



מרצה : ד"ר גלית יום-טוב

מתרגל : אריק סנדרוביץ'

תאריך הבחינה : 17.2.2015

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד א' – סמסטר חורף 2015

פתרון

- המבחן נמשך **שלוש** שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- **המבחן בחומר סגור.**
- **מותר להשתמש במחשבון מדעי רגיל.**
- המבחן כולל 28 עמודים, כולל עמוד זה.
- **כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.**
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת **הסברים או הוכחות רק אם** התבקשתם במפורש לעשות זאת.

ניקוד :	שאלה 1	_____ מתוך 25 נקודות	בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים
	שאלה 2	_____ מתוך 20 נקודות	תרגילי בית
	שאלה 3	_____ מתוך 40 נקודות	יישום
	שאלה 4	_____ מתוך 15 נקודות	תיאוריה ושימושיה

סה"כ _____ מתוך 100 נקודות

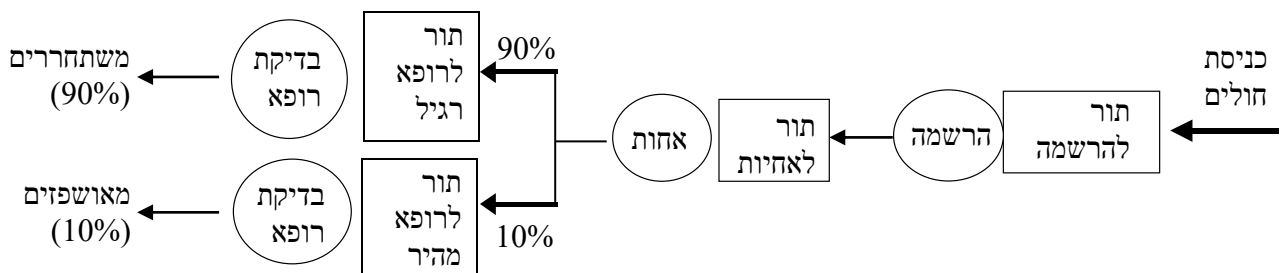
בהצלחה !

שאלה 1 - בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים (25 נקודות).

חלק 1: חוק Little (15 נקודות)

חולים הפונים לחדר מיון בבית חולים מסוים עוברים את תהליך הטיפול לפי התרשים המצורף. התהליך מתחיל בהרשמה. אחרי ההרשמה, החולים עוברים בדיקה אצל **אחיות** שמסווגות אותם לחולים **משתחררים פוטנציאליים** (הנשלחים לרופא "רגיל", מקבלים הוראות וטיפול ולא מאושפזים) או **מאושפזים פוטנציאליים** (הנשלחים לטיפול דחוף ובסוף הטיפול יאושפזו). שני סוגי החולים מחכים בתורים נפרדים לקראת בדיקת רופא. הרופא בודק את החולים. לאחר בדיקת הרופא, החולים המאושפזים נשלחים למחלקות בבית-החולים; החולים המשתחררים מקבלים טיפול והוראות להמשכו (למשל מרשמים) ואז משתחררים לביתם. נניח, בשלב זה, שאחיות המיון לא עושות טעויות וממיינות 100% מהחולים בצורה נכונה.

מדידות מראות שממוצע קצב הגעת חולים למיון הוא 50 חולים בשעה, מתוכם בסופו של דבר מאושפזים 10% מהפונים. תהליך הרשמה של חולה נמשך 2 דקות בממוצע. בדיקת אחות אורכת 3 דקות בממוצע. משך זמן בדיקת רופא משתנה בין שני סוגי החולים: 5 דקות למשתחררים פוטנציאליים ו-30 דקות למאושפזים פוטנציאליים, בממוצע. נמצא גם כי בממוצע 20 חולים ממתינים בתור להרשמה ו-5 חולים ממתינים בתור לאחות. בנוסף, תור החולים המשתחררים (הרגילים) לקראת בדיקת רופא הוא 15 חולים בממוצע ותור החולים המאושפזים (הדחופים) הוא חולה אחד בממוצע.



1.1 (3 נקודות) כמה זמן בממוצע ישה חולה בחדר המיון?

תשובה: נחלק את חדר המיון לשש מערכות: 1 – תור להרשמה, 2 – הרשמה, 3 – תור לאחיות, 4 – בדיקת אחיות, 5 – תור לרופאים, 6 – בדיקת רופא.
נחשב את זמני השהיה בכל שלב ונסכם אותם:

$$\lambda = \frac{5}{6} \text{ customers per min}$$

$$L_1 = 20, W_1 = \frac{L_1}{\lambda} = 24 \text{ min}$$

$$W_2 = 2 \text{ min}$$

$$L_3 = 5, W_3 = \frac{L_3}{\lambda} = 6 \text{ min}$$

$$W_4 = 3 \text{ min}$$

$$L_5 = 15 + 1 = 16, W_5 = \frac{L_5}{\lambda} = 19.2 \text{ min}$$

$$W_6 = 5 \cdot 90\% + 30 \cdot 10\% = 7.5 \text{ min}$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 = 61.7 \text{ min}$$

1.2 (3 נקודות) כמה חולים בממוצע יהיו סה"כ בחדר המיון?

תשובה: על סמך חוק Little:

$$L = \lambda W = \frac{5}{6} \cdot 61.7 = 51.4$$

1.3 (3 נקודות) כמה זמן בממוצע ישהו מאושפזים פוטנציאליים בחדר המיון?

תשובה: ההבדל בזמני השהיה של חולים מאושפזים למשתחררים נובע רק משלבים 5 ו-6 ולכן:

$$W_5^{hosp} = \frac{I_5^{hosp}}{\lambda^{hosp}} = \frac{1}{\frac{5}{6} \cdot 10\%} = 12 \text{ min}$$

$$W_6^{hosp} = 30 \text{ min}$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5^{hosp} + W_6^{hosp} = 77 \text{ min}$$

1.4 (3 נקודות) מהו מספר הפקידים המינימלי בעמדת ההרשמה שיאפשר מצב שבו נצילותם לא תעלה על 80%.

תשובה:

$$R = \lambda E[S] = \frac{5}{6} \cdot 2 = \frac{10}{6} \text{ min} \quad \text{נחשב את ה-offered load}$$

$$\text{לכן, מספר הפקידים המינימלי הוא } 3. \text{ הנצילות שלהם תהיה } \frac{R}{n} = \frac{5}{9} = 55.5\%$$

1.5 (3 נקודות) מהו מספר הרופאים המינימלי שנדרש כדי להבטיח את יציבות המערכת?

תשובה:

נחשב את ה-offered load בנפרד למשתחררים ולמתאשפזים:

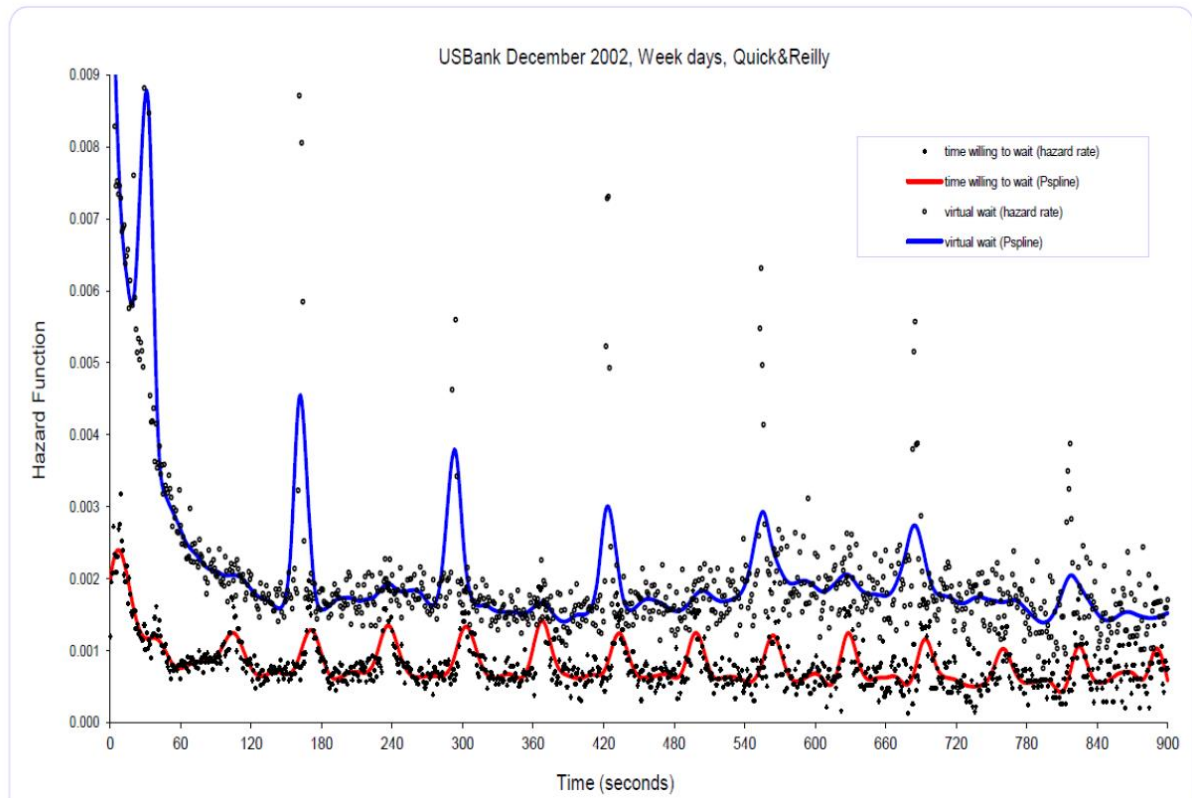
$$R_{hosp} = \lambda \cdot 10\% \cdot E[S] = \frac{5}{6} \cdot 0.1 \cdot 30 = 2.5$$

$$R_{dis} = \lambda \cdot 90\% \cdot E[S] = \frac{5}{6} \cdot 0.9 \cdot 5 = 3.75$$

לכן, מספר הרופאים המינימלי הוא 7 רופאים.

חלק 2: סבלנות ופרוטוקולים (10 נקודות)

2.1 (5 נקודות) להלן גרף המתאר את פונקציית הסיכון של שני משתנים מקריים: זמן עד כניסה לשירות (הגרף העליון) וזמן עד נטישה (הגרף התחתון). בגרפים נראים קפיצות בזמנים שונים. תארו הסברים אפשריים היכולים לגרום לקפיצות אלו. יש לספק לפחות הסבר אחד לכל אחד מהגרפים.

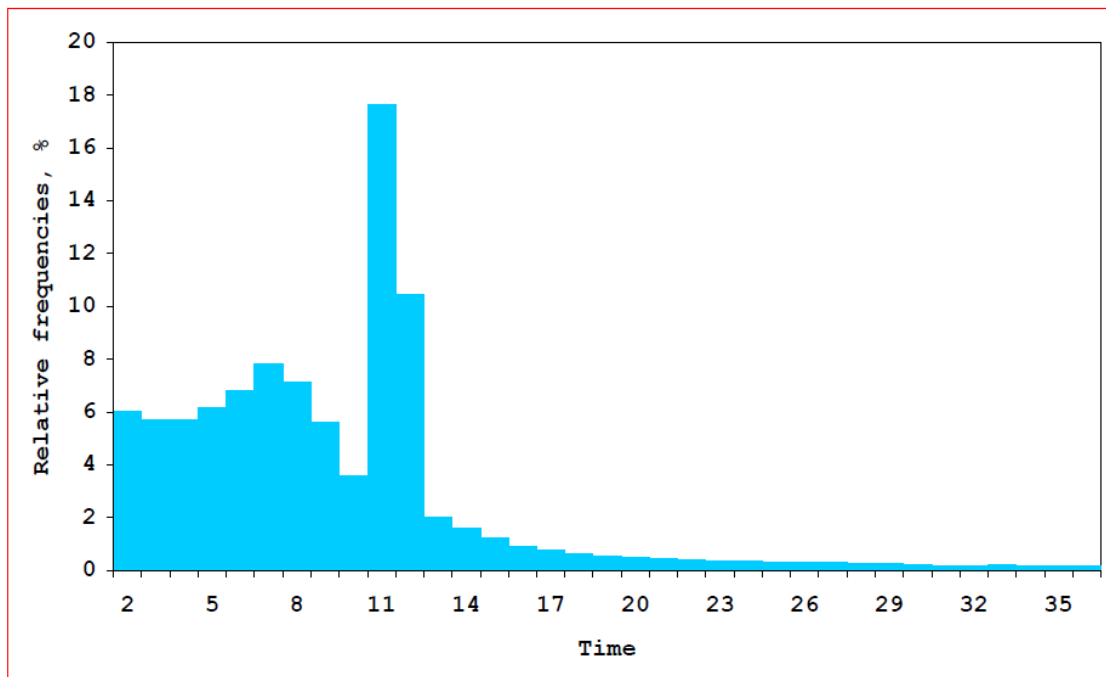


תשובה:

הגרף העליון (כחול) מתאר תופעה של שינוי (עליית) תיעדוף לקוח בתור לאחר כל 2 דקות המתנה. כאשר העדיפות של לקוח עולה הסיכוי שהוא יקבל שירות עולה, ולכן רואים בנקודות זמן אלו שינוי בפונקציית הסיכון לקבלת שירות.

הגרף התחתון מתאר השפעה של הודעות ללקוחות הניתנות כל 60 שניות על נטישה. כאשר ניתנת הודעה היא מזכירה ללקוח שהוא ממתין, ואנו רואים שינוי בסבלנות של הלקוח וכתוצאה מכך נטישה מוגברת עם מסירת ההודעה.

2.2 (5 נקודות) להלן גרף המתאר היסטוגרמה של זמני המתנה במוקד שירות. מה התופעה אותה רואים בתרשים? הסבר.



תשובה:

התרשים רואים את ההשפעה של מדיניות ניתוב במרכז שירות גדול. המדיניות קובעת שלקוח מועבר לתור תאומד לאחר 10 שניות המתנה בתור. כתוצאה מכך רואים קפיצה בהתפלגות זמני ההמתנה, כיוון שהסיכוי לקבל שירות בקבוצת שרתים יותר גדולה הוא גבוה יותר וכתוצאה מכך, רוב הלקוחות מקבלים שירות מייד ברגע שהם עברו לתור המשותף.

שאלה 2 – תרגילי בית (20 נקודות).

ארבעה עשר מוקדנים עובדים במרכז השירות של GazolCo. רוב השיחות הן של לקוחות המתקשרים לשלם את חשבון הגז שלהם. מנתוני שיחות שניתחנו עולה כי זמן שירות טלפוני ממוצע הוא 4 דקות, וקצב השיחות הנכנסות הוא 180 שיחות לשעה, והסבלנות הממוצעת היא 3 דקות. אנו רוצים לעזור למנהל השירות לנתח את המערכת ולקבוע איוש מתאים בעזרת תוכנת 4CC.

2.1 (2 נקודות) מנהל המערכת רצה לבדוק מה יקרה אם קצב השיחות הנכנסות יגדל (בעוד מספר השרתים נשאר קבוע). להלן שתי טבלאות המתארות מה יקרה במצבים אלו. הטבלאות מבוססות על פלטים של התוכנה 4CC, אחד הופק בעזרת מודל $M/M/N$ והשני בעזרת מודל $M/M/N+M$. איזה מהטבלאות מתאים לאיזה מודל. הסבירו תשובתכם.

טבלה 1

Calls Per Hour	Average Speed of Answer (secs)	Agent's Occupancy (%)	$P(\text{Wait} > 0)$
180	57.8	85.7%	$1 - 0.518 = 0.482$
185	79.6	88.1%	$1 - 0.447 = 0.553$
190	113.5	90.5%	$1 - 0.37 = 0.63$
195	171.3	92.9%	$1 - 0.286 = 0.714$
200	289.2	95.2%	$1 - 0.197 = 0.803$
205	647.0	97.6%	$1 - 0.101 = 0.899$
210	n/a	n/a	

טבלה 2

Calls Per Hour	Average Speed of Answer (secs)	Agent's Occupancy (%)	$P(\text{Wait} > 0)$
180	9.2	80.7%	$1 - 0.699 = 0.300$
185	10.6	82.2%	$1 - 0.666 = 0.333$
190	12.0	83.7%	$1 - 0.632 = 0.367$
195	13.5	85.1%	$1 - 0.598 = 0.401$
200	15.1	86.3%	$1 - 0.564 = 0.435$
205	16.8	87.5%	$1 - 0.530 = 0.469$
210	18.6	88.7%	$1 - 0.497 = 0.502$

תשובה:

טבלה 1 הופקה בעזרת מודל $M/M/N$ וטבלה 2 בעזרת מודל עם נטישות $M/M/M+M$. אנו יודעים זאת כי המודל עם הנטישות תמיד יציב, בעוד המודל ללא נטישות לא יציב אם קצב הגעת שיחות גדול מ- 210 שיחות לשעה.

2.2 (3 נקודות) הסבירו מדוע בשורה האחרונה של טבלה 1 מופיע הערך n/a . מהו קצב ההגעה המקסימלי בו תתקבל תשובה מספרית.

תשובה:

מודל Erlang-C יציב כל עוד $\rho < 1$, ולכן $60/4 \cdot 14 = 210$ עבור כל קצב הגעה קטן ממש מ-210 לקוחות לשעה נקבל שהמערכת יציבה והתוכנה תחשב מדדי שירות, ועבור כל ערך גדול או שווה ל-210 נקבל שהמערכת לא יציבה.

2.3 (3 נקודות) ציינו מה אתם מצפים שיקרה למדדים הבאים, במידה ופרמטר הסבלנות θ יעלה: אחוז הנוטשים, ממוצע זמן ההמתנה לשירות (ASA), ממוצע אורך התור, נצילות השרתים. הסבירו תשובתכם.

תשובה:

כאשר פרמטר הסבלנות עולה, הסבלנות הממוצעת של לקוח יורדת ולכן,
אחוז הנוטשים: יעלה
ממוצע זמן ההמתנה לשירות (ASA): ירד
ממוצע אורך התור: ירד
נצילות השרתים: תרד

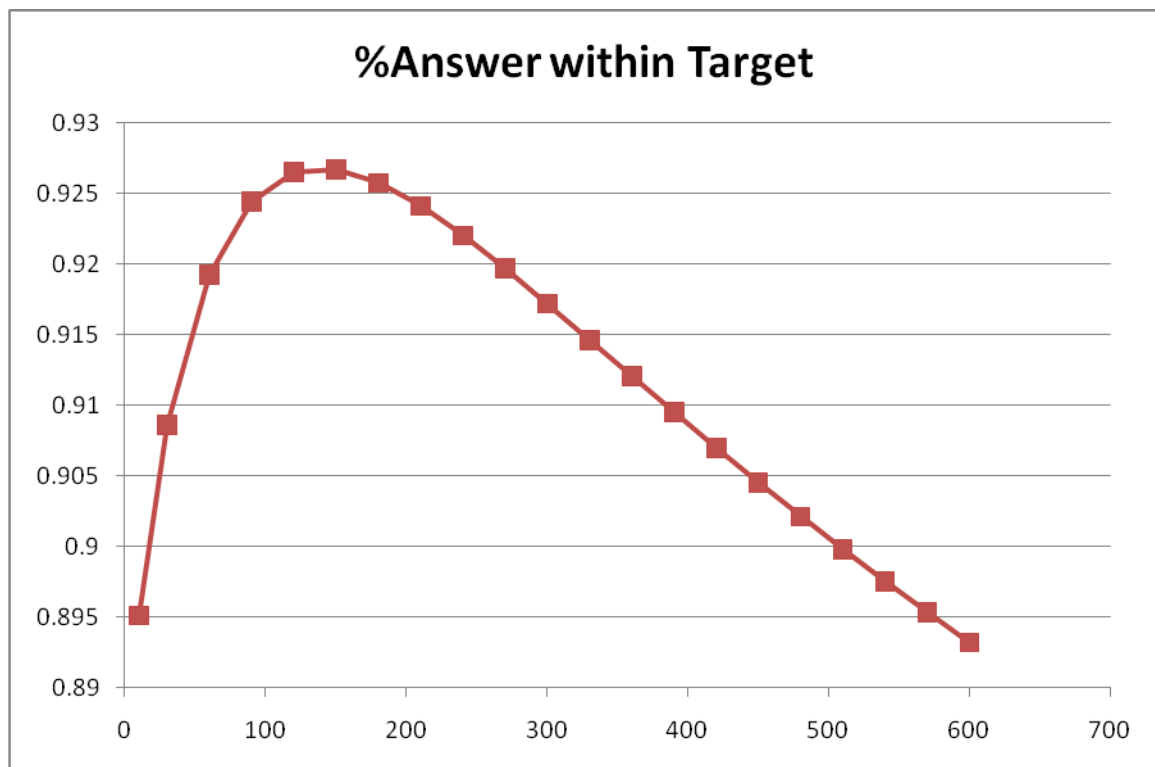
2.4 (3 נקודות) מה יקרה לאחוז הנוטשים אם הסבלנות הלקוחות תעלה לאינסוף או תרד ל-0? לאיזה מודל המערכת תשאף במקרים אלו? הסבירו תשובתכם.

תשובה:

$\theta \rightarrow \infty$: כאשר פרמטר הסבלנות עולה לאינסוף, ממוצע הסבלנות שואף ל-0, ולכן כל לקוח שמגיע כאשר אין שרת פנוי עוזב מיד את המערכת. במצב זה המערכת שואפת למערכת $M/M/N/N$.

$\theta \rightarrow 0$: כאשר פרמטר הסבלנות יורד ל-0, ממוצע הסבלנות שואף לאינסוף, אף לקוח לא נוטש, ולכן המערכת שואפת למערכת $M/M/N$.

2.5 (3 נקודות) כאשר בודקים את התנהגות של "אחוז הנענים תוך 1.5 דקות" כפונקציה של ממוצע הסבלנות מקבלים את הגרף הבא :



הסבירו מדוע לגרף צורה כזו.

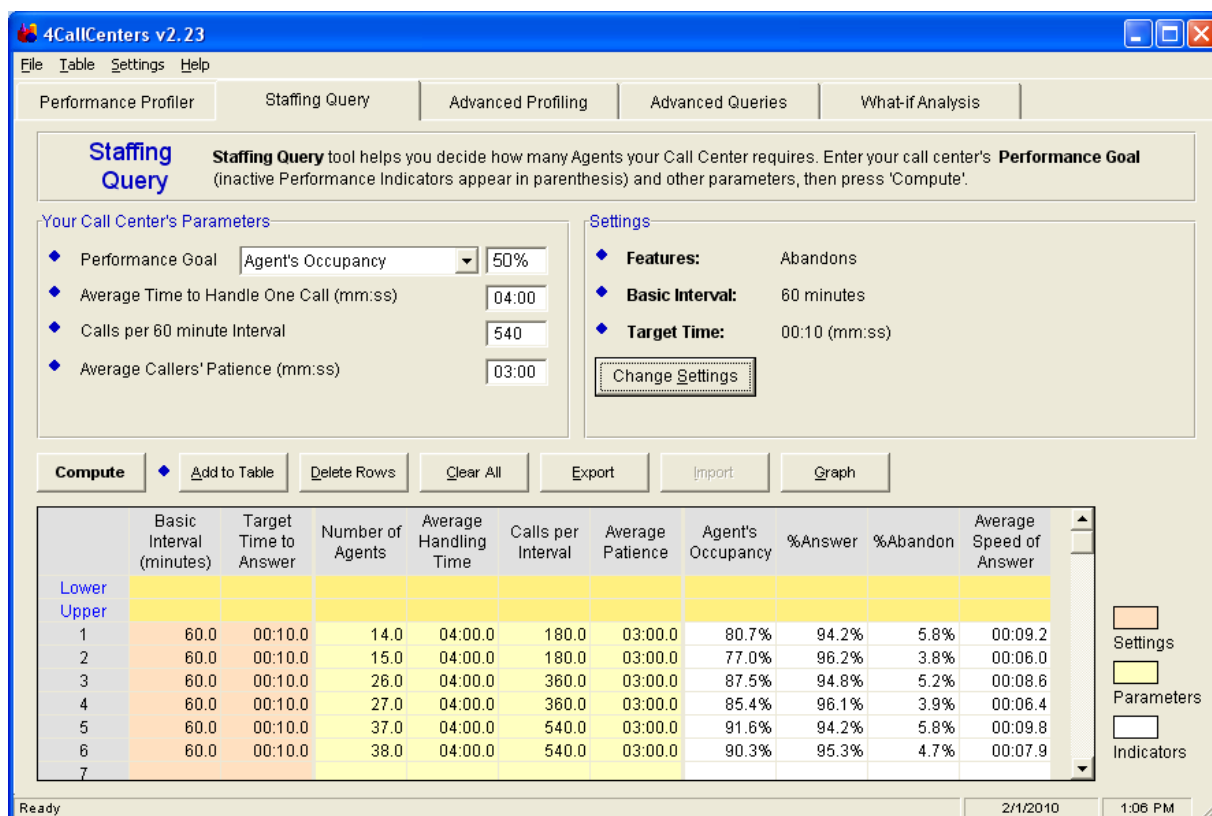
רמז : ניתן לחלק את הלקוחות שלא נענים תוך 1.5 דקות לשתי קבוצות. הגדירו מהן, וכיצד הן עוזרות להסברת התופעה הנ"ל.

תשובה :

ניתן לחלק את הלקוחות שלא נענים תוך 1.5 דקות, ללקוחות שנטשו (לפני או אחרי 1.5 דקות) וללקוחות שלא נטשו וקיבלו שרות לאחר יותר מ- 1.5 דקות. אחוז הלקוחות הנוטשים יורד כפונקציה של ממוצע הסבלנות. אחוז הלקוחות שלא נטשו ומקבלים שרות לאחר יותר מ- 1.5 דקות עולה ככל שממוצע הסבלנות עולה (כיוון שאם ללקוחות יש יותר סבלנות הם יהיו מוכנים לחכות יותר ואז אם עליהם לחכות לדוגמה 2 דקות, הסיכוי שהם יחכו ויקבלו שרות עולה) לכן חיבור שתי הפונקציות הנ"ל גורם לכך שאחוז הלקוחות שלא קיבלו שירות תוך 1.5 דקות היא פונקציה קמורה ולכן אחוז הלקוחות שכן קיבלו שרות תוך 1.5 דקות היא פונקציה קעורה כפי שרואים בגרף.

2.6 (3 נקודות) מנהל המוקד גילה שבימים מסוימים (לאחר שליחת חשבונות ללקוחות), קצב השיחות למוקד גדול פי כמה מימים רגילים. ליתר דיוק ביום לאחר שליחת החשבונות קצב ההגעה הוא 540 לקוחות לשעה (פי 3 מיום רגיל) וביום למחרת 360 לקוחות לשעה (פי 2 מיום רגיל) ולאחר מכן הקצב חוזר לרמתו הרגילה.

מנהל המוקד רוצה לחשב את כמות המוקדנים הדרושה כך שאחוז הנוטשים ישאר כמו ביום רגיל (קרי כ-5%). לשם כך הוא יצר בתוכנת 4CC את הפלט הבא :



הוא טוען שניתן לראות שבמערכת שלנו קיים יתרון לגודל באיזושהי האם הוא צודק? הסבירו.

תשובה :

כפי שניתן לראות מהנתונים כאשר קצב ההגעות עולה פי 2 מספר השרתים עולה רק פי 1.8, וכאשר קצב ההגעות עולה פי 3 מספר השרתים הדרוש על מנת לשמור על אותה רמת שירות עולה רק פי 2.5. זוהי בדיוק התופעה של "יתרון לגודל".

2.7 (3 נקודות) השתמשו בגרפים הבאים כדי לקבוע בעזרת כלל השורש, מה צריך להיות מספר השרתים כאשר קצב ההגעה הוא 250 לקוחות לשעה, כך שאחוז הלקוחות הנענים מידית יהיה 40%. מה יהיה במצב זה אחוז הנוטשים?

תשובה:

נחשב את ה-offered load :

$$R = \lambda / \mu = 250 / 25 = 10$$

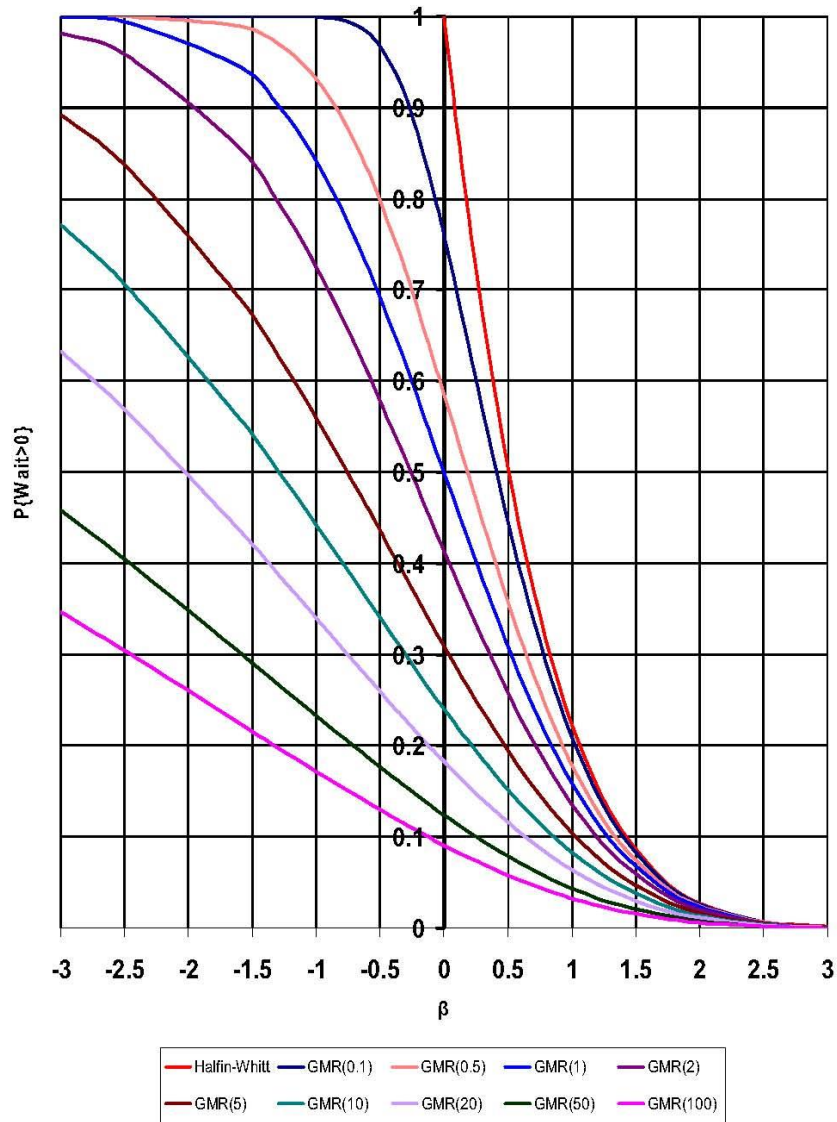
כלל השורש הוא : $N = R + \beta \sqrt{R}$.

נקבע את β על סמך הגרף הראשון. $\theta / \mu = 20 / 15 = 1.33$. ניתן לראות שכדי לשמור על 40% לקוחות שנענים

מידית, β צריך להיות פחות או יותר -0.25. מכאן אפשר לחשב את אחוז הנוטשים מן הגרף הבא.

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .

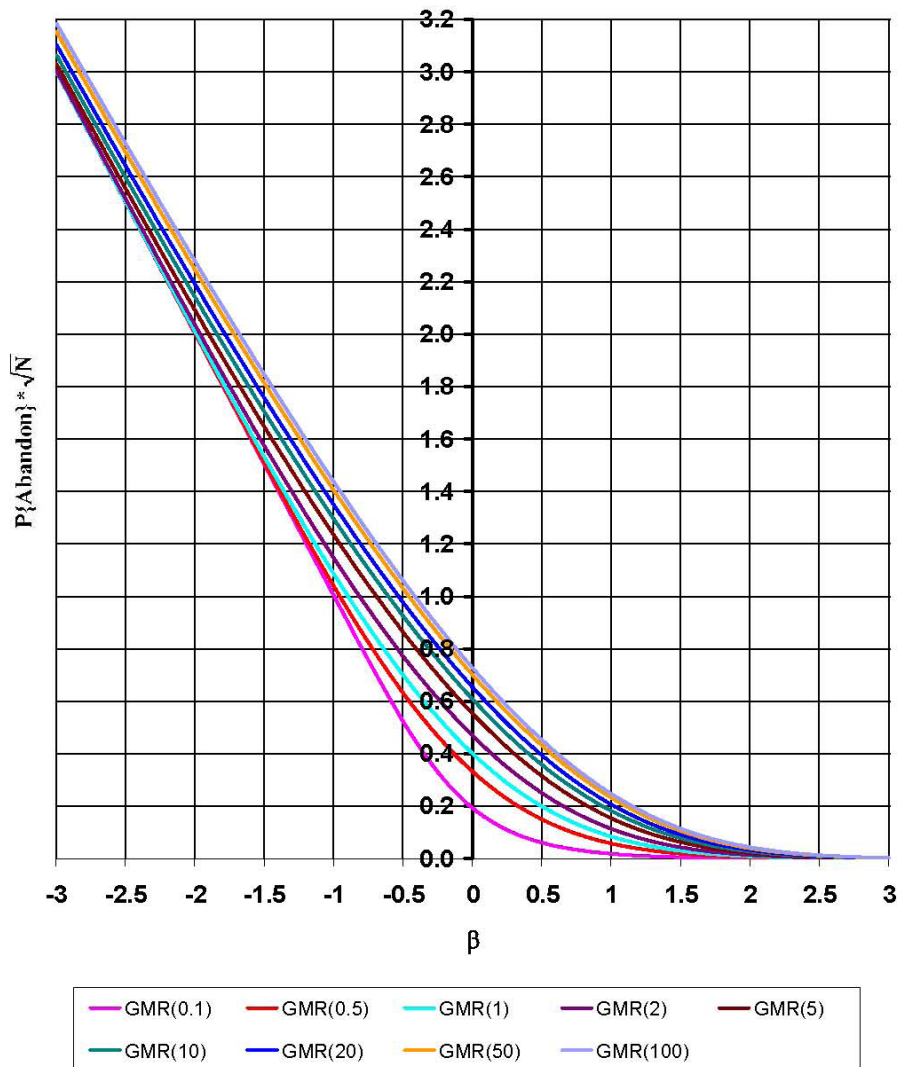


GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\frac{\theta}{\mu} = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

Note: **Erlang-C** = limit of **Erlang-A**, as patience $\uparrow$ indefinitely.

Erlang-A: % Abandonment

$\%Ab \times \sqrt{n}$ vs. β , for varying (im)patience (θ/μ):



שאלה 3 – יישום (40 נקודות)

להלן קטע קצר מתוך כתבה על תוספת של מחלקה פנימית בבית"ח רמב"ם. אין צורך לקרוא את הכתבה מאחר וההסברים והנתונים כלולים הגוף השאלה על סעיפיה השונים.

הקלה בעומס? רמב"ם חונך מחלקה פנימית חדשה

הקריה הרפואית רמב"ם חנכה בשבוע שעבר מחלקה פנימית חדשה, פנימית ח'. המחלקה ממוקמת באופן זמני בקומת המרתף של בניין האשפוז הראשי ע"ש סמי עופר, שם תישאר בשנתיים הקרובות, עד שתעבור למשכנה הקבוע.



מחלקת פנימית ח' החדשה.

לדבריו של דר' איל בראון, המנהל בפועל של המחלקה החדשה, אמנם מדובר בצעד חשוב, אך פנימית ח' החדשה לא תפתור את מצוקת האשפוז: "ישנו מחסור במיטות בפנימיות מאז שנות ה-90 ועל רקע המחסור הזה אנו עדים לעומס הן בפנימיות, הן במיון והן בטיפול נמרץ. כל החולים, עצמאיים וסיעודיים, סובלים מכך", מציין דר' בראון, "לאחר פניות חוזרות של הנהלת בית החולים למשרד הבריאות, בבקשה להקל על מצוקת האשפוז, קיבלנו הסכמה לפתוח בהדרגה את המחלקה הפנימית החל מהחודש. אבל גם כשמדברים על 26 מיטות, זה לא נתון שיפתור את בעיית העומס בבתי החולים. אלו לא המיטות שעליהם ישכנו את החולים בפרוידורים וזה לא מה שיקטין את זמן שהיית החולים במיון", אומר דר' בראון, "רמב"ם עדיין זקוק למספר לא מועט של מיטות נוספות כדי להתמודד עם העומסים שהפכו לקבועים, ואולי אף פתיחת מחלקה פנימית נוספת. יחד עם זאת מדובר בצעד ראשון וחשוב בדרך להקלה על מצוקת האשפוז, וזוהי בשורה לכל תושבי הצפון".

בבית חולים רמב"ם שבחיפה פעלו, עד לאחרונה, שש מחלקות פנימיות (פנימיות א' – ו') ובהן 130 מיטות סך הכל. לצורך התשובות יש להניח כי כל המחלקות מתחלקות בעומס באופן זהה. בעקבות תלונות חוזרות של בית חולים רמב"ם אל הגורמים הרלוונטיים במשרד הבריאות, התקבלה ההחלטה לפתוח מחלקה פנימית חדשה, מחלקה ח'. הועדה מטעם משרד הבריאות, שהייתה אחראית על בדיקת הנושא, ביקשה מבית החולים להגיש המלצות לגבי גודל המחלקה החדשה, תקינת הרופאים והאחיות במחלקה ואופן תפעולה בעידן "שבע המחלקות".

גדי, מנהל התפעול של בית חולים רמב"ם, בוגר הפקולטה להנדסת תעשייה וניהול, נדרש לבצע ניתוח של המערכת הקיימת. הניתוח יכלול: (1) בחינת המצב הקיים במחלקות הפנימיות, (2) תכן המחלקה החדשה (כמות מיטות, תקינת רופאים ואחיות), (3) בחינת המצב המוצע בעקבות הקמת המחלקה החדשה, (4) בקרה ואופטימיזציה למערכת שהוקמה. על גדי להשתמש בידע אותו רכש במהלך הקורס "הנדסת מערכות שירות" לטובת הניתוח.

חלק 1. ניתוח המצב הקיים לצורך תיכון המערכת החדשה (15 נקודות)

3.1. (3 נקודות) גדי מתחיל מניתוח מבוסס נתונים (במערכת SEESat) של קצבי המופע ומשכי השהיה בששת המחלקות הפנימיות. הוא מגלה כי **קצב המעבר החודשי** דרך המחלקות הינו 890 מטופלים לחודש בממוצע, בעוד שמשך השהיה הממוצע של מטופל במחלקה פנימית הינו 4.12 ימים (הניחו כי בחודש ישנם 28 ימים, כלומר 4 שבועות). מהי התפוסה ממוצעת של המיטות במחלקות הפנימיות? תנו תשובה המבוססת על חישוב מתמטי.

תשובה:

על פי חוק ליטל:

$$L = \lambda \times W = 890 \times \frac{4.12}{28} = 130$$

ישנן 130 מיטות תפוסות בשש המחלקות (בממוצע).

ההצעה הראשונית העומדת על הפרק כעת, היא תוספת של מחלקה עם 26 מיטות. מנהל בית החולים טוען כי מספר המיטות מועט מדי, ועל גדי לבחון טענה זו. נניח כי קצב הכניסה למחלקות הפנימיות שווה לקצב היציאה מחדר המיון (לאשפוז) וכי תהליך הכניסה (יציאה ממיון) הינו תהליך פואסון הומוגני בזמן עם קצב מופע 1090 לחודש (יותר מאשר קצב המעבר במחלקה). הנח כי מטופלים אשר לא נמצאה עבורם מיטה במחלקה, מנותבים למחלקות אחרות. כמו כן, הנח כי משך השהיה במחלקה הוא **אקספוננציאלי** עם הממוצע שצוין בסעיף הקודם (4.12 ימים בחודש של 28 יום).

3.2. (3 נקודות). כתבו מודל תורים מרקובי מתאים עבור שש המחלקות (משאב = מיטה), אשר יעזור לגדי לנתח את המערכת. פרטו את הפרמטרים של המודל.

תשובה:

המודל הוא Erlang-B – M/M/130/130, עם הפרמטרים (1090, 28/4.12, 130).

נסמן ב- $Q(t)$ את מספר הפציינטים שתופסים מיטה במחלקה החדשה בחודש מסוים, $\lambda(t)$ את קצב המופע בחודש זה וב- μ את קצב השירות של המחלקה. ניתן להניח כי $Q(0) = 0$.

3.3 (2 נקודות) כתוב את המשוואה שמתאימה למודל שבחרתם, אשר מתארת את $Q(t)$ בעזרת הפונקציות לעיל.

תשובה:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = [\lambda(t) - \mu(N \wedge Q(t))] \wedge N$$

$$Q(0) = 0$$

3.4 (2 נקודות) מהו התחום התפעולי בו פועלת המערכת כיום? נמק.

תשובה:

המערכת פועלת בתחום ה-ED- בשל נציגות המיטות (100 אחוז)

3.5 (3 נקודות) מהו המודל המתאים אותו תציעו לגדי על מנת לקבוע את מספר המיטות הנדרשות במחלקה החדשה? כתוב את המודל ופרטו את ההנחות שהנחת.

תשובה:

המודל המתאים לקביעת כמות המיטות הוא M/M/infinity.

הנחות המודל:

אינסוף שרתים, תהליך המופע הוא תהליך פואסון הומוגני בזמן, משך השירות מתפלג אקספוננציאלית וזמני השירות ב"ת, אי תלות בין משך השירות לזמנים הבין-מופעיים.

3.6 (2 נקודות) האם תוספת של 26 מיטות תפתור את מצוקת המיטות במחלקות הפנימיות על פי המודל שהצעת לגדי? הסתמכו על חישוב מתמטי בתשובתך.

תשובה:

חישוב של העומס המוצע, R :

$$R = \lambda \times E(S) = 1090 \times \frac{4.12}{28} = 160 > 158$$

כמות המיטות שנדרשת על פי המודל הינה 160, 4 מיטות יותר ממה שמציעה הועדה.

חלק 2 – ניתוח תפעולי למצב החדש (15 נקודות)

גדי הצליח לשכנע את מנהל בית החולים ואת חברי הוועדה מטעם משרד הבריאות כי מספר המיטות הנדרשת במחלקה החדשה היא N (על פי החישוב שלכם מסעיף 3.2). עם זאת, בוועדה התקבלה ההחלטה לאייש את המחלקה ב- $N-n$ מיטות, כאשר $n=4$. שימו לב כי אם לא הצלחתם לחשב את N כתבו אותו כפרמטר בתשובות להלן. כעת גדי מעוניין בניתוח מדויק ומקורב של כלל המערכת, הן בעזרת מודל תורים מרקובי והן בעזרת קירוב על פי התחום התפעולי הרלוונטי בו תפעל המערכת כאשר המשאבים הם המיטות של המחלקות.

כעת הניחו כי זמן שהיה במחלקה פנימית הינו אקספוננציאלי עם תוחלת זמן שהיה כמו בסעיפים הקודמים (4.12 ימים בחודש של 28 יום). תהליך המופע למחלקה השביעית הינו תהליך פואסון הומוגני בזמן עם קצב מופע של 1090 לחודש (כמו מקודם). תחילה נניח כי מדיניות הניתוב למחלקות אחרות נשמרת.

3.7. (3 נקודות). כתבו מודל תורים מרקובי מתאים עבור שבע המחלקות (משאב = מיטה), אשר יעזור לגדי לנתח את המערכת לאחר תוספת המיטות. פרטו את הפרמטרים של המודל.

תשובה:

המודל הוא $M/M/130+(N-n)/130+(N-n)$, Erlang-B עם הפרמטרים $(1090, 28/4.12, 130+(30-4))$.

3.8. (4 נקודות) גדי מצא כי מהיבט כמות המיטות, המערכת פועלת בתחום התפעולי של QED (Halfin-Whitt). תנו נימוק אחד שמצדיק את הטענה של גדי.

תשובה:

נחשב את פרמטר השירות ב-QED (שהוא גם פרמטר שירות אוניברסלי):

$$\beta = \frac{N - R}{\sqrt{R}} = \frac{156 - 160}{\sqrt{160}} = -0.31$$

מאחר ו β בטווח בין -1.5 ל -1.5 מדובר ב-QED.

3.9. (4 נקודות) מהו העומס המוצע פר מיטה על סמך קירובי QED בלבד. ניתן להיעזר בנוסחאות המתאימות מעמוד 19.

תשובה:

$$(1 - \rho_N) \approx \frac{\beta}{\sqrt{N}} \approx \frac{-0.31}{\sqrt{156}} = -0.02$$

$$\rho_N \approx 1.02$$

3.10. (4 נקודות) נתון כי נצילות המיטות הינו 94%. חשבו את הסיכוי של מטופל להיות מנותב לבית חולים אחר, ללא השימוש בפונקציית הסיכון $h(-\beta)$.

תשובה:

$$\rho = \frac{\lambda(1 - p(block))}{n\mu}$$

$$\rho_N = \frac{\lambda}{n\mu}$$

$$\rho_N - \rho = \frac{\lambda - \lambda(1 - p(block))}{n\mu} = \frac{\lambda p(block))}{n\mu} = \rho_N p(block))$$

$$p(block) = \frac{\rho_N - \rho}{\rho_N} = \frac{1.02 - 0.94}{1.02} = 0.078$$

Erlang-B (M/M/N/N) Jagerman, 1974

As $N \uparrow \infty$, $\sqrt{N} P(\text{Blocked}) = \sqrt{N} E_{1,N} \rightarrow \alpha$, $0 < \alpha < 1$

iff $\sqrt{N}(1 - \rho_N) \rightarrow \beta$, $-\infty < \beta < \infty$, $(\rho_N = \frac{\lambda_N}{\mu N} = \frac{R_N}{N})$,
 (equivalently $N \approx R_N + \beta\sqrt{R_N}$)

in which case $\alpha = h(-\beta)$ (hazard rate of $N(0, 1)$)

Erlang-C (M/M/N) Halfin & Whitt, 1981

As $N \uparrow \infty$, $P(\text{Wait} > 0) = E_{2,N} \rightarrow \alpha$, $0 < \alpha < 1$ $\leftarrow$ customer

iff $\sqrt{N}(1 - \rho_N) \rightarrow \beta$, $0 < \beta < \infty$, $\leftarrow$ server
 (equivalently $N \approx R_N + \beta\sqrt{R_N}$) $\leftarrow$ manager

in which case $\alpha = [1 + \beta/h(-\beta)]^{-1}$, the Halfin-Whitt function.

Erlang-A (M/M/N + M) with Garnett & Reiman, 2002 ¹

As $N \uparrow \infty$, $P(\text{Wait} > 0) \rightarrow \alpha$, $0 < \alpha < 1$

iff $\sqrt{N}(1 - \rho_N) \rightarrow \beta$, $-\infty < \beta < \infty$ (equiv: $N \approx R_N + \beta\sqrt{R_N}$)

iff $\sqrt{N} P(\text{Abandon}) \rightarrow \gamma$, $0 < \gamma < \infty$,

in which case $\alpha = \left[1 + \frac{h(\delta)/\delta}{h(-\beta)/\beta}\right]^{-1}$, $\delta = \beta\sqrt{\mu/\theta}$

and $\gamma = \alpha\beta \left[\frac{h(\delta)}{\delta} - 1\right]$, (What if $\mu = \theta$?)

חלק 3 – תקינת אחיות (10 נקודות)

גדי מעוניין לקבוע את כמות האחיות הנדרשת לעבודה במחלקה ואת מספר האחיות שיש לשכור כל חודש עבור המחלקה החדשה. הנח כי יחס האחיות למספר המיטות במחלקות הפנימיות צריך להיות 1 אחות ל 3 מיטות (חדר אשפוז אחד). נסמן את מספר האחיות הנדרשות בזמן נתון ב- T (נובע מיחס האחיות למיטה). מעבודה קודמת אותה ביצע גדי בנושא ניתוח כח אדם בבית החולים, עולה כי ניתן לשערך את הסיכוי שאחות תעזוב את המחלקה הפנימית (בגין קידום, פיטורין, שינוי מקום מגורים וכו') על ידי הפונקציה המשתנה בזמן $f(t_i)$ - כאשר יחידות הזמן הינן חודשים (הפונקציה היא בזמן בדיד). כלומר $t_1, t_2, \dots$ הינם חודשים בהם לפונקציה ישנם ערכים שונים. נסמן ב- $A(t_i)$ את כמות האחיות המצטברת ששוכרים עד זמן $t_1, t_2, \dots$ על מנת "למלא את השורות החסרות". נסמן ב- $D(t_i)$ את כמות האחיות המצטברת שעוזבת עד זמן $t_1, t_2, \dots$, כאשר $D(0) = 0$. נסמן ב- $X(t_i)$ את מספר האחיות שעובדות במחלקה בזמנים $t_1, t_2, \dots$ לאחר הגיוסים והעזיבות של תקופה t_i . נניח כי T אחיות אכן מאיישות את המחלקה החדשה בזמן 0 (גיוס ראשוני), כלומר: $X(0) = T; A(0) = T$. נסמן את כמות האיוש הנדרשת בכל חודש ב- $X^*(t_i) = T$.

3.11. (3 נקודות) כתבו משוואה אשר המתארת את התהליך $D(t_i)$ כתלות בפונקציות הנתונות לעיל, כאשר ניתן להניח שמספר האחיות המועסקות ומספר העוזבות יכול להיות רציף (לצורך המודל).

תשובה:

$$D(t_i) = \sum_{j=1}^i f(t_j) X(t_{j-1})$$

3.12. (2 נקודות) כתבו נוסחה ל- $A(t_i)$, תוך שימוש ב- $X(t_i), h(t_i)$ בלבד.

תשובה:

$$\begin{aligned} X(t_i) &= A(t_i) - D(t_i) \\ A(t_i) &= X(t_i) + D(t_i) = \\ &= X(t_i) + \sum_{j=1}^i f(t_j) X(t_{j-1}) \end{aligned}$$

3.13. (4 נקודות) תנו ביטוי לכמות האחיות $a(t_i) = A(t_i) - A(t_{i-1})$ שיש לגייס בכל חודש $(t_1, t_2, \dots)$ על מנת לעמוד בצורך של המחלקה (איוש של T אחיות). יש להשתמש בשני הסעיפים הקודמים לחישוב התשובה.

תשובה:

$$\begin{aligned} a(t_i) &= A(t_i) - A(t_{i-1}) = \\ &= X^*(t_i) - X^*(t_{i-1}) + \sum_{j=1}^i f(t_j)X^*(t_{j-1}) - \sum_{j=1}^{i-1} f(t_{j-1})X^*(t_{j-2}) = \\ &= T - T + f(t_i)T = f(t_i)T \end{aligned}$$

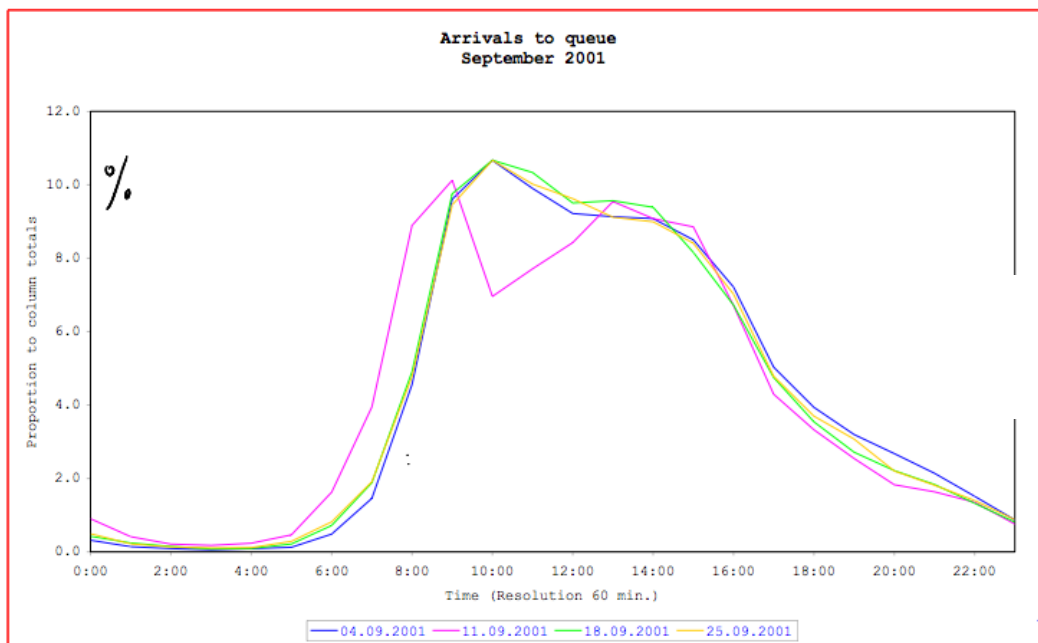
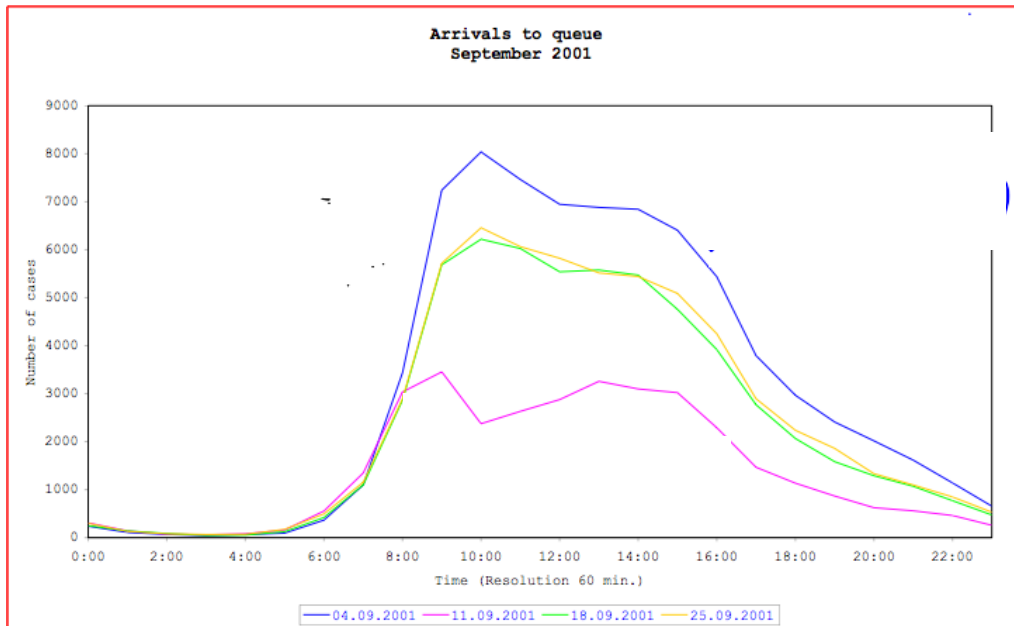
3.14. (1 נקודות) הביטוי $a(t_i) = A(t_i) - A(t_{i-1})$ עבור כל חודש באופק התכנון נקרא "מדיניות הגיוס" של בית החולים למחלקות הפנימיות. תנו הסבר אינטואיטיבי (מילולי) למדיניות הגיוס שקיבלתם בסעיף הקודם.

תשובה:

המדיניות בכל חודש היא מסוג Order-up-to Policy, כלומר מגייסים את הכמות שהולכת לעזוב. אם אין עוזבים, אין גיוסים.

שאלה 4 – תיאוריה ושימושיה (15 נקודות)

בהרצאה הוצגו שני הגרפים הבאים :



4.1. (2 נקודות) נתונות לך תצפיות של זמני ההגעה של N לקוחות $(X_1, \dots, X_N)$, הסבר כיצד ניתן ליצור מתצפיות אלו את שני הגרפים הנ"ל.

תשובה :

גרף 1: מחלקים את היום לאינטרוולים של 60 דקות. בכל אינטרוול מונים את כמות המופעים שהגיעו באותו אינטרוול.

גרף 2: את התוצאה של גרף 1 בכל אינטרוול, מחלקים בסך המופעים ליום (סכום ה- X ים).

4.2 (2 נקודות) מדוע יש צורך בשתי התצוגות? מה ניתן ללמוד מכל גרף?

תשובה :

מהגרף הראשון אפשר לקבל את מרכיב הביקוש שנובע מהמופעים ולקבוע איוש בעזרת אחד המודלים אותם למדנו (למשל Erlang-A). בנוסף, ניתן לראות כיצד ימים מיוחדים (כמו יום אחרי חג) שונים בנפח. מהגרף השני ניתן לחקור האם ימים השונים בנפח שונים גם בצורה. לדוגמה ניתן לראות כאן כי ליום אחרי חג יש צורה זהה למרות היות הנפח גדול מהרגיל. על סמך מה שרואים בגרף זה ניתן להפריד בין שני מרכיבים לחיזוי של המופעים: נפח (התלוי בסוג היום: רגיל לעומת ערב/אחרי חג, יום בשבוע) וצורה (ההבדלים בין השעות ביום). ולקבוע את החיזוי ליום אחרי חג בהתאם. בנוסף, ניתן לראות תופעות חריגות בקצב המופע כמו ה-11.9 (שהיה יום חריג גם בנפח וגם בצורה, ולכן לא יכול לשמש לחיזוי).

בהרצאה הגדרנו תהליך פאסון לא הומוגני בזמן כתהליך היכול לתאר הגעות למערכת שירות מהסוג הנ"ל.
4.3 (3 נקודות) מהן ההנחות של תהליך זה?

תשובה:

זהו תהליך מניה (ספריה) עם קצב משתנה בזמן $\lambda(t)$ ואינקרמנטים בלתי תלויים. כמו כן התהליך מקיים לכל $t \geq 0, \delta \geq 0$:

$$\Pr\{\tilde{N}(t, t + \delta) = 0\} = 1 - \delta\lambda(t) + o(\delta)$$

$$\Pr\{\tilde{N}(t, t + \delta) = 1\} = \delta\lambda(t) + o(\delta)$$

$$\Pr\{\tilde{N}(t, t + \delta) \geq 2\} = o(\delta).$$

כל ש:

$$\tilde{N}(t, t + \delta) = N(t + \delta) - N(t)$$

4.4 (2 נקודות) עבור כל אחת ממערכות השירות הבאות קבע האם הגיוני שתהליך ההגעה עברה הוא פואסוני. נמק.

- א. הגעת לקוחות לבנק
- ב. הגעת לקוחות לפארק שעשועים
- ג. הגעת חולים למרפאה
- ד. הגעת חולים באמבולנס לבית חולים
- ה. המראות מטוסים בשדה התעופה בן גוריון

תשובה:

- א. כן, המופעים הם בבודדים, בקצב משתנה בזמן (בקרים עמוסים יותר) ואין תלות במספר המופעים בין אינטרוולים שונים.
- ב. לא. לא ניתן למדל כתהליך פואסון כי הגעה לפארק שעשועים היא בדרך כלל של קבוצות ולכן בעייתית. הדרך לטפל בתופעה היא ע"י תהליך פואסון מורכב.
- ג. תלוי אם במרפאה ישנם תורים או שזו מרפאה שמגיעים אליה ללא קביעת תור. במקרה הראשון, לא ניתן להניח אי תלות בין האינקרמנטים; במקרה השני, אפשר למדל כתהליך פואסון.
- ד. ניתן למדל כתהליך פואסון, אם לא מדובר בארוע רב נפגעים (ובו יש תלות בין האינקרמנטים של התהליך).
- ה. התהליך מתוזמן מראש, ולכן יש תלות בין אינקרמנטים – לא ניתן למדל כתהליך פואסון.

4.5 הדף הבא לקוח מההרצאה בנושא תהליכי פואסון, ומוכיח תכונה שנקראת "אמידה מוטה".

Biased Sampling

A *renewal process* is a counting process with iid interarrivals.

Descriptions: $R = \{R(t), t \geq 0\}$ or $\{T_1, T_2, \dots\}$ iid, or $\{S_1, S_2, \dots\}$

Example: Poisson exponential Erlang

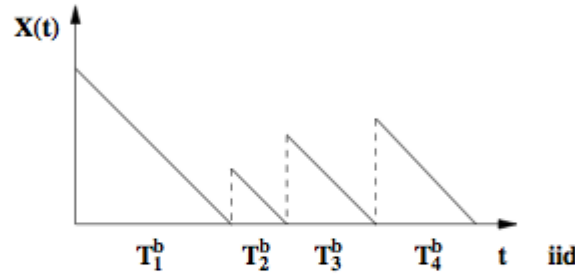
Story: Buses arrive to a bus stop according to a renewal process $R_b = \{R_b(t), t \geq 0\}$.

T_i^b — times between arrivals of the buses.

Passengers arrive to the bus stop in a completely random fashion (Poisson).

S_i^p — arrival times of the passengers.

Question: How long, on average, do they wait? Plan service-level.



$A = \{A(t), t \geq 0\}$ = Poisson arrivals of passengers.

$X = \{X(t), t \geq 0\}$ = state = *Virtual waiting time*.

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt &= \lim_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(S_n^p) = \bar{\tau} \\ \Rightarrow \bar{\tau} &= \frac{1}{T} \cdot (\text{area under } X, \text{ over } [0, T]) \\ &\approx \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{1}{2}(T_1^b)^2 + \frac{1}{2}(T_2^b)^2 + \dots + \frac{1}{2}(T_{R_b(T)}^b)^2 \right) \\ &= \frac{R_b(T)}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1^2 + \dots + T_{R_b(T)}^2}{R_b(T)} \xrightarrow{T \uparrow \infty} \frac{1}{E(T_1^b)} \cdot \frac{1}{2} \cdot E(T_1^b)^2, \text{ by SLLN} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} E(T_1^b)}_{\text{"Deterministic" answer}} \underbrace{[1 + c^2(T_1^b)]}_{\text{Bias, due to variability}}, \quad c = \frac{\sigma}{E} \text{ coefficient of variation.} \end{aligned}$$

Check Poisson bus arrivals to derive **Paradox**:

1("stochastic" answer) = $\frac{1}{2}$ ("deterministic" answer).

4.5.1 (2 נקודות) הסבר במילים למה הכוונה במושג אמידה מוטה?

תשובה:

התופעה: אמידה מוטה הוא מצב שבו אמד המחושב בצורה מסויימת לא יתן את הערך האמיתי, אלא יטה לכיוון מסוים. בהקשר של מערכות שירות הראנו שקיימת בעיה זו בהקשר לדגימה של מצב מערכת שירות. בהקשר זה, דגימה של אינטרוול זמן ע"י בחירה אקראית של נקודת זמן בו, גורמת להטיה של האמד לטובת אינטרוולי זמן ארוכים. כלומר, יש סיכוי רב יותר לדגום אינטרוולים ארוכים מאשר קצרים.

לדוגמה, נניח שיש התפלגות כזו: זמן בין מופעי באורך 1 בהסתברות 0.99, וזמן בין מופעי באורך 99 בהסתברות 0.01.

אזי האינטרוולים הארוכים "יתפסו" חצי מזמן המערכת, מה שאומר שאם נדגות אקראית זמנים בין מופעיים, בהסתברות 50% נדגום אינטרוול ארוך והבסתברות 50% אינטרוול קצר. אם לא נתקן את ההטיה, נחשב ממוצע זמן בין מופעי שיהיה בסביבות 45 במקום בסביבות 1. כלומר, האמד שלנו לזמנים הבין מופעיים יהיה מוטה.

4.5.2 (2 נקודות) הסבר על איזו תכונה של תהליכי פואסון מסתמכת השורה המסומנת ב-1?

תשובה:

Poisson Arrivals See Time Averages (PASTA)

4.5.3 (2 נקודות) השלם את חלק ההוכחה המסומן ב- 2.

תשובה :

ראה פתרון בגוף ההוכחה.

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Generating Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$X \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1, n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multi-nomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(n, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = n, n+1, \dots$	$\left[\frac{pe^t}{1-qe^t} \right]^n$	$\frac{np}{p}$	$\frac{npq}{p^2}$	Number of trials till n th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim P(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$e^{\lambda(e^t - 1)}$	λ	λ	
Hypergeometric	$X \sim H(n, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{M-k}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N+M$	$\max\{0, n-M\} \leq k$ $k \leq \min\{n, N\}$	$\sum_{k=\max\{0, n-M\}}^{\min\{n, N\}} p(k)$	$\frac{n}{N+M}$	$n \cdot \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N}{N+M} - \left(\frac{n}{N+M} \right)^2$	N - special element M - ordinary ones n - sample size k - special in sample
		Diracly Function						
Beta	$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	(Complicated)	$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$	$\alpha - \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ $= \Gamma(x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp \left\{ t\mu + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2 \right\}$	μ	σ^2	