



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגלת : גלית יום-טוב

תאריך הבחינה : 20.10.2009

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד ב' – סמסטר אביב תשס"ט 2009

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 33 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

הרצאות/תרגולים/בחינות קודמות	מתוך 10 נקודות	שאלה 1	ניקוד:
תרגילי בית	מתוך 10 נקודות	שאלה 2	
יישום	מתוך 20 נקודות	שאלה 3	
תיאוריה	מתוך 10 נקודות	שאלה 4	
	מתוך 50 נקודות	סה"כ	

בהצלחה !

שאלה 1 - תרגילי כיתה/הרצאות/מבחנים קודמים

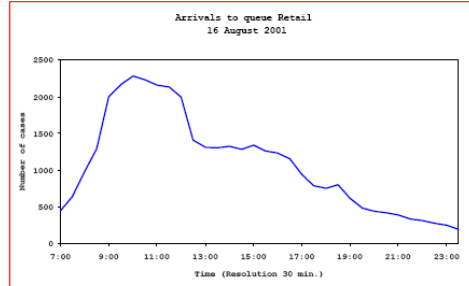
חלק 1. חוק Little

2.1.1 מצורף בזאת עמוד שהוצג בהרצאה, המתאר את קיומו או אי-קיומו של חוק Little. (בעמוד מוצגים 3

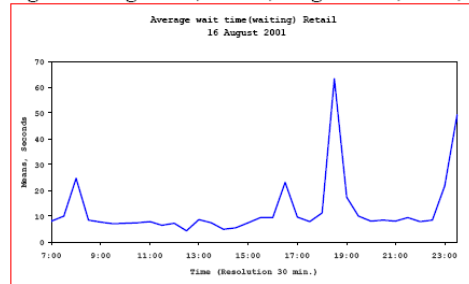
גרפים). הסבירו האם נראה שחוק Little מתקיים, ומדוע הוא צפוי/לא צפוי להתקיים במקרה זה.

חצאי שעות על פני 16/8/2001 US Bank Little's Law for Retail calls, August 16th, 2001: US Bank

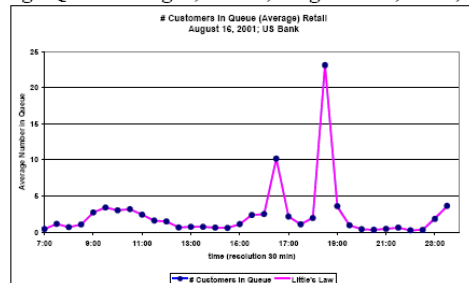
λ : Throughput Rate, Retail, August 16th, 2001; US Bank



W: Average Waiting Time, Retail, August 16th, 2001; US Bank



L: Average Queue Length, Retail, August 16th, 2001; US Bank



Time	7:00	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00	12:30	13:00	13:30	14:00	14:30	15:00
λ	443	639	987	1291	1998	2166	2278	2231	2158	2135	2000	1408	1311	1303	1323	1285	1340
W	1.7	3.2	1.2	1.5	2.4	2.8	2.4	2.6	2.0	1.3	1.3	0.8	1.0	1.0	0.8	0.8	1.5
$\lambda * W$	0.42	1.14	0.68	1.06	2.72	3.42	3.01	3.18	2.44	1.55	1.47	0.64	0.72	0.72	0.62	0.59	1.09
L	0.42	1.14	0.68	1.06	2.72	3.40	3.02	3.17	2.41	1.59	1.48	0.64	0.72	0.72	0.62	0.57	1.11

Time	15:30	16:00	16:30	17:00	17:30	18:00	18:30	19:00	19:30	20:00	20:30	21:00	21:30	22:00	22:30	23:00	23:30
λ	1258	1235	1157	942	788	752	803	619	485	437	421	386	336	311	274	251	193
W	3.5	3.6	15.8	4.2	2.4	4.9	51.9	10.0	3.5	1.7	1.3	2.1	3.3	1.4	2.0	14.3	32.6
$\lambda * W$	2.422	2.45	10.2	2.173	1.06	2.05	23.16	3.43	0.95	0.41	0.314	0.44	0.62	0.24	0.30	2.00	3.50
L	2.37	2.49	10.17	2.16	1.07	1.94	23.11	3.59	0.95	0.40	0.31	0.45	0.62	0.24	0.30	1.83	3.63

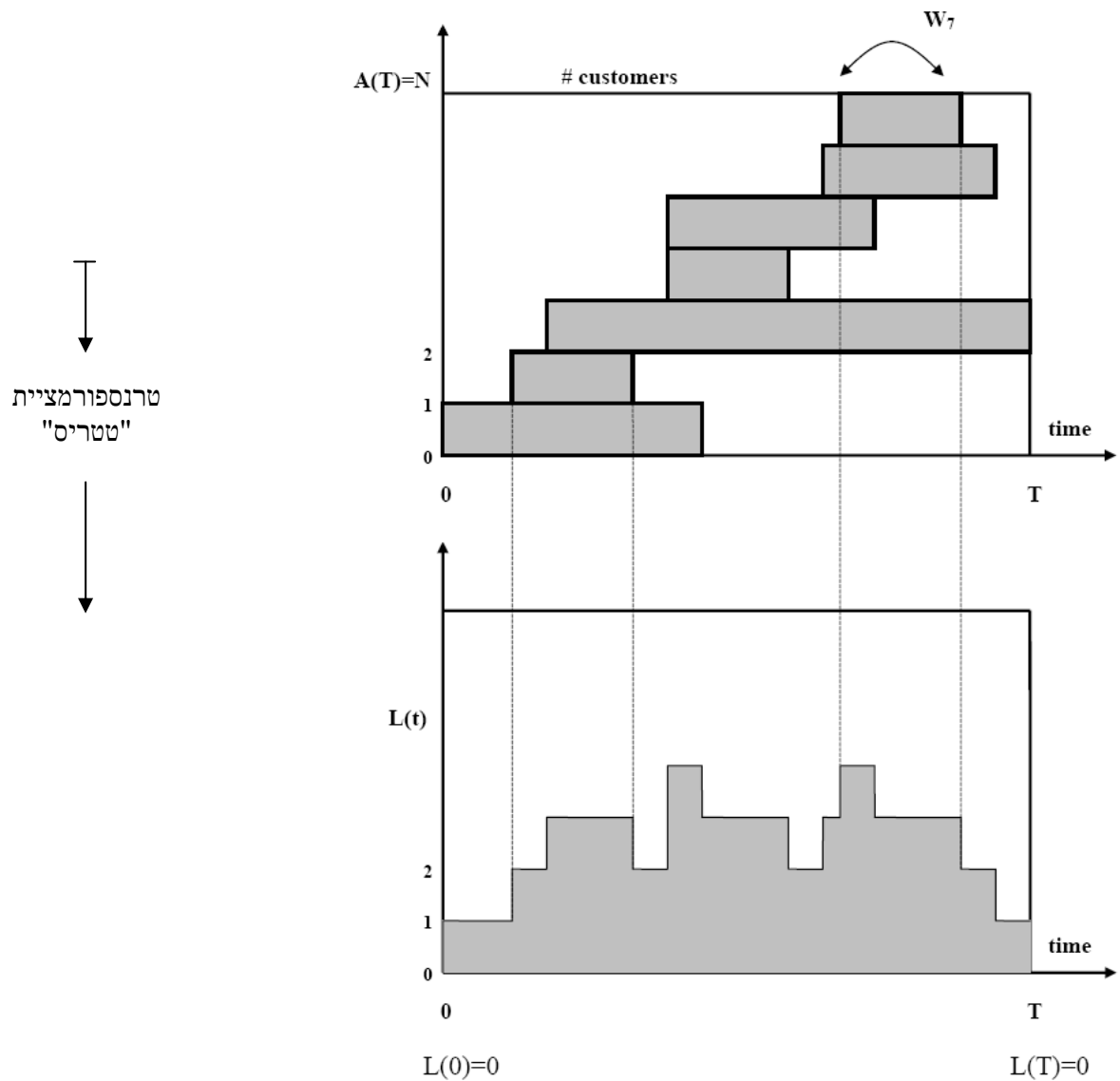
תשובה: חוק Little (מתקיים/לא מתקיים; צפוי/לא צפוי) (סמנו בעיגול את התשובה הנכונה).

הסבר:

גרף 2 מאשש את קיומו של חוק Little גם ברזולוציה של חצאי שעות, מקרה זה הוא מפתיע, אך מתקיים כיוון שהמערכת גדולה ומגיעה מהר למצב יציב, וכן בגלל שזמני השרות וזמני ההמתנה קצרים (דקות) בהרבה מהרזולוציה בה אנו בוחנים את המערכת: גירסת מצב יציב.

הוכחת חוק Little באופן סופי (מערכת דטרמיניסטית):

נקבע אינטרוול זמן סופי $[0, T]$. נסמן N – מספר הלקוחות שעברו במערכת בזמן האינטרוול, W_i – זמן שהיה במערכת של לקוח i , $L(t)$ – מספר הלקוחות במערכת בזמן t , λ – קצב הגעת לקוחות למערכת. הוכיחו בעזרת הגרף הבא את חוק Little: $E[L] = \lambda * E[W]$ (כתבו את ההוכחה בעמוד הבא).



תשובה:

נסמן $S = W_1 + W_2 + \dots + W_N$, סך כל זמני השהיה, של כל הלקוחות, בזמן $[0, T]$.

על כן מתקיים: $E[W] = S / N$, ו- $\lambda = N / T$.

על סמך טרנספורמצית טוריס מתקיים: $E[L] = \frac{1}{T} S$.

מהנ"ל נובע:

$$E[L] = \frac{S}{T} = \frac{N}{T} \frac{S}{N} = \lambda E[W]$$

משי"ל.

2.3.1 עבור מ"מ X אי שלילי עם פונקצית התפלגות F_X ופונקצית צפיפות f_X , הגדירו את פונקצית הסיכון h_X . הסבירו בקיצור ובמדויק את משמעות $h_X(t)$, בזמן t כלשהו.

תשובה:

$$h_X(t) = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)}, \quad t \geq 0$$

הסבר: $h_X(t) \cdot \Delta \approx P\{X \leq t + \Delta \mid X > t\}$. כלומר, פרופורציונאלי לסיכון הרגעי לחוות אירוע מיד אחרי זמן t בהינתן שעד זמן t לא התרחש אירוע.

2.3.2 האם פונקצית הסיכון של משתנה מקרי כלשהו מהווה אפיון חד משמעי להתפלגות המשתנה? אם כן, הוכיחו את תשובתכם. אם לא, הסבירו מדוע.

תשובה:

כן.

הוכחה:

$$h_X(t) = \frac{F_X'(t)}{1 - F_X(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(1 - F_X(t))$$

$$\ln(1 - F_X(t)) = -\int_0^t h_X(u) du + \text{const}$$

$$F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t h_X(u) du} : F_X(0) = 0 \quad \text{ע"ס}$$

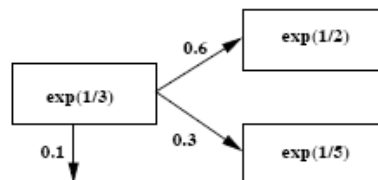
2.3.3 נתון מ"מ X מעריכי עם פרמטר λ : $X \sim \exp(\lambda)$. צפיפותו נתונה ע"י $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. חשבו את פונקצית הסיכון של X . תנו הסבר אינטואיטיבי קצר לתשובתכם.

הוכחה: $h_X(t) = \frac{f_X(t)}{P(X > t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$

הסבר: תכונת "חוסר הזיכרון" של משתנה מקרי מעריכי.

Theoretical Calculation and Statistical Estimation of Hazard Rate

Example: consider the following service time distribution:



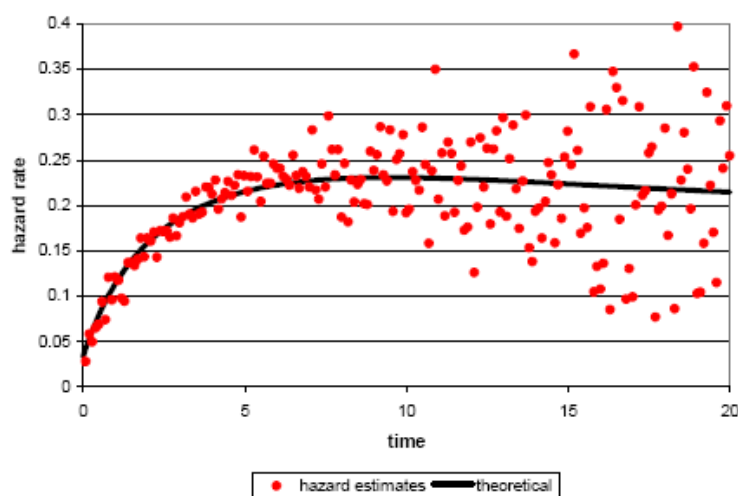
Its hazard rate can be calculated theoretically:

$$h(x) = \frac{0.15 \cdot e^{-x/5} + (29/60) \cdot e^{-x/3} - 0.6 \cdot e^{-x/2}}{0.75 \cdot e^{-x/5} + 1.45 \cdot e^{-x/3} - 1.2 \cdot e^{-x/2}}.$$

How do we estimate hazard rate from data?

Description of simulation experiment.

10,000 independent realizations of service time above were simulated in Excel. The theoretical hazard rates were plotted and compared against estimates of the hazard rate, based on the simulation data. (The method used for hazard rate estimation is described on the next page.)



2.3.4 הסבירו מדוע הגרף מתחיל בערך 0.033.

תשובה:

השרות יסתיים מיד רק אם השרות יסתיים לאחר השלב הראשון (בהסתברות 0.1) וגם המשתנה המקרי שאומד את זמן השלב הראשון יקבל ערך קרוב ל-0. זה יקרה בהסתברות: $1/3 \cdot 0.1$.

2.3.5 לאיזה ערך שואף הגרף כאשר $t \rightarrow \infty$? הסבירו אינטואיטיבית תשובתכם.

תשובה:

הגרף שואף לערך 0.2. בהינתן ששרדנו זמן רב, הסבירות היא גבוהה להיות בשלב השני הארוך יותר. התפלגות השלב השני הארוך היא $\exp(1/5)$, ופונקצית הסיכון של משתנה מקרי מעריכי היא קבועה ושווה לפרמטר ההתפלגות λ , כפי שראינו בסעיף 2.3.3.

שאלה 2 – תרגילי בית

מודלים אמפיריים ו- SEESat

להלן נתון חלק מדו"ח call by call data של בנק אמריקאי מיום ה-25 למאי 2001 (טבלה 1). בנוסף, מצורפת טבלה הכוללת נתוני הגעות מצטברות ועזיבות מצטברות מהמערכת, מהתור ומהשירות (טבלה 2). שעות פעילות המוקד ביום זה הן 06:00-23:00. הדוחות מתייחסים לסוג שירות "Summit". לנוחיותכם, הדוחות מצורפים גם בשני העמודים האחרונים של הבחינה, כדי שתוכלו לתלוש עמודים אלו ולהשתמש בהם למענה על השאלות הבאות.

טבלה 1

call_id	q_start	q_exit	ser_start	ser_exit	outcome	wait_time	service_time	Agent
510013309	06:23:00	06:23:07	06:23:08	06:25:01	Agent	7	113	23015
510013355	06:23:19	06:24:30	06:24:31	06:24:51	Agent	71	20	23007
510013559	06:24:52	06:24:52	06:24:52	06:26:57	Agent	0	125	23007
510013814	06:26:32	06:26:33	06:26:33	06:27:27	Agent	1	54	23015
510013830	06:26:36	06:26:38	00:00:00	00:00:00	Abandon	2	0	0
510013871	06:26:47	06:26:57	06:26:58	06:28:45	Agent	10	107	23007
510014006	06:27:53	06:27:53	06:27:53	06:29:46	Agent	0	113	23015
510014071	06:28:15	06:28:45	06:28:46	06:29:04	Agent	30	18	23007
510014116	06:28:35	06:29:04	06:29:05	06:30:31	Agent	29	86	23007
510014132	06:28:43	06:29:46	06:29:47	06:31:27	Agent	63	100	23015
510014196	06:29:05	06:30:31	06:30:32	06:34:32	Agent	86	240	23007
510014425	06:30:38	06:31:27	06:31:27	06:34:31	Agent	49	184	23015
510014578	06:31:32	06:34:31	06:34:32	06:35:54	Agent	179	82	23015
510014674	06:32:06	06:34:32	06:34:33	06:37:04	Agent	146	151	23007
510014702	06:32:18	06:33:00	00:00:00	00:00:00	Abandon	42	0	0
510014712	06:32:26	06:35:54	06:35:55	06:37:37	Agent	208	102	23015
510014750	06:32:37	06:36:08	06:36:09	06:47:58	Agent	211	709	23041
510014927	06:33:46	06:37:04	06:37:05	06:43:49	Agent	198	404	23007
510015175	06:35:19	06:36:04	00:00:00	00:00:00	Abandon	45	0	0
510015368	06:36:28	06:37:37	06:37:38	06:39:53	Agent	69	135	23015
510015393	06:36:35	06:37:54	00:00:00	00:00:00	Abandon	79	0	0
510015405	06:36:39	06:39:53	06:39:54	06:51:04	Agent	194	670	23015
510015441	06:36:55	06:43:49	06:43:50	06:45:58	Agent	414	128	23007
510015539	06:37:41	06:45:58	06:45:59	06:47:44	Agent	497	105	23007
510015752	06:38:54	06:39:14	00:00:00	00:00:00	Abandon	20	0	0
510015802	06:39:13	06:40:31	00:00:00	00:00:00	Abandon	78	0	0
510016057	06:40:42	06:40:59	00:00:00	00:00:00	Abandon	17	0	0
510016208	06:41:36	06:47:44	06:47:45	06:51:29	Agent	368	224	23007
510016446	06:42:56	06:47:58	06:47:59	06:48:31	Agent	302	32	23041
510016552	06:43:35	06:45:36	00:00:00	00:00:00	Abandon	121	0	0
510016619	06:44:02	06:48:31	06:48:32	06:50:56	Agent	269	144	23041
510016625	06:44:05	06:46:13	00:00:00	00:00:00	Abandon	128	0	0
510016700	06:44:32	06:50:56	06:50:57	06:56:20	Agent	384	323	23041
510016708	06:44:36	06:51:04	06:51:05	06:53:01	Agent	388	116	23015
510016925	06:45:53	06:51:29	06:51:30	06:53:14	Agent	336	104	23007
510017302	06:48:04	06:53:01	06:53:02	06:54:12	Agent	297	70	23015
510017389	06:48:31	06:49:30	00:00:00	00:00:00	Abandon	59	0	0
510017423	06:48:42	06:53:14	06:53:14	06:54:56	Agent	272	102	23007
510017606	06:49:55	06:54:12	06:54:12	06:55:49	Agent	257	97	23015
510017636	06:50:03	06:51:57	00:00:00	00:00:00	Abandon	114	0	0
510017717	06:50:38	06:54:56	06:54:57	06:56:50	Agent	258	113	23007

טבלה 2

time	Arr_sys	Dep_sys	Arr_q	Dep_q	Arr_ser	Dep_ser
06:15	6	6	6	6	5	5
06:16	6	6	6	6	5	5
06:17	6	6	6	6	5	5
06:18	6	6	6	6	5	5
06:19	7	6	7	7	6	5
06:20	7	6	7	7	6	5
06:21	7	6	7	7	6	5
06:22	8	6	8	8	7	5
06:23	9	6	9	9	8	5
06:24	11	7	11	10	9	6
06:25	12	9	12	12	11	8
06:26	12	10	12	12	11	9
06:27	15	12	15	15	13	10
06:28	16	13	16	16	14	11
06:29	19	14	19	17	15	12
06:30	20	16	20	19	17	14
06:31	21	17	21	20	18	15
06:32	22	18	22	21	19	16
06:33	26	18	26	21	19	16
06:34	27	19	27	22	19	16
06:35	27	21	27	24	21	18
06:36	28	22	28	25	22	19
06:37	32	24	32	27	23	20
06:38	33	27	33	30	25	22
06:39	34	27	34	30	25	22
06:40	35	29	35	32	26	23
06:41	36	31	36	34	26	23
06:42	37	31	37	34	26	23
06:43	38	31	38	34	26	23
06:44	39	32	39	35	27	24
06:45	43	32	43	35	27	24
06:46	44	34	44	37	28	25
06:47	44	35	44	38	28	25
06:48	44	37	44	40	30	27
06:49	47	38	47	41	31	28
06:50	48	39	48	42	31	28
06:51	51	40	51	43	32	29
06:52	53	43	53	46	34	31
06:53	54	43	54	46	34	31
06:54	54	45	54	48	36	33
06:55	54	47	54	50	38	35
06:56	56	49	56	52	39	36
06:57	59	52	59	55	41	38
06:58	59	53	59	56	42	39
06:59	60	54	60	57	43	40
07:00	60	55	60	59	44	40
07:01	62	57	62	62	46	41
07:02	64	57	64	64	48	41
07:03	70	62	70	68	51	45
07:04	70	63	70	70	53	46
07:05	71	65	71	71	54	48
07:06	74	67	74	74	57	50
07:07	79	69	79	78	61	52
07:08	80	72	80	80	63	55

2.1 ממוצע זמן ההמתנה

2.1.1 כיצד תחשבו את ממוצע זמן ההמתנה של לקוחות שנכנסו למוקד בין 06:28 ל-07:01. הסבירו ופרטו את תשובתכם, תוך שימוש בשמות העמודות בטבלאות שבנתונין אתם משתמשים. אין צורך בחישובים.

תשובה:

יש לחשב ממוצע על פני עמודת wait_time עבור שיחות נכנסות בין 06:28 ל-07:01 (כולל זמני המתנה השווים ל-0).

2.1.2 כיצד ניתן בעזרת שימוש במודל נוזלים לאמוד את ממוצע זמן ההמתנה של לקוח הנכנס למוקד בין 06:28 ל-07:01. הסבירו תחילה מה עליכם להניח כדי שמודל הנוזלים יהיה רלוונטי, תארו את תהליך האמידה והסבירו האם האמד שתקבלו שונה מהאמד שמחושב לפי סעיף 1.1.1, או שווה לו.
רמז: השתמשו בנתונים המופיעים בטבלה 2.

תשובה:

לשם שימוש במודל נוזלים נניח כי לקוחות מקבלים שירות לפי מדיניות שירות First Come First Served. תיאור תהליך האמידה: מכיוון שאנו מניחים מדיניות FCFS, נתאים ללקוח ה- i שנכנס לתור את זמן היציאה ה- i מהתור, נחשב את זמני ההמתנה תחת הנחה זו, ואת ממוצעים.
מכיוון שבתחילת האינטרוול (6:28) ובסופו (7:01) התור ריק (מטבלה 2: Arr_q=Dep_q), שני האמדים יהיו זהים בערכם.

2.1.3 הניחו שני סוגי ימים - "עמוס" ו-"לא עמוס". הניחו בנוסף שרמות האיוש בשני הימים זהות. נסמן ב- W_1 ו- W_2 את ממוצעי זמני ההמתנה ביום עמוס וביום לא עמוס בהתאמה; וב- W_1^+ ו- W_2^+ את ממוצעי זמני ההמתנה בהינתן המתנה. מהו היחס בין $\frac{W_1}{W_2}$ ו- $\frac{W_1^+}{W_2^+}$ אותו תצפו לקבל? הסבירו.

תשובה:

$$\text{א. } \frac{W_1}{W_2} = \frac{W_1^+}{W_2^+}$$

$$\text{ב. } \frac{W_1}{W_2} < \frac{W_1^+}{W_2^+}$$

$$\text{ג. } \frac{W_1}{W_2} > \frac{W_1^+}{W_2^+} \quad (\text{ג.})$$

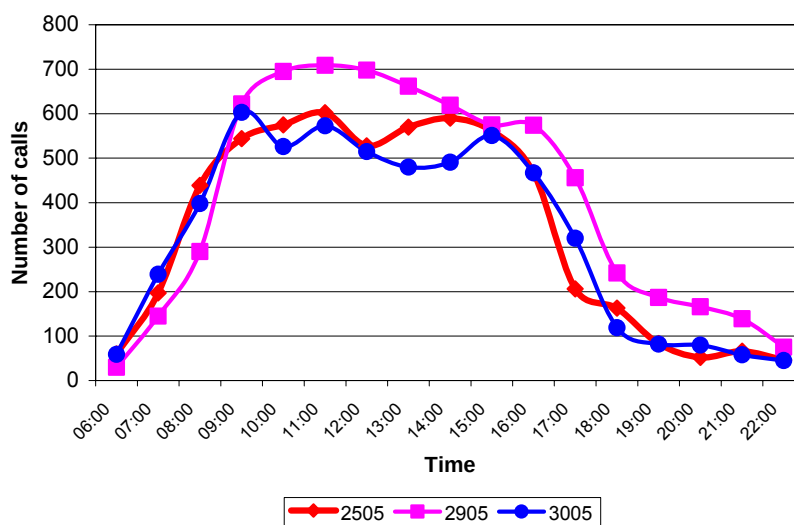
הסבר: נצפה ליחס $\frac{W_1}{W_2} > \frac{W_1^+}{W_2^+}$ מכיוון ש- $\frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{W_1^+}{W_2^+} = \frac{P_1\{\text{Wait} > 0\}}{P_2\{\text{Wait} > 0\}} > 1$

2.2 מופעים

לפניכם מוצג גרף המתאר, על פני יום, את מספר המופעים בשעה למוקד השירות של הבנק הנידון, בימים ה- 25, 29 ו- 30 במאי 2001 (גרף 1).

גרף 1

Arrival rate per hour.



2.2.1 תארו כיצד חושבו הנתונים לשם יצור הגרף לעיל, ותנו דוגמא לחישוב אחד מהערכים בגרף, תוך שימוש בנתונים שבטבלאות הנתונות בתחילת השאלה. הסבירו ופרטו את תשובתכם, תוך שימוש בשמות עמודות הנתונים בהם אתם משתמשים.

תשובה:

לפי טבלה 1: לפי עמודת q_start (זמני כניסה לתור) נספור את מספר המופעים למוקד השירות בכל שעה.
לפי טבלה 2: מספר המופעים בשעה ה- i יהיה שווה לסך המופעים מתחילת היום עד תום השעה ה- i ית פחות מספר המופעים המצטבר עד תום השעה ה- $i-1$. לשם חישוב זה נשתמש בנתונים שבעמודה Arr_sys .
דוגמא: תוך שימוש בנתונים שבטבלה 2, מספר המופעים ביום ה-25 למאי 2001 בין 06:00 ל-07:00 הינו 60.

2.2.2 האם יתכן כי ההשערה הבאה נכונה: "המופעים בין השעה 7:00 ל-24:00 מתאימים לתהליך פואסון הומוגני בזמן (עם קצב מופע קבוע)"? הסבירו תשובתכם.

תשובה:

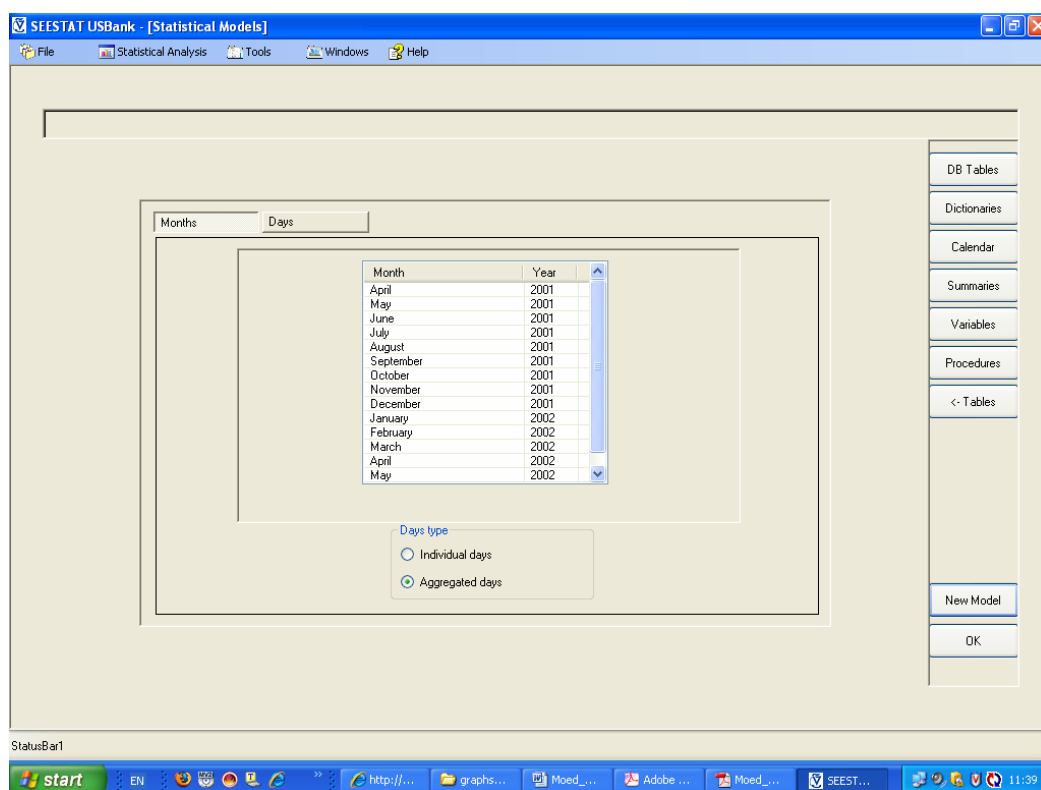
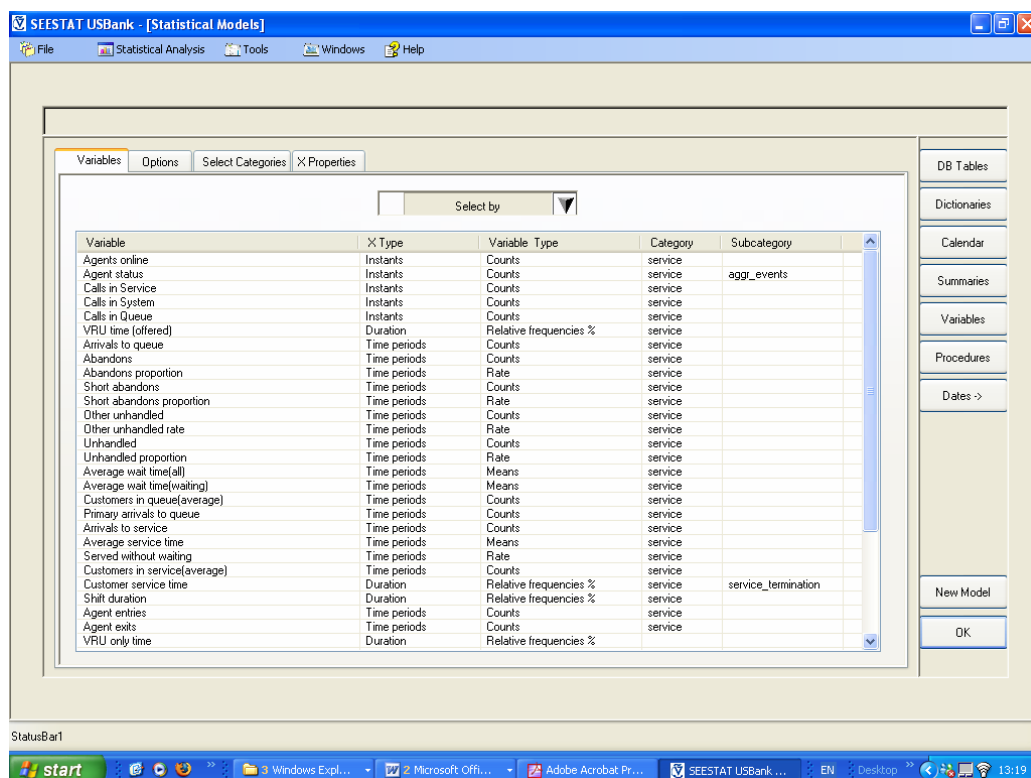
לא יתכן שקצב המופע קבוע מכיוון שיש שוני רב בין השעות השונות במהלך היום.

2.2.3 כיצד ניתן לבדוק, בעזרת הנתונים הנ"ל, את ההשערה הבאה: "המופעים בין השעה 7:00 ל-24:00 מתאימים לתהליך פואסון הומוגני לא הומוגני בזמן"? הסבירו תשובתכם.

תשובה:

כדי לבדוק זאת, יש לחלק את היממה למקטעים קטנים שבהם ניתן להניח שהקצב קבוע. לדוגמה קטעים באורך 10 שניות. נבצע בעזרת שיטת Brown, טרנספורמציה של הזמנים הבין מופעיים בכל אינטרוול לזמנים עם קצב 1 (בכל אינטרוול הטרנספורמציה תהיה בהתאם לקצב הממוצע באינטרוול) ונבדוק, בעזרת QQ Plot, האם קיבלנו זמנים (בין מופעיים) המתפלגים מעריכית עם קצב 1.

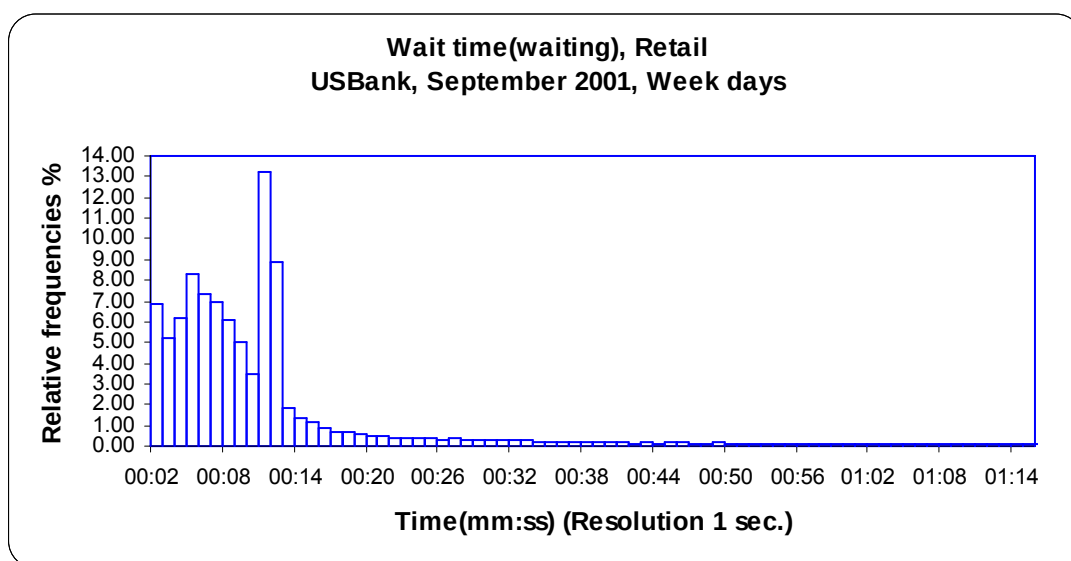
2.2.4 תארו במדויק, ככל שתוכלו, כיצד ניתן לייצר את גרף קצבי המופע הנ"ל בעזרת תוכנת SEESat. (לשם תזכורת הפונקציות של התוכנה, צרפנו תצוגה של שני עמודים מממשק התוכנה).



תשובה:

נבחר במשתנה Arrivals to queue, בסוג שירות Summit וברזולוציה של 60 דקות. נעבור לבחירת התאריכים ונסמן את May 2001. נבחר באופציית ה- Individual days ונסמן את שלושת הימים (25, 29 ו-30).

2.3 בעת ביצוע ניתוחים שונים בתוכנת ה- SEESat, הציג מנהל המוקד גרף המתאר את זמני ההמתנה של לקוחות Retail שהמתינו בתור, בימי חול בחודש ספטמבר 2001. הגרף נראה למנהל המוקד מוזר במקצת. האם אתם יכולים להסביר מדוע הוא נראה כך?



תשובה:

בהיסטוגרמה של זמני ההמתנה של לקוחות שהמתינו בתור ניתן לזהות peak המתרחש עבור זמן המתנה 12 שניות, קפיצה זו נוצרת כתוצאה מפרוטוקול הניתוב של מערכת הטלפונים במוקד. אם לקוח מסוג זה ממתין יותר מ- 12 שניות, הוא מועבר לתור כללי, ואז סביר שיענה מיידית (ע"י מוקדנים פנויים מהמוקדים האחרים).

שאלה 3 – יישום

בערים שונות בעולם (כמו פריז, ליון, ברלין ואמסטרדם) יושמו בשנתיים האחרונות מערכות אוטומטיות להשכרת אופניים לתושבים ולתיירים. בפריז לדוגמה, המערכת שנקראת VELIB, מציעה 20,000 זוגות אופניים חדישים ונוחים המפוזרים בכ- 1450 תחנות ברחבי העיר, תוך קריאה לתושבים ולתיירים לזנוח את התחבורה המוטורית - לטובת דיווש על אופניים. השירות מתאים במיוחד לנסיעות קצרות: קפיצה קטנה לבית קפה, למפגש עם חברים ולקניות קלות. הלקוח מגיע לאחת מתחנות ההשכרה המפוזרות בעיר, משכיר אופניים ומחזיר אותן בתחנה המקורית או אחרת. דמי ההשכרה להשכרות קצרות (עד חצי שעה) מאוד זולים (ולעיתים בחינם), וכך הפכו מערכות אלו לפופולאריות ביותר. מספר המקומות לאופניים בכל תחנה כמובן מוגבל ולכן יתכן מצב שבו לקוח מגיע לתחנת השכרה ואין אופניים בנמצא.



בעת תכנון מערכת מסוג זה נשאלות שאלות רבות וביניהן: היכן למקם את תחנות ההשכרה? מהו מספר עמדות האופניים שיהיו בכל תחנה? ועוד.

גם בת"א מתוכננת הקמת מערכת כזו. אנו רוצים לעזור לעירייה לתכנן נכונה את מערך ההשכרה בעזרת מודלים שנלמדו בקורס. בשלב ראשון, מתוכנן להקים לנסיון תחנת השכרה אחת במרכז העיר. מסתבר שניתן למדל תחנה זו בעזרת מודל Erlang-A, כדלהלן:

מספר השרתים במודל הוא מספר האופניים במערכת שזהה, במקרה זה, למספר העמדות להשכרת אופניים שיוקמו בתחנה. שרת (אופניים) "עסוק" אם לקוח כלשהו שכר אותם (כלומר, בעמדה אין אופניים), ו"פנוי" אם האופניים פנויים להשכרה (כלומר, יש בעמדה אופניים). בנוסף, אנו מניחים שלקוחות המגיעים לתחנה בה אין אופניים באף עמדה (כלומר, כל השרתים עסוקים), ימתינו להגעת אופניים לתחנה (כלומר, ימתינו להתפנות שרת) עד שיאבדו את סבלנותם. אנו מניחים לכן כי סבלנות הלקוחות מוגבלת וניתנת למידול בעזרת מ"מ מעריכי עם פרמטר θ .

3.1. כיצד ניתן לאמוד את ממוצע זמן השירות של שרת?

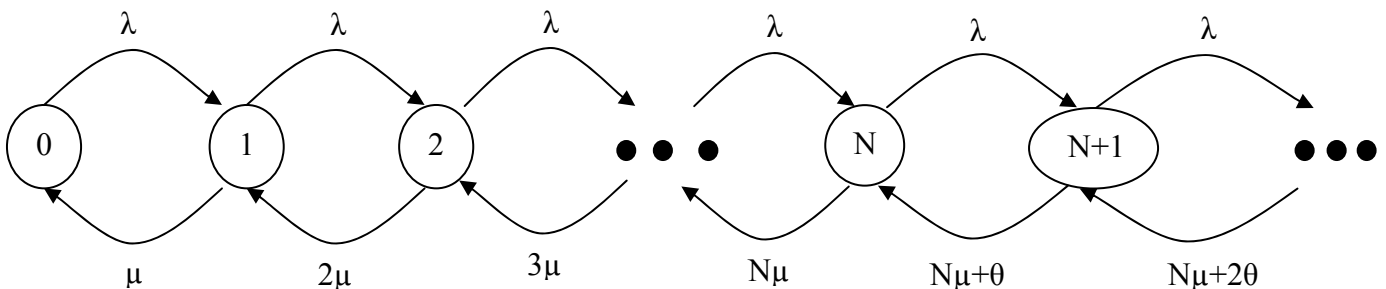
תשובה:

נמדוד לכל אופניים את הזמן בין יציאת האופניים מהתחנה ועד חזרת האופניים לתחנה. בעזרת אוסף נתונים זה אלו ניתן לאמוד את התפלגות זמני ה"שירות", ובפרט לאמוד את הפרמטרים של התפלגות זו ואת הממוצע.

נסמן ב- $L(t)$ את מספר הלקוחות במערכת השירות בזמן t . $L(t)$ כולל את הלקוחות הממתינים בתור לאופניים, כמו גם את הלקוחות שרוכבים כרגע על אופניים שהושכרו. אזי, $L = \{L(t), t \geq 0\}$ הוא תהליך לידה ומוות תורי, תחת הנחות מתאימות, בפרט זמן שירות וסבלנות מעריכיים. נניח מעתה שהנחות אלו אכן מתקיימות.

3.2. השלימו את דיאגרמת קצבי המעבר של L . היעזרו בסימונים הבאים: λ – קצב מופע לקוחות לתחנה, μ – קצב שירות בתחנה, θ – קצב נטישת לקוחות בתור, N – מספר האופניים להשכרה בתחנה (שהוא גם מספר עמדות לאופניים בתחנה).

תשובה:



3.3. האם המערכת ארגודית (תגיע למצב יציב)? הסבירו.

תשובה:

מערכת Erlang-A הינה מערכת ארגודית. הנטישות גורמות לכך שמספר הלקוחות תמיד יתייצב סטטיסטית, על התפלגות סטציונרית שניתן לחשבה בעזרת פתרון משוואות המצב היציב.

נמצא כי זמן השירות מתפלג מעריכית עם ממוצע של 20 דקות, וכן כי ממוצע סבלנות הלקוחות הוא 20 דקות. הוחלט להשתמש במערכת 4CC כדי לתכנן את מספר העמדות הדרושות. הטבלה הבאה היא חלק מפלט של התוכנה 4CC.

4CallCenters v2.23

File Table Settings Help

Performance Profiler | Staffing Query | Advanced Profiling | Advanced Queries | What-if Analysis

Performance Profiler allows you to determine and optimize the Performance Level of your Call Center. Enter your call center's parameters below, then press 'Compute'.

Your Call Center's Parameters

- Number of Agents Answering Calls: 50
- Average Time to Handle One Call (mm:ss): 20:00
- Calls per 60 minute Interval: 160
- Average Callers' Patience (mm:ss): 20:00

Settings

- Features: Abandons
- Basic Interval: 60 minutes
- Target Time: 00:00 (mm:ss)

Change Settings

Compute | Add to Table | Delete Rows | Clear All | Export | Import | Graph

	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Agent's Occupancy	%Answer	%Abandon	Average Speed of Answer	%Answer within Target	Average Queue Length
Results	60.0	00:00.0	50.0	20:00.0	160.0	20:00.0	97.0%	90.9%	9.1%	01:47.7	30.6%	4.8
1												
2												

Ready 10/13/2009 2:29 PM

Settings
Parameters
Indicators

3.4. בסעיפים הבאים אתם מתבקשים לשחזר ערכים שאינם מופיעים בטבלה. (כמובן, כל המדדים מתייחסים למערכת במצב יציב).

3.4.1. שחזרו את הערך החסר עבור תוחלת זמן ההמתנה בתור (בשניות) וחשבו את תוחלת זמן ההמתנה בתור (בשניות) של הלקוחות הממתינים (דהיינו, לא מוצאים אופניים פנויים ברגע מופעם).

תשובה:

עפ"י חוק Little.

$$E[W_q] = \frac{E[L_q]}{\lambda} = \frac{4.8}{160} = 0.03 \text{ hour} = 1.8 \text{ min} = 108 \text{ sec}$$

$$E[W_q | W_q > 0] = \frac{E[W_q]}{P(W > 0)} = \frac{E[W_q]}{1 - \% \text{ Answered within target (target = 0)}} = \frac{108}{1 - 0.306} = 155.6 \text{ sec}$$

3.4.2. שחזרו את ממוצע מספר האופניים המושכרים.

תשובה:

$$L_{\text{service}} = N\rho = 50 * 0.97 = 48.7$$

3.4.3. שחזרו את ממוצע זמן ההמתנה של לקוחות שנטשו את המערכת.

תשובה:

$$E[W_q] = E[W_q | Served] \cdot P(Served) + E[W_q | Abandon] \cdot P(Abandon)$$

$$\Rightarrow E[W_q | Abandon] = \frac{108 - 107 * 0.909}{0.091} = 118 \text{ sec}$$

3.5. כיצד הייתם מגדירים נצילות אופניים בתחנה (לטווח הארוך)? תנו תשובה מדויקת ככל שתוכלו. כיצד תשתנה נצילות המערכת לו היית סבלנות הלקוחות עולה? הסבירו תשובתכם.

תשובה:

הגדרה: נצילות אופניים מוגדרת ע"י
$$\rho = \frac{\lambda(1 - P(\text{Abandon}))}{N\mu}$$

הסבר: כאשר סבלנות הלקוחות עולה, אחוז הנוטשים יורד ולכן נצילות אופניים תעלה.

במטרה לקבוע את מספר עמדות האופניים שיוקמו בתחנה מסוימת, הוגדר יעד רמת שירות של "לכל היותר 20% ממתנינים" (דהיינו, לפחות 80% מקבלים שירות מיידית, כלומר מוצאים אופניים בתחנה, וזאת ללא המתנה בתור). כמתכננים של המערכת, עלינו לנסות לקבוע מה יקרה במערכת תחת תרחישים שונים. בכל אחד משני התרחישים הבאים, תארו מה יקרה בתחנה הנ"ל אם יוקמו בה 50 עמדות לאופניים. בתשובתכם התייחסו לשאלות המנחות.

3.6. **תרחיש א'** - תקופת ההרצה של המערכת: קצב מופע לקוחות 90 לקוחות בשעה (עומס קל)

3.6.1. באיזה תחום תפעולי (ED, QD, QED) פועלת התחנה? הצדיקו קביעתכם.

תשובה:

אם בתחנה 50 עמדות, וקצב המופע הוא 90 לקוחות לשעה (יום קל), המערכת תפעל בתחום ה-QD.

$$50 = \frac{90}{3} + \beta \sqrt{\frac{90}{3}} \Rightarrow \beta = 3.65$$

3.6.2. מה מאפיין תחום תפעולי זה? גבו את טענותיכם בחישובים, או בעזרת הגרפים המצורפים בסוף השאלה.

תשובה:

בתחום תפעולי זה כ- 100% מהלקוחות נענים מיידית, אפקטיבית אין נטישות (על פי הגרפים), ונצילות האופניים תהיה מאוד נמוכה (יחסית לגודל).

$$\rho = \frac{\lambda(1 - P(\text{Abandon}))}{N\mu} = \frac{90 * (1 - 0)}{50 * 3} = 0.6$$

3.6.3. תחת תנאי התרחיש, מהו האיוש (מספר עמדות האופניים) האופטימלי להשגת יעד השירות של 20% ממתנינים? השתמשו בגרפים במצורפים בסוף השאלה.

תשובה:

כדי להגיע ל- 20% ממתנינים, נשתמש בגרף $GMR(1)$, על פי גרף זה יש להשתמש ב- $\beta = 0.8$, לכן נדרשות

$$\left(N = \frac{90}{3} + 0.8\sqrt{30} = 34.38 \right) \text{ בתחנה 35 עמדות אופניים.}$$

3.7. **תרחיש ב'** - לאחר שנה, במידה והמערכת הצליחה מעבר למצופה: קצב מופע לקוחות – 240 לקוחות בשעה (עומס גבוה).

3.7.1. באיזה תחום תפעולי (ED, QD, QED) פועלת התחנה? הסבירו קביעתכם.

תשובה:

אם בתחנה 50 עמדות, וקצב המופע הוא 240 לקוחות לשעה (יום עמוס), המערכת תפעל בתחום ה- ED.

$$50 = \frac{240}{3} + \beta \sqrt{\frac{240}{3}} \Rightarrow \beta = -3.35$$

3.7.2. מה מאפיין תחום תפעולי זה? גבו את טענותיכם בחישובים או בעזרת הגרפים המצורפים בסוף השאלה.

תשובה:

בתחום תפעולי זה כמעט 100% מהלקוחות נדרשים להמתין (לפי הגרף), אחוז הנוטשים גבוה $P(Ab) \approx \gamma$,

כאשר $N = R(1 - \gamma)$ כלומר $\gamma = 1 - \frac{N}{R} = 1 - \frac{50}{80} = 0.375$ או 37.5% נטישה, ונצילות האופניים תהיה

$$\rho = \frac{\lambda(1 - P(\text{Abandon}))}{N\mu} = \frac{240 * (1 - 0.375)}{50 * 3} = 1 \text{ גבוהה}$$

3.7.3. תחת תנאי התרחיש, מהו האיוש (מספר עמדות האופניים) האופטימלי להשגת יעד השירות של 20% ממתנינים? השתמשו בגרפים במצורפים בסוף השאלה.

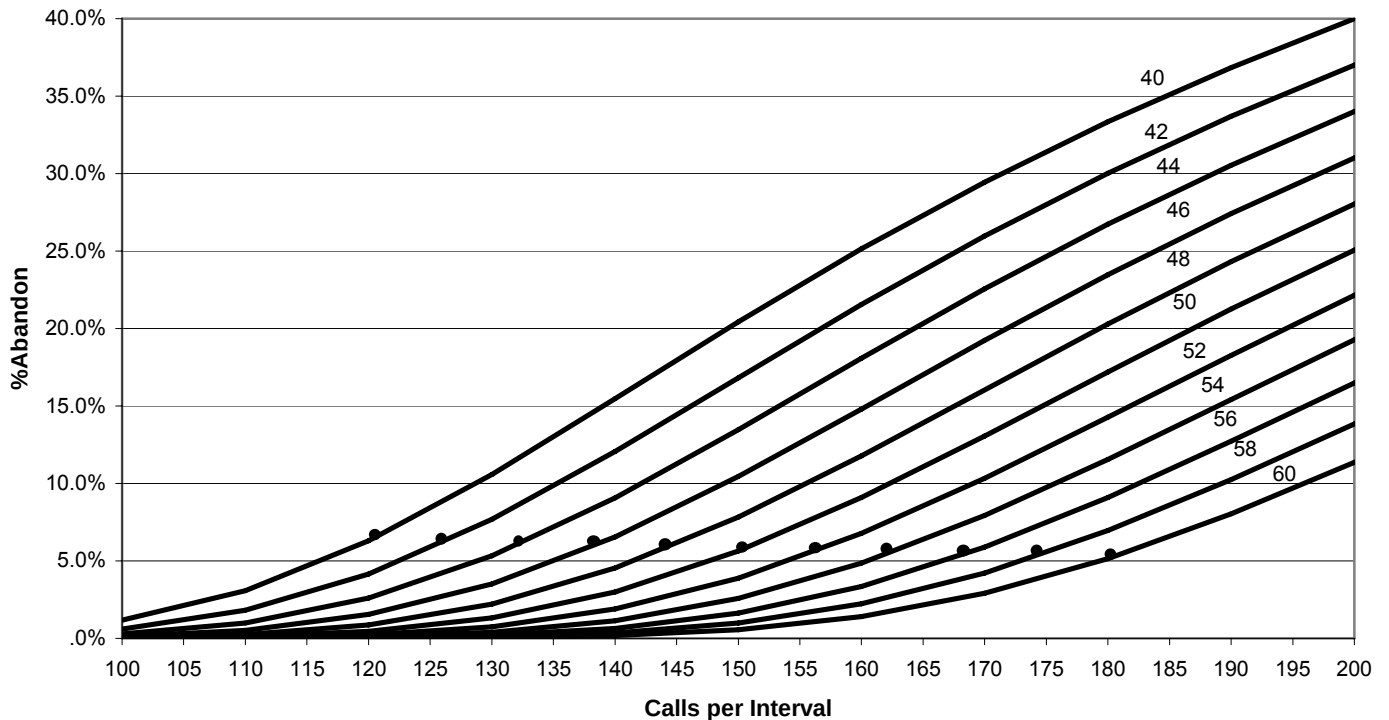
תשובה:

כדי להגיע ל- 20% ממתנינים בלבד נשתמש בגרף $GMR(1)$, על פי גרף זה יש להשתמש ב- $\beta = 0.8$, לכן

$$\left(N = \frac{270}{3} + 0.8\sqrt{80} = 87.15 \right) \text{ נדרשות בתחנה 88 עמדות אופניים.}$$

בגרף עקומות הצפף המופיע בהמשך העמוד מתואר הקשר בין אחוז הלקוחות שנטשו את המערכת וקצב המופע, עבור מספר עמדות אופניים המשתנה בין 40 ל- 60 בקפיצות של 2.

%Abandon vs. Calls per Interval for various Number of Agents



3.8. ציירו על הגרף עקומה המתארת את היתרון לגודל כפי שהוא בא לידי ביטוי בגרף. הסבירו בקצרה מה מאפיין את הנקודות דרכן עוברת העקומה.

תשובה:

נחבר בין נקודות עבורן העומס המוצע פר אופניים (שרת) זהה. לדוגמא, ניתן לחבר בין נקודות בהן עומס מוצע פר שרת שווה ל- 1. נזכור כי $\frac{\lambda}{N\mu} = 1$ אך $\mu = 3 \text{ customers per hour}$, דהיינו, נקודות שעבורן מתקיים $\frac{\lambda}{N} = 3$. אנו רואים כי עקומה זו יורדת, כלומר למרות שהעומס על שרת זהה לאורך הקו, רמת השירות משתפרת עם הגודל.

3.9. מנסיון של מערכות כאלו בעולם נראה שהביקוש (קצב המופע) בתחנות השכרת האופניים אינו קבוע לאורך היום אלא הסתבר כמשתנה במהלך היממה. איזה כלל שיבוץ שנלמד בכיתה רלוונטי למקרים אלו?

תשובה:

כלל השיבוץ המתאים למערכות משתנות בזמן הוא $N = R(t) + \beta \sqrt{R(t)}$, כאשר $R(t) = E[S]E[\lambda(t - S_e)]$ הוא ה-offered-load התלוי בזמן.

ענו על הסעיפים הבאים (3.10-3.12) רק אם סיימתם את שאר המבחן.

בשלב שני רוצים להקים בת"א מערכת השכרת אופניים כלל עירונית. בשלב זה, תפוזרנה תחנות רבות ברחבי העיר ולקוחות המשכירים אופניים בתחנה אחת, יוכלו להחזיר אותם בתחנה אחרת. כאמור, תהליך שכירת והחזרת האופניים יתנהל באופן אוטומטי. במערכת כזו יתכן גם מצב שבו לקוחות רוצים להחזיר אופניים לתחנה, אך כל העמדות תפוסות. לקוח כזה צריך להמתין עד שתתפנה עמדה (כלומר יגיע לקוח שרוצה לשכור אופניים) או לנסות להחזיר את אופניו בתחנה אחרת.

מכיוון שאופניים שהושכרו בעמדה אחת מוחזרים בד"כ בעמדה אחרת, נתייחס למספר השרתים במודל כמספר עמדות השכרת האופניים בתחנה. שרת "עסוק" אם בעמדה אין אופניים, ו"פנוי" אם יש בעמדה אופניים פנויות להשכרה. כמו קודם, אנו מניחים שלקוחות המגיעים לתחנה בה אין אופניים באף עמדה (כלומר, כל השרתים עסוקים), ימתינו להגעת אופניים לתחנה (כלומר, ימתינו להתפנות שרת). אנו מניחים, כקודם, כי סבלנות הלקוחות מוגבלת וניתנת למידול בעזרת מ"מ מעריכי עם פרמטר θ . בנוסף, אנו מניחים שלקוחות המגיעים לתחנה בה כל העמדות תפוסות, ימתינו להתפנות עמדה בתחנה, עד שתפקע סבלנותם ויעברו לתחנה אחרת. אנו מניחים לכן כי גם סבלנות הלקוחות במצב זה מוגבלת וניתנת למידול בעזרת מ"מ מעריכי עם פרמטר η .

3.10. כיצד ניתן עתה לאמוד את ממוצע זמן השירות של שרת?

תשובה:

נמדוד לכל עמדה את הזמן בין יציאת האופניים מהעמדה ועד חזרת אופניים כלשהם לעמדה זו. בעזרת נתונים אלו ניתן לבדוק את התפלגות זמני ה"שירות" ולאמוד את הפרמטרים של התפלגות זו.

3.11. הגדירו תהליך לידה ומוות תורי אחר, שממל בצורה מפורטת תחנה אחת שהיא חלק של המערכת הכלל עירונית. ציירו את דיאגרמת קצבי המעבר של המודל המוצע והסבירו אותו. היעזרו בסימונים הבאים:

λ – קצב הגעת לקוחות שרוצים להשכיר אופניים לתחנה.

μ – קצב הגעת לקוחות שרוצים להחזיר אופניים לתחנה.

θ – קצב נטישת לקוחות בתור להשכרת אופניים.

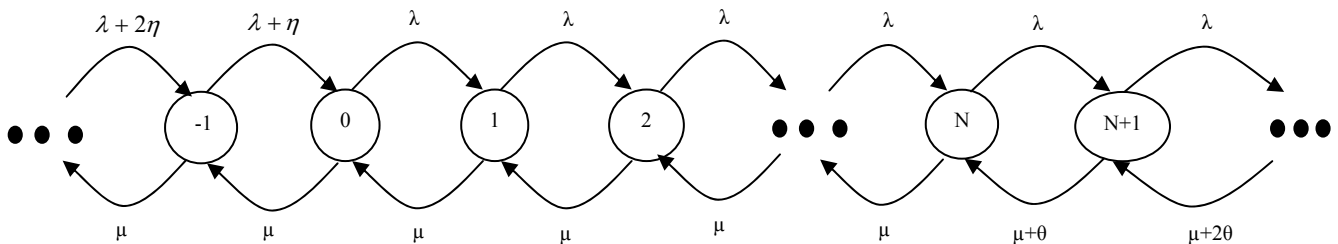
η – קצב נטישת לקוחות בתור להחזרת אופניים.

N – מספר עמדות השירות בתחנה.

רמז: ניתן להגדיר תהליך כזה על מרחב המצב $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. מצבים שלילים מתאימים להחזרת אופניים כאשר כל העמדות תפוסות.

תשובה:

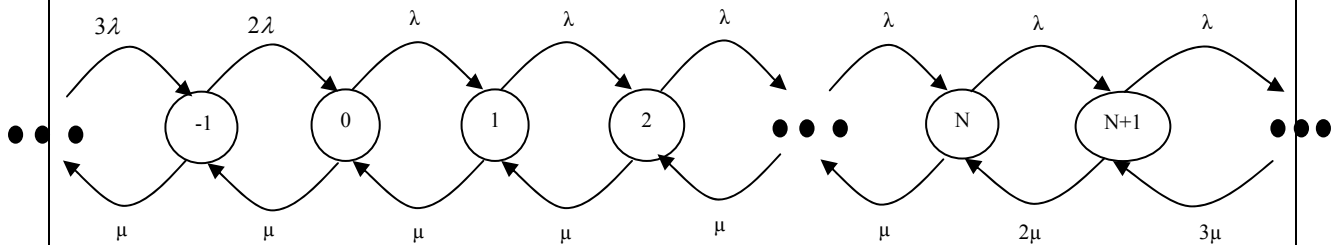
נגדיר את L מספר הלקוחות במערכת כך שיוכל לקבל גם ערכים שליליים, כאשר ערך שלילי של L משמעו מספר הלקוחות הממתינים בתור להחזרת אופניים (או מספר העמדות החסרות). כאשר כל העמדות מלאות, לקוחות שרוצים להשכיר ממשיכים להגיע בקצב λ , ונניח שלקוחות שרוצים להחזיר אופניים מגיעים בקצב μ (יש לשים לב, כי מכיוון שמדובר במערכת גדולה מאוד, קצב החזרת האופניים קבוע ולא תלוי במצב התחנה). לקוחות שממתינים להחזרה נוטשים את תור ההחזרה אם הם מחליטים לנסוע לתחנה אחרת ולנסות להחזיר את האופניים בה; נניח כי זה קורה בקצב η . לקוחות שממתינים להשכרה נוטשים את תור ההחזרה אם "נגמרה להם הסבלנות"; נניח כי זה קורה בקצב θ .



3.12. ניתן להראות שהמערכת ארגודית (תגיע למצב יציב). הסבירו מדוע. תארו בדיוק ככל שתוכלו את פתרון משוואות המצב היציב של ההתפלגות הגבולית או הסטציונרית, למקרה הפרטי בו $\mu = \theta, \lambda = \eta$.

תשובה:

במקרה הפרטי בו $\mu = \theta, \lambda = \eta$ השרשרת היא:



משוואות המצב היציב הן (לפי שיטת החתכים):

$$(1-i)\lambda\pi_i = \mu\pi_{i+1} \quad -\infty < i < 0$$

$$\lambda\pi_i = \mu\pi_{i+1} \quad 0 \leq i < N$$

$$\lambda\pi_i = (i-N+2)\mu\pi_{i+1} \quad N \leq i < \infty$$

$$\sum \pi_i = 1$$

נסדר את המשוואות

$$\pi_i = \frac{\mu}{\lambda(1-i)} \pi_{i+1} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{-i} \frac{1}{(1-i)!} \pi_0 \quad -\infty < i < 0$$

$$\pi_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+1} \pi_0 \quad 0 \leq i < N$$

$$\pi_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu(i-N+2)} \pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+1} \frac{1}{(i-N+2)!} \pi_0 \quad N \leq i < \infty$$

$$\sum \pi_i = 1$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \left[1 + \sum_{i=-\infty}^{-1} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{-i} \frac{1}{(1-i)!} + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{i+1} + \sum_{i=N}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{i+1} \frac{1}{(i-N+2)!} \right]^{-1} \\
&= \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^i \frac{1}{(1+i)!} + \frac{\lambda}{\mu} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \frac{1}{i!} - 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \right]^{-1} = \\
&= \left[e^{-\frac{\mu}{\lambda}} - \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^N}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{N-1} \left(e^{-\frac{\lambda}{\mu}} - 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \right]^{-1}
\end{aligned}$$

המערכת תהיה יציבה כיוון שהיא חיבור של שלוש שרשראות: בצד ימין שרשרת דומה למודל Erlang-A, שבעצמה יציבה (כיוון שהנטישות ידאגו לכך שהשרשרת לא תשאך לאינסוף) ובמקרה פרטי זה יש לה התפלגות מצב יציב פואסונית. במרכז זהו תהליך לידה ומוות עם התפלגות מצב יציב גיאומטרית, ובצד שמאל שרשרת "הפוכה" לשרשרת של מודל Erlang-A, שלה שוב התפלגות מצב יציב פואסונית (הנטישות במקרה זה גורמות לכך שהשרשרת לא תשאף למינוס אינסוף).

במקרה הכללי משוואות המצב היציב הן (לפי שיטת החתכים):

$$\begin{aligned}
(\lambda - i\eta)\pi_i &= \mu\pi_{i+1} & -\infty < i < 0 \\
\lambda\pi_i &= \mu\pi_{i+1} & 0 \leq i < N \\
\lambda\pi_i &= (\mu + (i - N + 1)\theta)\pi_{i+1} & N \leq i < \infty \\
\sum \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

נסדר את המשוואות

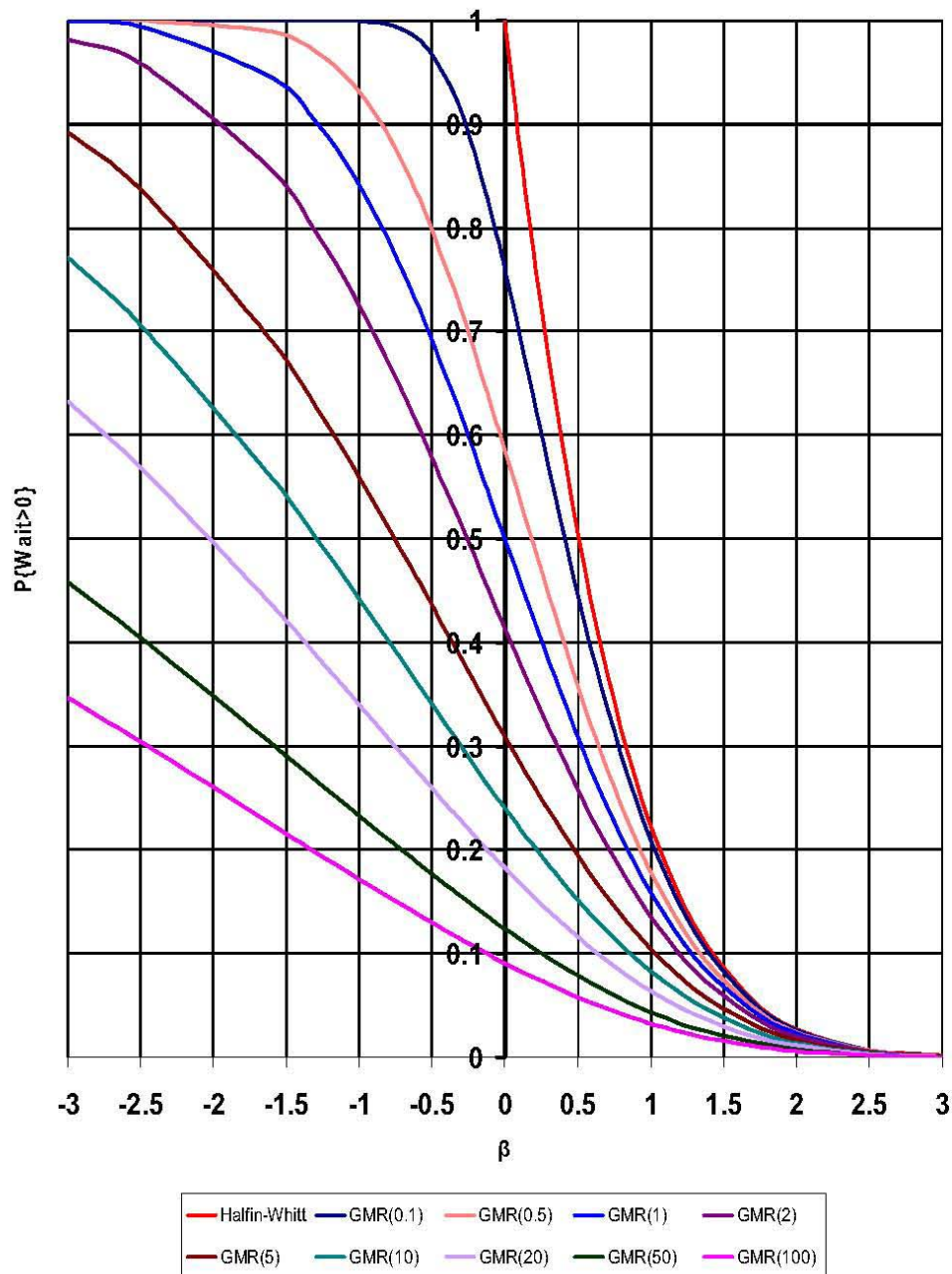
$$\begin{aligned}
\pi_i &= \frac{\mu}{\lambda - i\eta} \pi_{i+1} = \prod_{j=1}^{-i} \frac{\mu}{\lambda + j\eta} \pi_0 & -\infty < i < 0 \\
\pi_{i+1} &= \frac{\lambda}{\mu} \pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{i+1} \pi_0 & 0 \leq i < N \\
\pi_{i+1} &= \frac{\lambda}{\mu + (i - N + 1)\theta} \pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^N \prod_{j=1}^{i+1-N} \frac{\lambda}{\mu + (j - N + 1)\theta} \pi_0 & N \leq i < \infty \\
\sum \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

ולכן

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{i=-\infty}^{-1} \prod_{j=1}^{-i} \frac{\mu}{\lambda + j\eta} + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{i+1} + \sum_{i=N}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^N \prod_{j=1}^{i+1-N} \frac{\lambda}{\mu + (j - N + 1)\theta} \right]^{-1}$$

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .

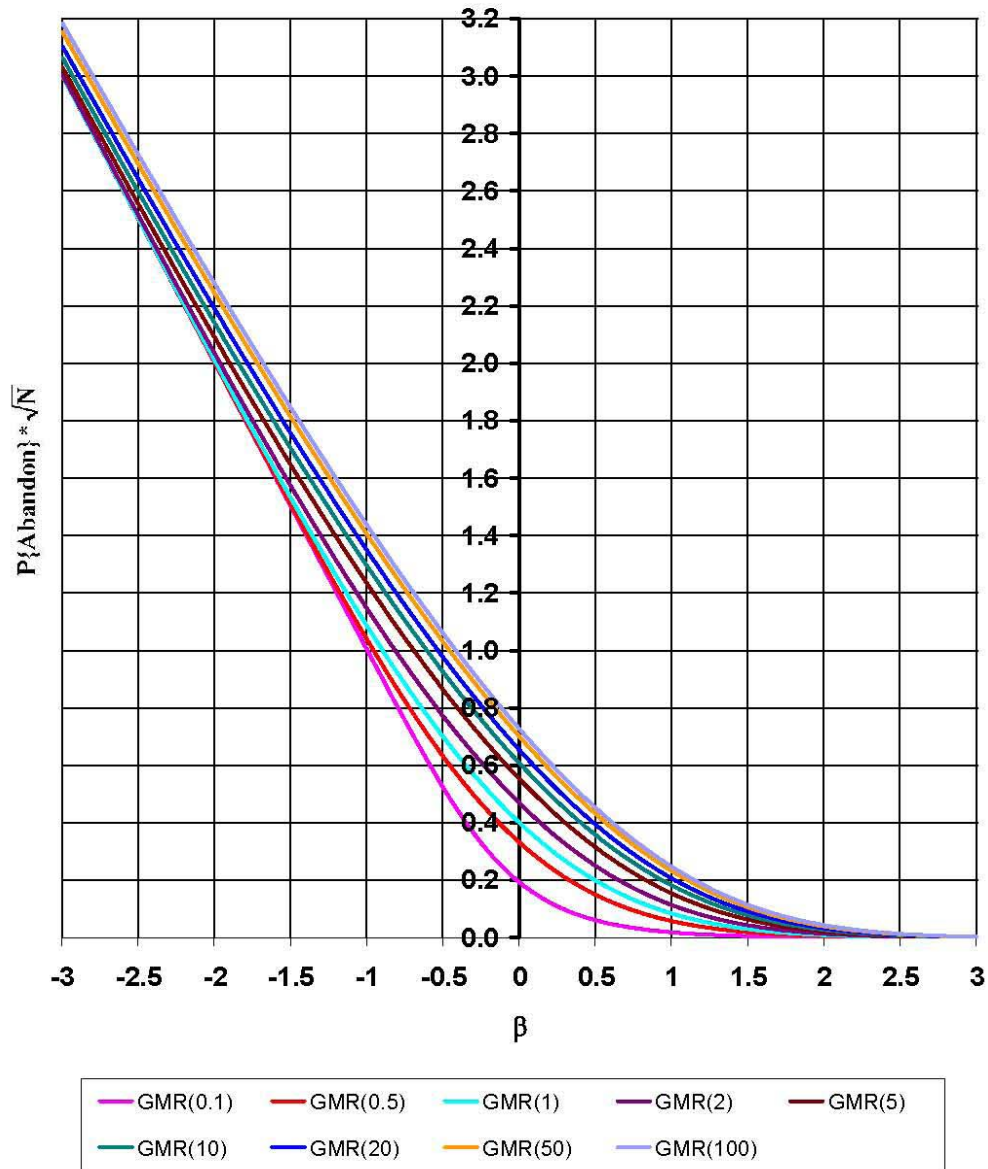


GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\theta/\mu = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

Note: **Erlang-C** = limit of **Erlang-A**, as patience $\uparrow$ indefinitely.

Erlang-A: % Abandonment

$\%Ab \times \sqrt{n}$ vs. β , for varying (im)patience (θ/μ):



Note the behavior like $-\beta/\sqrt{n}$, for (relatively) large negative β and over all (im)patience levels. For an explanation, think **ED**: $n = R + \beta\sqrt{R} = R - \gamma R$; hence $\gamma \approx -\beta/\sqrt{R} \approx -\beta/\sqrt{n}$, and γ is $P\{Ab\}$ in the ED-Regime.

שאלה 4 – תיאוריה ושימושה

בעמודים הבאים מופיעים דפי הרצאה ותרגול, ובהם חלקים או עובדות חסרים. בהתאם להוראות השלימו את הפרטים החסרים.

חלק 1

בעמוד זה מופיעה הוכחת תוצאות "אמידה מוטה" (Biased Sampling) בעזרת תכונת PASTA, כפי שהוכחה בכיתה.

Biased Sampling (via PASTA)

A *renewal process* is a counting process with iid interarrivals.

Descriptions: $R = \{R(t), t \geq 0\}$ or $\{T_1, T_2, \dots\}$ iid, or $\{S_1, S_2, \dots\}$

Example: Poisson exponential Erlang

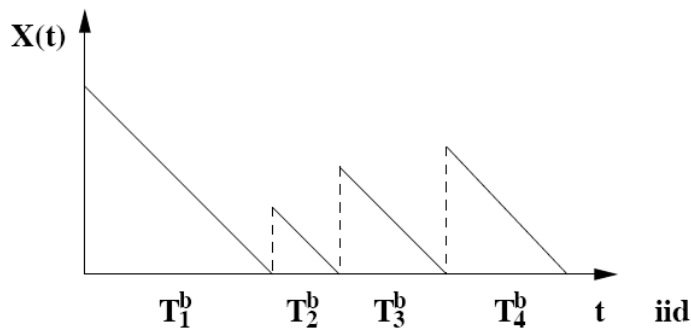
Story: Buses arrive to a bus stop according to a renewal process $R_b = \{R_b(t), t \geq 0\}$.

T_i^b — times between arrivals of the buses.

Passengers arrive to the bus stop in a completely random fashion (Poisson).

S_i^p — arrival times of the passengers.

Question: How long, on average, do they wait? Plan service-level.



$A = \{A(t), t \geq 0\}$ = Poisson arrivals of passengers.

$X = \{X(t), t \geq 0\}$ = state = *Virtual waiting time*.

$$\text{PASTA: } \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = \lim_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(S_n^p -) = \bar{\tau}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{\tau} &= \frac{1}{T} \cdot (\text{area under } X, \text{ over } [0, T]) \\ &\approx \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{1}{2}(T_1^b)^2 + \frac{1}{2}(T_2^b)^2 + \dots + \frac{1}{2}(T_{R_b(T)}^b)^2 \right) \\ &= \frac{R_b(T)}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1^2 + \dots + T_{R_b(T)}^2}{R_b(T)} \xrightarrow{T \uparrow \infty} \frac{1}{E(T_1^b)} \cdot \frac{1}{2} \cdot E(T_1^b)^2, \text{ by SLLN} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} E(T_1^b)}_{\text{"Deterministic" answer}} \underbrace{[1 + c^2(T_1^b)]}_{\text{Bias, due to variability}}, \quad c = \frac{\sigma}{E} \text{ coefficient of variation.} \end{aligned}$$

Check Poisson bus arrivals to derive Paradox:

$$1(\text{"stochastic" answer}) = \frac{1}{2} (\text{"deterministic" answer}).$$

4.1 בהקשר למופע האוטובוסים לתחנה, ההוכחה הנ"ל מחשבת את ממוצע משך ההמתנה מרגע מופע נוסע לתחנה עד רגע מופע האוטובוס עליו עלה הנוסע. כיצד ניתן לשנות את ההוכחה כדי לחשב את ממוצע הזמן בין מופע נוסע והאוטובוס האחרון שהגיע לתחנה לפני מופעו.

תשובה :

במקרה זה נגדיר את $X(t)$ להיות הזמן שעבר מאז מופע האוטובוס האחרון. אם נצייר את $X(t)$, במקרה זה הוא יראה כמו קודם אך המשולשים הפוכים (היתר לפני האנך בציר ה- X), כיוון שזמן זה גדל ליניארית ממופע אוטובוס אחד למשנהו. המשך ההוכחה זהה, וגם התוצאה זהה, מכיוון ששטחי המשולשים נשארים ללא שינוי.

חלק 2

בעמוד הבא מופיעה הוכחת נוסחת חינוצ'ין-פולטצ'ק.

4.2.1 עבור אילו מודלים תקפה הנוסחה במדויק ובקרוב?

תשובה :

הנוסחה נכונה במדויק במודל $M/G/1$. (וכמובן במקרה הפרטי $M/M/1$) בעומס גבוה ואם $C^2(A) = 1$, אזי נוסחה זו תהיה טובה בקירוב גם למודל $G/G/1$. (קירוב במובן של $\rho \uparrow 1$)

4.2.2 מההוכחה נמחק חלקה האחרון. השלימו חלק זה, תוך סיום כתיבת הנוסחה במלואה.

תשובה:

$$\begin{aligned} &= E(R) + \lambda E(S_1) E(W_q) , \quad \text{by Little,} \\ E(W_q) &= E(R) + \rho E(W_q) , \quad \rho < 1 \Leftrightarrow \exists \text{ steady-state,} \\ E(W_q) &= E(R) / (1 - \rho) . \end{aligned}$$

לסיכום, נוסחת חניצין פולטשק היא:

$$E[W_q] = E[S] \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1+C^2(S)}{2}$$

Derivation of Khintchine-Pollaczek

For customer $n = 1, 2, \dots$, denote

$W_q(n)$ = waiting-time of n -th customer.

$R(n)$ = residual service time, at time of the n -th arrival;
(= 0, for arrivals without waiting).

$L_q(n)$ = # of customers in queue, at time of n -th arrival.

$\{S_n\}$ = sequence of service-times.

$$W_q(n) = R(n) + \sum_{k=n-L_q(n)}^{n-1} S_k, \quad n \geq 1.$$

$$EW_q(n) = ER(n) + E(S_1) \cdot EL_q(n), \quad \text{by Wald,}$$

$$E(W_q) = E(R) + E(S_1)E(L_q), \quad n \uparrow \infty, \text{ assuming } \exists \text{ limit + PASTA,}$$

by Little,

$\rho < 1 \Leftrightarrow \exists$ steady-state,

חלק ההוכחה שנמחק

Left to calculate $E[R]$?

Via **Biased Sampling** (see next page):

- ρ = Prob. of arriving to a busy server. (**PASTA+Little**)

$$- E(R) = (1 - \rho) \cdot 0 + \rho \cdot E(S) \cdot \frac{1 + C^2(S)}{2}. \quad \text{q.e.d.}$$

Finally, the K-P formula is:

$$E[W_q] =$$

טבלה 1

call_id	q_start	q_exit	ser_start	ser_exit	outcome	wait_time	service_time	Agent
510013309	06:23:00	06:23:07	06:23:08	06:25:01	Agent	7	113	23015
510013355	06:23:19	06:24:30	06:24:31	06:24:51	Agent	71	20	23007
510013559	06:24:52	06:24:52	06:24:52	06:26:57	Agent	0	125	23007
510013814	06:26:32	06:26:33	06:26:33	06:27:27	Agent	1	54	23015
510013830	06:26:36	06:26:38	00:00:00	00:00:00	Abandon	2	0	0
510013871	06:26:47	06:26:57	06:26:58	06:28:45	Agent	10	107	23007
510014006	06:27:53	06:27:53	06:27:53	06:29:46	Agent	0	113	23015
510014071	06:28:15	06:28:45	06:28:46	06:29:04	Agent	30	18	23007
510014116	06:28:35	06:29:04	06:29:05	06:30:31	Agent	29	86	23007
510014132	06:28:43	06:29:46	06:29:47	06:31:27	Agent	63	100	23015
510014196	06:29:05	06:30:31	06:30:32	06:34:32	Agent	86	240	23007
510014425	06:30:38	06:31:27	06:31:27	06:34:31	Agent	49	184	23015
510014578	06:31:32	06:34:31	06:34:32	06:35:54	Agent	179	82	23015
510014674	06:32:06	06:34:32	06:34:33	06:37:04	Agent	146	151	23007
510014702	06:32:18	06:33:00	00:00:00	00:00:00	Abandon	42	0	0
510014712	06:32:26	06:35:54	06:35:55	06:37:37	Agent	208	102	23015
510014750	06:32:37	06:36:08	06:36:09	06:47:58	Agent	211	709	23041
510014927	06:33:46	06:37:04	06:37:05	06:43:49	Agent	198	404	23007
510015175	06:35:19	06:36:04	00:00:00	00:00:00	Abandon	45	0	0
510015368	06:36:28	06:37:37	06:37:38	06:39:53	Agent	69	135	23015
510015393	06:36:35	06:37:54	00:00:00	00:00:00	Abandon	79	0	0
510015405	06:36:39	06:39:53	06:39:54	06:51:04	Agent	194	670	23015
510015441	06:36:55	06:43:49	06:43:50	06:45:58	Agent	414	128	23007
510015539	06:37:41	06:45:58	06:45:59	06:47:44	Agent	497	105	23007
510015752	06:38:54	06:39:14	00:00:00	00:00:00	Abandon	20	0	0
510015802	06:39:13	06:40:31	00:00:00	00:00:00	Abandon	78	0	0
510016057	06:40:42	06:40:59	00:00:00	00:00:00	Abandon	17	0	0
510016208	06:41:36	06:47:44	06:47:45	06:51:29	Agent	368	224	23007
510016446	06:42:56	06:47:58	06:47:59	06:48:31	Agent	302	32	23041
510016552	06:43:35	06:45:36	00:00:00	00:00:00	Abandon	121	0	0
510016619	06:44:02	06:48:31	06:48:32	06:50:56	Agent	269	144	23041
510016625	06:44:05	06:46:13	00:00:00	00:00:00	Abandon	128	0	0
510016700	06:44:32	06:50:56	06:50:57	06:56:20	Agent	384	323	23041
510016708	06:44:36	06:51:04	06:51:05	06:53:01	Agent	388	116	23015
510016925	06:45:53	06:51:29	06:51:30	06:53:14	Agent	336	104	23007
510017302	06:48:04	06:53:01	06:53:02	06:54:12	Agent	297	70	23015
510017389	06:48:31	06:49:30	00:00:00	00:00:00	Abandon	59	0	0
510017423	06:48:42	06:53:14	06:53:14	06:54:56	Agent	272	102	23007
510017606	06:49:55	06:54:12	06:54:12	06:55:49	Agent	257	97	23015
510017636	06:50:03	06:51:57	00:00:00	00:00:00	Abandon	114	0	0
510017717	06:50:38	06:54:56	06:54:57	06:56:50	Agent	258	113	23007

טבלה 2

time	Arr_sys	Dep_sys	Arr_q	Dep_q	Arr_ser	Dep_ser
06:15	6	6	6	6	5	5
06:16	6	6	6	6	5	5
06:17	6	6	6	6	5	5
06:18	6	6	6	6	5	5
06:19	7	6	7	7	6	5
06:20	7	6	7	7	6	5
06:21	7	6	7	7	6	5
06:22	8	6	8	8	7	5
06:23	9	6	9	9	8	5
06:24	11	7	11	10	9	6
06:25	12	9	12	12	11	8
06:26	12	10	12	12	11	9
06:27	15	12	15	15	13	10
06:28	16	13	16	16	14	11
06:29	19	14	19	17	15	12
06:30	20	16	20	19	17	14
06:31	21	17	21	20	18	15
06:32	22	18	22	21	19	16
06:33	26	18	26	21	19	16
06:34	27	19	27	22	19	16
06:35	27	21	27	24	21	18
06:36	28	22	28	25	22	19
06:37	32	24	32	27	23	20
06:38	33	27	33	30	25	22
06:39	34	27	34	30	25	22
06:40	35	29	35	32	26	23
06:41	36	31	36	34	26	23
06:42	37	31	37	34	26	23
06:43	38	31	38	34	26	23
06:44	39	32	39	35	27	24
06:45	43	32	43	35	27	24
06:46	44	34	44	37	28	25
06:47	44	35	44	38	28	25
06:48	44	37	44	40	30	27
06:49	47	38	47	41	31	28
06:50	48	39	48	42	31	28
06:51	51	40	51	43	32	29
06:52	53	43	53	46	34	31
06:53	54	43	54	46	34	31
06:54	54	45	54	48	36	33
06:55	54	47	54	50	38	35
06:56	56	49	56	52	39	36
06:57	59	52	59	55	41	38
06:58	59	53	59	56	42	39
06:59	60	54	60	57	43	40
07:00	60	55	60	59	44	40
07:01	62	57	62	62	46	41
07:02	64	57	64	64	48	41
07:03	70	62	70	68	51	45
07:04	70	63	70	70	53	46
07:05	71	65	71	71	54	48
07:06	74	67	74	74	57	50
07:07	79	69	79	78	61	52
07:08	80	72	80	80	63	55