתפלג מעריכית עם פרמטר μ . תחנה 2 מתארת את תהליך הבדיקות שהחולה צריך לעבור. כיוון שאנו לא ממדלים תהליך זה, אלא רק את העיכוב הכללי שנוצר כתוצאה מבדיקות אלו, אנו נניח כי בתחנה 2 אינסוף שרתים, וזמן הבדיקות מתפלג מעריכית עם פרמטר δ . בזמן כל ביקור אצל הרופא, מחליט הרופא אם יש צורך בבדיקות נוספות או לא. % החולים שעבורם נדרשות בדיקות נוספות הוא $100 \cdot p$. (לכן, מספר הביקורים אצל הרופא מתפלג גיאומטרית עם הפרמטר $(1-p)$).

3.6.1. הסבירו מדוע העומס המוצע (offered-load) בתחנת הרופאים הוא $R = \frac{\lambda}{(1-p)\mu}$?

תשובה: לכל חולה, משך הטיפול הכולל אצל רופא, מתפלג מעריכית עם פרמטר $(1-p)\mu$, וזאת כיוון שסכום גיאומטרי של מ"מ מעריכיים שווה התפלגות מתפלג מעריכית.

דרך אחרת: נניח שיש אינסוף רופאים בתחנת הרופאים, נגדיר X – קצב מופע אפקטיבי

$$\text{לרופאים. אזי, } X = \lambda + Xp \Leftrightarrow X = \frac{\lambda}{1-p} \Leftrightarrow R = \frac{\lambda}{1-p} \cdot \frac{1}{\mu}$$

כאשר מנתחים את הגעות החולים למיון, מגלים שקצב הגעת חולים למיון אינו קבוע על פני היממה אלא תלוי זמן. כלומר, קצב המופע הינו מהצורה $\lambda(t)$, $0 \leq t$. לכן, באופן טבעי גם התפלגות מספר האנשים בכל אחת מהתחנות הנ"ל אינה קבועה אלא משתנה בזמן. כדי לתאר את מספר האנשים בפועל במערכת, נתאים מודל נוזלים למערכת הנ"ל. נגדיר את המשתנים הבאים:

$Q_1(t)$ = סה"כ מספר הלקוחות בתחנה 1 (רופא) במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

$Q_2(t)$ = סה"כ מספר הלקוחות בתחנה 2 (בדיקות) במערכת (בשירות), בזמן $0 \leq t$.

3.6.2. כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $Q_1(t)$, $0 \leq t$. (המשוואה עבור $Q_2(t)$ נתונה).

תשובה:

$$\frac{dQ_1(t)}{dt} = \lambda(t) + \delta Q_2(t) - \mu(Q_1(t) \wedge N)$$

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = \mu p(Q_1(t) \wedge N) - \delta Q_2(t) \quad \text{נתון -}$$

3.6.3. כתבו ביטוי לקצב מופע המטופלים לרופאים, בזמן t .

תשובה:

$$\lambda(t) + \delta Q_2(t)$$

3.6.4. עבור מקרה לא סטציונארי זה, ועל סמך חומר הקורס, הציעו כלל איוש רופאים המשיג יציבות לאורך זמן של אחוז הממתינים לרופא (נניח 40%). היו מדויקים ככל שתוכלו.
 רמז: במערכת $M_t / G / \infty$, ממוצע מספר הלקוחות במערכת בזמן t , נתונה ע"י הייצוגים הבאים:

$$L(t) = E \left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du \right) = \int_{-\infty}^t \lambda(u) P(S > t-u) du$$

כאשר S מסמן זמן שרות גנרי.

תשובה:

ראינו, באנלוגיה לנעשה בכיתה, כי כלל המשיג יציבות של אחוז הממתינים, כאשר קצב המופע משתנה בזמן הוא מהצורה:

$$N(t) = R(t) + \beta \sqrt{R(t)}$$

כאשר $R(t) = E \left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du \right) = \int_{-\infty}^t \lambda(u) P(S > t-u) du$ הוא העומס המוצע תלוי זמן.

אצלנו קצב הכניסה הכולל לתור אצל הרופא הוא: $\lambda(t) + \delta Q_2(t)$.

לכן, במקרה שלנו, נצפה כי אותו כלל יעבוד טוב אם נחשב את $R(t)$ באופן הבא:

$$\begin{aligned} R(t) &= E \left(\int_{t-S}^t (\lambda(u) + \delta Q_2(u)) du \right) = \int_{-\infty}^t [\lambda(u) + \delta Q_2(u)] P(S > t-u) du \\ &= \int_{-\infty}^t [\lambda(u) + \delta Q_2(u)] e^{-\mu(t-u)} du. \end{aligned}$$

שאלה 4 – תיאוריה ושימושיה (8 נקודות).

4.1 נתון מודל Erlang-C בתחום מכוון יעילות (ED), ז"א $N \approx R + \gamma$, $0 < \gamma$.

הוכיחו כי אינדקס הצפף נתון על ידי $\frac{1}{\gamma}$, ז"א:

$$\frac{E(W_q)}{E(S)} \approx \frac{1}{\gamma}$$

$$W_q | W_q > 0 \stackrel{d}{=} \exp \left(\text{mean} = E(S) \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right) \quad \text{רמז:}$$

$$\text{כאשר } \rho = \frac{\lambda}{N\mu}.$$

תשובה:

תחת מדיניות ED, $P(W_q > 0) \approx 1$ ולכן $E(W_q | W_q > 0) \approx E(W_q)$.

$$\frac{E(W_q | W_q > 0)}{E(S)} \approx \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\text{ע"ס } N = R + \gamma$$

4.2 נתון מודל Erlang-A בתחום מכוון יעילות (ED), ז"א $N \approx R - \gamma R$, $0 < \gamma < 1$.

הוכיחו שאחוז הנוטשים נתון על ידי γ , ז"א:

$$P(\text{Abandon}) \approx \gamma$$

תשובה:

$$\lambda(1 - P\{Ab\}) \approx N\mu \Rightarrow P\{Ab\} = 1 - \frac{1}{\rho}$$

$$N = R - \gamma R \Rightarrow \gamma = \frac{R - N}{R} = 1 - \frac{1}{\rho} = P\{Ab\}$$

4.3 נתון מודל Erlang-B, עם פרמטרים N, μ, λ . הציעו קשר בין הפרמטרים כך שהתור יעבוד במשטר ED, דהיינו שאחוז הלקוחות שמגיעים ומוצאים את כל השרתים עסוקים (נוסחת Erlang-B) הוא בערך קבוע γ , $0 < \gamma < 1$. הוכיחו תשובתכם.

תשובה:

גם כאן כמו ב-Erlang-A, תחום ה-ED נתון ע"י $N \approx R - \gamma R$, $0 < \gamma < 1$. ואז מתקיים:

$$\lambda(1 - P\{Block\}) \approx N\mu \Rightarrow P\{Block\} = 1 - \frac{1}{\rho}$$

$$N = R - \gamma R \Rightarrow \gamma = \frac{R - N}{R} = 1 - \frac{1}{\rho} = P\{Block\}$$

4.4 סטודנטים בפקולטה לתעשייה וניהול בטכניון ערכו מחקר דיוק-זמנים של התחבורה הציבורית. בדגימה אקראית של זמני ההמתנה של נוסעים לאוטובוס מספר 31, בתחנת האוטובוס שליד הפקולטה, עלה כי ממוצע זמן ההמתנה לאוטובוס הוא 20 דקות. ממחלקת שירות הלקוחות של אגד דיווחו כי זמן ההמתנה הממוצע צריך להיות 10 דקות. הסבירו בשני משפטים את ההבדל בין תוצאת הסטודנטים לבין הדיווח של אגד.

הסבר:

אמידה מוטת. באגד יודעים כי האוטובוסים יוצאים כל 20 דקות. הם מניחים כי מכיוון שאנשים מגיעים באקראי לתחנה הם יחכו בממוצע מחצית מהזמן. הם כמובן טועים ושוכחים את התופעה של אמידה מוטת שכן באה לידי ביטוי בחישובים של הסטודנטים.

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Gen. Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$N \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multi-nomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_1^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_1^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_1^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(m, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; m \geq 1$	$k = m, m+1, \dots$	$\left[\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t} \right]^m$	$\frac{m}{p}$	$\frac{mq}{p^2}$	Number of trials till m -th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$\exp[-\lambda(1 - e^t)]$	λ	λ	
Hyper-geometric	$X \sim HG(N, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N + M$	$\max(0, n - M) \leq k$ $k \leq \min(n, N)$	$\sum_k e^{tk} p(k)$	$\frac{n \cdot N}{N+M}$	$n \cdot \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N}{N+M-1}$	N – special elements M – ordinary ones n – sample size k – special in sample
		Density Function						
Beta	$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	Complicated	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ $= (x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp\left\{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\}$	μ	σ^2	