



מרצה : ד"ר גלית יום טוב

מתרגלת : ניצן כרמלי

תאריך הבחינה : 7.7.2013

מס' סטודנט _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד א' – סמסטר אביב תשע"ג 2013

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 33 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

הרצאות\תרגולים\בחינות קודמות	מתוך 10 נקודות	שאלה 1	ניקוד:
תרגילי בית	מתוך 10 נקודות	שאלה 2	
יישום	מתוך 20 נקודות	שאלה 3	
תיאוריה	מתוך 10 נקודות	שאלה 4	

סה"כ _____ מתוך 50 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 - תרגילי כיתה/הרצאות/מבחנים קודמים (10 נקודות)

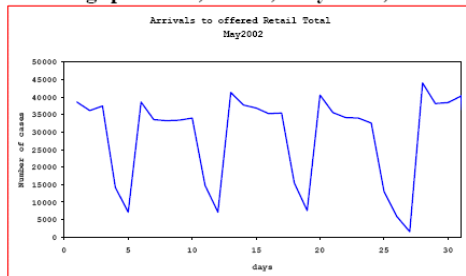
חלק 1 – חוק Little

מצורפים בזאת 3 עמודים שהוצגו בהרצאה, המתארים את קיומו או אי-קיומו של חוק Little במערכות שונות (בכל עמוד מוצגים 3 גרפים). הסבירו, עבור כל עמוד, האם נראה שחוק Little מתקיים, ומדוע הוא צפוי/לא צפוי להתקיים במקרה זה.

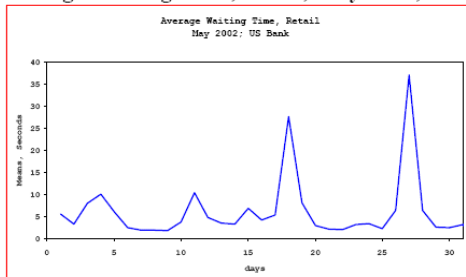
1.1.1 (0.5 נקודה) גרף 1: ימי חודש מאי 2002

Little's Law for Retail calls, May 2002: US Bank

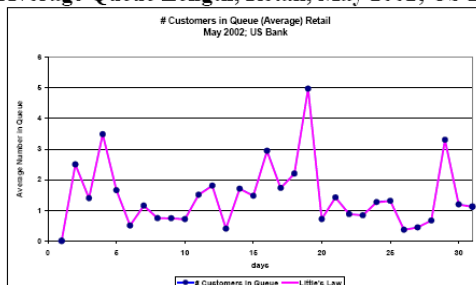
λ : Throughput Rate, Retail, May 2002; US Bank



W: Average Waiting Time, Retail, May 2002; US Bank (W_q)



L: Average Queue Length, Retail, May 2002; US Bank (L_q)



Date	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
λ	38476	36144	37414	14194	7107	38587	33572	33220	33349	34009	14807	7141	41293	37653	36872	35266
W	5.6	3.3	8.0	10.0	6.1	2.6	1.9	1.9	1.8	3.8	10.5	4.8	3.5	3.4	6.8	4.2
$\lambda * W$	2.49	1.39	3.48	1.65	0.50	1.14	0.74	0.74	0.69	1.50	1.79	0.40	1.69	1.47	2.91	1.71
L	2.50	1.40	3.49	1.66	0.50	1.15	0.74	0.74	0.71	1.51	1.81	0.40	1.71	1.47	2.94	1.73

Date	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
λ	35338	15533	7530	40534	35493	34070	34005	32512	13100	5909	1558	43980	38163	38416	40284
W	5.4	27.6	8.1	3.0	2.1	2.1	3.2	3.5	2.3	6.4	37.0	6.5	2.7	2.5	3.2
$\lambda * W$	2.19	4.96	0.71	1.41	0.87	0.83	1.25	1.30	0.35	0.44	0.67	3.29	1.18	1.11	1.47
L	2.20	4.97	0.71	1.42	0.88	0.84	1.27	1.31	0.37	0.44	0.67	3.30	1.20	1.12	1.48

תשובה: חוק Little (מתקיים) לא מתקיים (צפוי/לא צפוי) (סמנו בעיגול את התשובה הנכונה).

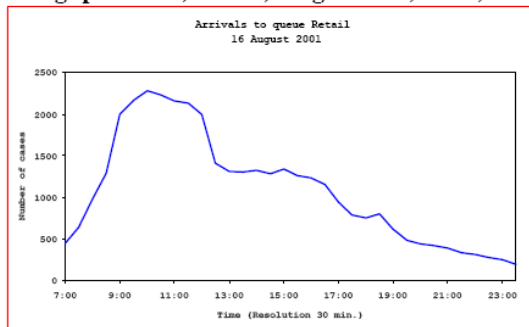
הסבר:

גרף 1 מאשש את קיומו של חוק Little ברזולוציה של ימים. בסוף כל יום מוקד השרות נסגר ולכן ברזולוציה זו אנו מצפים שחוק Little יתקיים: גירסת אופק סופי המתחיל ומסתיים ריק.

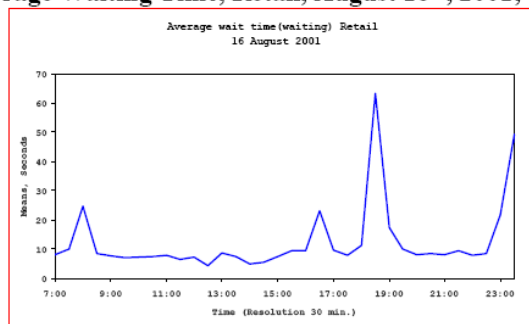
1.1.2 (0.5 נקודה) גרף 2: חצאי שעות על פני 16/8/2001

Little's Law for Retail calls, August 16th, 2001: US Bank

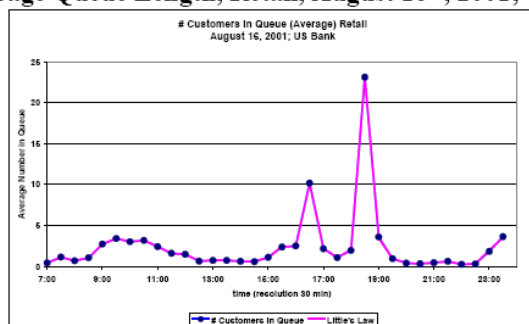
λ : Throughput Rate, Retail, August 16th, 2001; US Bank



W: Average Waiting Time, Retail, August 16th, 2001; US Bank



L: Average Queue Length, Retail, August 16th, 2001; US Bank



Time	7:00	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00	12:30	13:00	13:30	14:00	14:30	15:00
λ	443	639	987	1291	1998	2166	2278	2231	2158	2135	2000	1408	1311	1303	1323	1285	1340
W	1.7	3.2	1.2	1.5	2.4	2.8	2.4	2.6	2.0	1.3	1.3	0.8	1.0	1.0	0.8	0.8	1.5
$\lambda * W$	0.42	1.14	0.68	1.06	2.72	3.42	3.01	3.18	2.44	1.55	1.47	0.64	0.72	0.72	0.62	0.59	1.09
L	0.42	1.14	0.68	1.06	2.72	3.40	3.02	3.17	2.41	1.59	1.48	0.64	0.72	0.72	0.62	0.57	1.11

Time	15:30	16:00	16:30	17:00	17:30	18:00	18:30	19:00	19:30	20:00	20:30	21:00	21:30	22:00	22:30	23:00	23:30
λ	1258	1235	1157	942	788	752	803	619	485	437	421	386	336	311	274	251	193
W	3.5	3.6	15.8	4.2	2.4	4.9	51.9	10.0	3.5	1.7	1.3	2.1	3.3	1.4	2.0	14.3	32.6
$\lambda * W$	2.422	2.45	10.2	2.173	1.06	2.05	23.16	3.43	0.95	0.41	0.314	0.44	0.62	0.24	0.30	2.00	3.50
L	2.37	2.49	10.17	2.16	1.07	1.94	23.11	3.59	0.95	0.40	0.31	0.45	0.62	0.24	0.30	1.83	3.63

תשובה: חוק Little (מתקיים/לא מתקיים; צפוי/לא צפוי) סמנו בעיגול את התשובה הנכונה).
הסבר:

גרף 2 מאשש את קיומו של חוק Little גם ברזולוציה של חצאי שעות, מקרה זה הוא מפתיע, אך מתקיים כיוון שהמערכת גדולה ומגיעה מהר למצב יציב, וכן בגלל שזמני השרות וזמני ההמתנה קצרים (דקות) בהרבה מהרזולוציה בה אנו בוחנים את המערכת: גרסת מצב יציב.

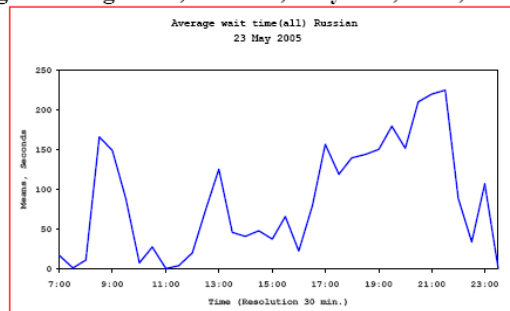
1.1.3 (0.5 נקודה) גרף 3: חצאי שעות על פני 23/5/2005

Little's Law for Russian calls, May 23rd, 2005: Israeli Telecom

λ : Throughput Rate, Russian, May 23rd, 2005; Israeli Telecom



W : Average Waiting Time, Russian, May 23rd, 2005; Israeli Telecom



L : Average Queue Length, Russian, May 23rd, 2005; Israeli Telecom



Time	7:00	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00	12:30	13:00	13:30	14:00	14:30	15:00
λ	12	12	22	46	59	59	36	52	43	56	81	61	80	46	67	56	50
W	16.9	1.3	11.4	166.0	148.9	88.7	7.9	27.4	0.7	3.9	20.3	74.9	125.4	46.3	41.4	47.9	37.7
$\lambda * W$	0.11	0.01	0.14	4.24	4.88	2.91	0.16	0.79	0.02	0.12	0.91	2.54	5.57	1.18	1.54	1.49	1.05
L	0.08	0.04	0.14	3.97	4.88	3.18	0.16	0.79	0.02	0.12	0.88	2.57	5.32	1.44	1.36	1.67	1.00

Time	15:30	16:00	16:30	17:00	17:30	18:00	18:30	19:00	19:30	20:00	20:30	21:00	21:30	22:00	22:30	23:00	23:30
λ	57	52	62	70	75	79	68	68	60	55	55	56	56	43	27	14	6
W	65.7	22.4	79.2	156.6	118.6	139.3	143.6	150.2	179.2	151.3	209.5	219.5	224.7	88.4	33.7	107.0	0.7
$\lambda * W$	2.08	0.65	2.73	6.09	4.94	6.11	5.42	5.68	5.97	4.62	6.40	6.83	6.99	2.11	0.51	0.83	0.00
L	2.13	0.62	2.34	5.51	5.82	5.61	6.03	3.04	8.63	4.34	5.99	7.18	6.85	2.61	0.51	0.83	0.00

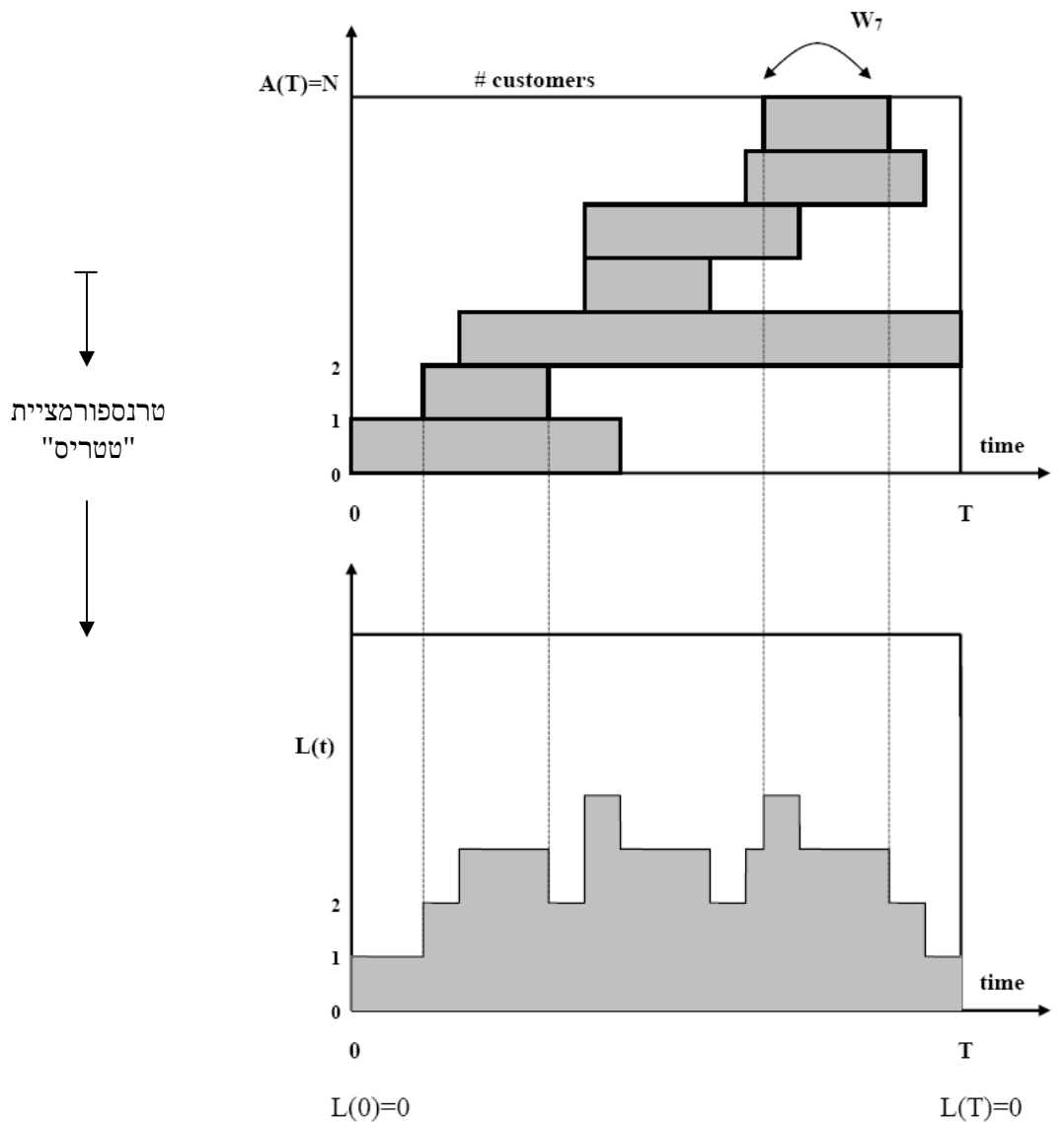
תשובה: חוק Little מתקיים (לא מתקיים) צפוי לא צפוי (סמנו בעיגול את התשובה הנכונה).

הסבר:

גרף 3 מראה לנו שאכן ברזולוציה של חצאי שעות, חוק Little לא תמיד מתקיים. הסיבה שהוא לא מתקיים כאן היא שמקרה זה מתאר מוקד קטן העובד בעומס גבוה. במוקד קטן זה יש לקוחות הממתינים יותר מחצי שעה, ולכן ברזולוציה שכזו יש השפעה הדדית של חצאי שעות עוקבים הגורמים לנוסחת Little לא להתקיים.

1.1.4 (2 נקודות) הוכחת חוק Little באופק סופי (מערכת דטרמיניסטית):

נקבע אינטרוול זמן סופי $[0, T]$. נסמן N – מספר הלקוחות שעברו במערכת בזמן האינטרוול, W_i – זמן שהיה במערכת של לקוח i , $L(t)$ – מספר הלקוחות במערכת בזמן t , λ – קצב הגעת לקוחות למערכת. הוכיחו בעזרת הגרף הבא את חוק Little: $E[L] = \lambda \cdot E[W]$. (כתבו את ההוכחה בעמוד הבא).



תשובה:

נסמן $S = W_1 + W_2 + \dots + W_N$, סך כל זמני השהיה, של כל הלקוחות, בזמן $[0, T]$.

על כן מתקיים: $E[W] = S / N$, ו- $\lambda = N / T$.

על סמך טרנספורמצית טוריס מתקיים: $E[L] = \frac{1}{T} S$.

מהנ"ל נובע:

$$E[L] = \frac{S}{T} = \frac{N}{T} \frac{S}{N} = \lambda E[W]$$

מש"ל.

חלק 2 – תחומים תפעוליים

ממדידות שבוצעו ב"סופר-דופר" בסניף נווה שאנן התקבלו שלושת הדוחות הבאים (אנו מניחים שלקוחות אינם נוטשים את התור בסופר) :

Report 1

Time	Arrivals	Average Service Time (sec)	Offered Load	Number of Agents	Average Wait (sec)	Served Immediately (%)
7:00	58	410	13.2	15.3	107	55.8
7:30	42	450	10.5	13.9	42	72.4
8:00	51	433	12.3	14.5	78	57.9

Report 2

Time	Arrivals	Average Service Time (sec)	Offered Load	Number of Agents	Average Wait (sec)	Served Immediately (%)
18:00	61	582	19.7	20.0	2089	4.7
18:30	58	613	19.7	20.0	2153	5.8
19:00	56	603	18.8	19.6	1578	9.2

Report 3

Time	Arrivals	Average Service Time (sec)	Offered Load	Number of Agents	Average Wait (sec)	Served Immediately (%)
22:00	15	407	3.4	10.8	0.0	100.0
22:30	17	357	3.4	9.6	5.1	99.1
23:00	12	312	2.1	8.9	0.0	100.0

1.2.1. (0.5 נקודה) הסבירו כיצד מחושב ה- Offered Load:

תשובה:

ה- offered-load מחושב ע"י הנוסחה $R = \frac{\lambda \cdot E[S]}{1800}$, כאשר $E[S]$ הוא ממוצע זמן השירות ו- 1800 הוא מספר השניות באינטרוול של חצי שעה.

1.2.2. 1.5 נקודות) התאימו לכל דו"ח את התחום התפעולי שהתקיים באותו זמן. נמקו בקצרה (עליכם להתייחס לשלושה פרמטרים בקביעת התחום התפעולי המתאים לכל דו"ח).

תשובה :

דו"ח 1 : QED. כיוון שתוחלת זמן ההמתנה היא בסדר גודל אחד פחות ממשך השירות, ניצולת השרתים סבירה, וההסתברות להמתנה בין 25% ל- 75%.

דו"ח 2 : ED. כיוון שתוחלת זמן ההמתנה היא באותו סדר גודל כמו זמן השירות, ניצולת השרתים גבוהה, וההסתברות להמתנה שואפת ל-1.

דו"ח 3 : QD. כיוון שתוחלת זמן ההמתנה שואפת ל-0, ניצולת השרתים נמוכה, וההסתברות להמתנה שואפת ל-0.

1.2.3. 1.5 נקודה) אפיינו לכל דו"ח את כלל האיוש הרלוונטי (עפ"י התחום התפעולי שהגדרתם). חשבו את פרמטר האיכות (β, δ , או γ) לשורה האמצעית (מודגשת) בכל דוח.

תשובה :

דו"ח 1 : QED - $\beta = \frac{N - R}{\sqrt{R}} = 1.05, N = R + \beta\sqrt{R}, \beta > 0$

דו"ח 2 : ED - $\gamma = N - R = 0.3 \quad N = R + \gamma$

דו"ח 3 : QD - $\delta = N/R - 1 = 1.82 \quad N = R + \delta R$

1.2.4. (1 נקודה) כידוע בסופר יש N קופות ולכל קופה יש תור משלה. מנהל הסופר שוקל לשנות את התורים כך שבמקום תור נפרד לכל אחת מהקופות יהיה תור אחד שממנו הלקוחות יתפצלו ל- N הקופות.

האם כתוצאה משינוי זה יתקצרו משכי ההמתנה? אם כן, העריכו פי כמה בערך יתקצרו משכי ההמתנה. היעזרו בנוסחאות בעמוד 31. נמקו את תשובתכם.

תשובה :

מנהל החנות למעשה מציע לבצע Pooling, כלומר לאחד N תורי $M / M / 1$ לתור אחד של $M / M / N$. אנחנו מעריכים כי בתצורה זו משך ההמתנה יתקצר מכמה סיבות :

1. "כולם עוזרים לכולם" - בניגוד לתצורה הקודמת כאן לא ייתכן מצב שבו קופאי אחד בטל ויש תור מול קופה אחרת.

2. Economies of Scale - איחוד התורים מקטין את הסטוכסטיות היחסית במערכת.

במערכת שבה N תורי $M / M / 1$ ממוצע זמן ההמתנה הינו : $E[W_q] = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}$, בעוד שבתור

$M / M / N$ ממוצע זמן ההמתנה הינו $E[W_q] = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{E_{2,N}}{N(1-\rho)}$. כלומר, ממוצע ההמתנה

בתצורה השנייה הינו נמוך בערך פי N ממוצע ההמתנה בתצורת התורים המקורית (ולמעשה נמוך אף יותר בשל העובדה כי $\rho \leq E_{2,n}(\rho)$).

1.2.5. (2 נקודות) כעת נניח כי תהליך ההגעה הוא תהליך פואסון וקצב הגעה הינו 60 לקוחות בשעה, זמן השרות מתפלג מעריכית עם ממוצע של 10 דקות, ויש 12 קופות פתוחות ופעילות. אמדו בעזרת פונקציית Gaenett מה יהיה אחוז הלקוחות המשרתים מיידית תחת נתונים אלו.

תשובה :

תחילה נחשב את ה- Offered Load : $R = \frac{60}{6} = 10$.

עתה נחשב את פרמטר השירות :

$$\beta = \frac{n-R}{\sqrt{R}} = \frac{12-10}{\sqrt{10}} = 0.63$$

מכיוון שאנו מניחים כי מדובר במודל Erlang C, כלומר, אין נטישות, נשתמש בגרף של Halfin-Whitt, על פי הגרף ההסתברות להמתנה תהיה כ- 0.4, ולכן אחוז המקבלים שירות מיידית הוא 60%.

שאלה 2 - תרגילי בית (10 נקודות)

חלק 1 – תחזיות

2.1.1 (1 נקודה) תארו במדויק את אחת משיטות התחזית (Forecasting) שהוצגו בכיתה או בתרגילי הבית. ציינו באיזו שיטה בחרתם. נסמן, כמו בתרגיל הבית, את N_{jk} להיות מספר השיחות הנכנסות באינטרוול זמן k ביום j ו- F_{jk} להיות תחזית מספר השיחות לאינטרוול זה. נניח שבוע עבודה של 6 ימים.

תשובה: למשל ממוצע נע (4) - נגדיר את התחזית הבאה על סמך ממוצע של ארבעת האינטרוולים האחרונים מאותו סוג (למשל יום ג' בין 10:00 ל-10:30):

$$F_{j,k} = \frac{N_{j-6,k} + N_{j-12,k} + N_{j-18,k} + N_{j-24,k}}{4}$$

2.1.2 (1 נקודה) בכיתה הוגדרו 2 מדדים לקביעת טיב התחזית F_{jk} :

RMSE (Root Mean-Square Error) ו-APE (Average Percent Error). תארו (במשפט אחד) כיצד מסיקים באיזו שיטת תחזית לבחור, בהתבסס על מדדים אלו. איזה מדד מהשניים יותר אינטואיטיבי לשימוש? הסבירו מדוע.

תשובה:

ככל שהמדדים קטנים יותר כך התחזית טובה יותר. ולכן נבחר במודל עם הערכים המינימליים. מדד APE יותר אינטואיטיבי כיוון שקל יחסית להגדיר מהו אחוז הטעות שאנו מוכנים לסבול במערכת כלשהי.

2.1.3 (2 נקודות) נניח כי המופעים למוקד השרות הם לפי תהליך פואסון עם קצב מופע λ_{jk} . נניח

שהצלחנו לחזות את ערכי הפרמטר λ_{jk} במדויק ($F_{jk} = \lambda_{jk}$). האם אתם מצפים שמדדי הטיב

RMSE ו-APE יהיו שווים ל-0? הסבירו תשובתכם.

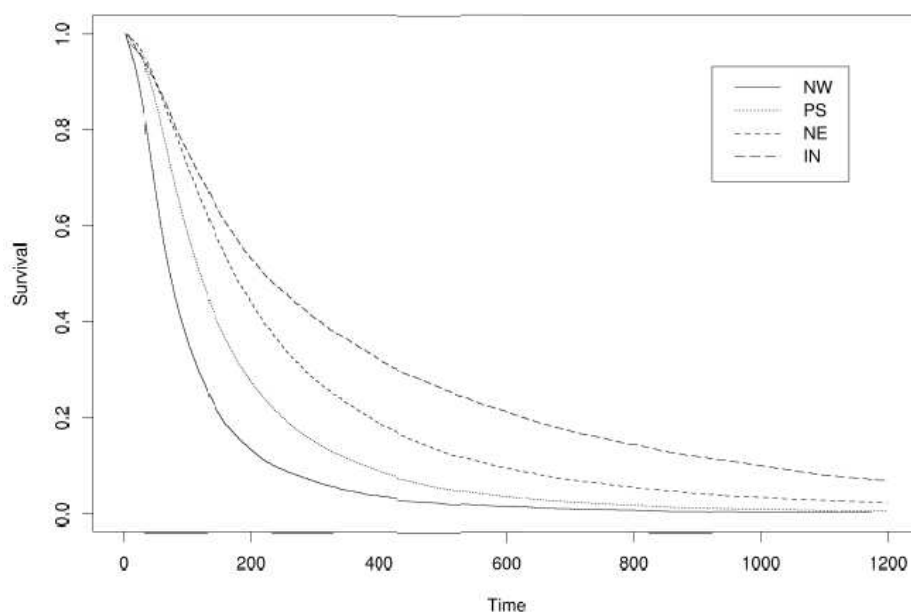
תשובה: לא. הערכים לא צפויים להיות 0, מכיוון שגם אם הפרמטר ידוע באופן מדויק, לתהליך עצמו יש השתנות סטוכסטית (שונות), והדגימות לא תהיינה זהות לממוצע.

חלק 2 – פונקציות שרידות ופונקציות סיכון של זמני שירות

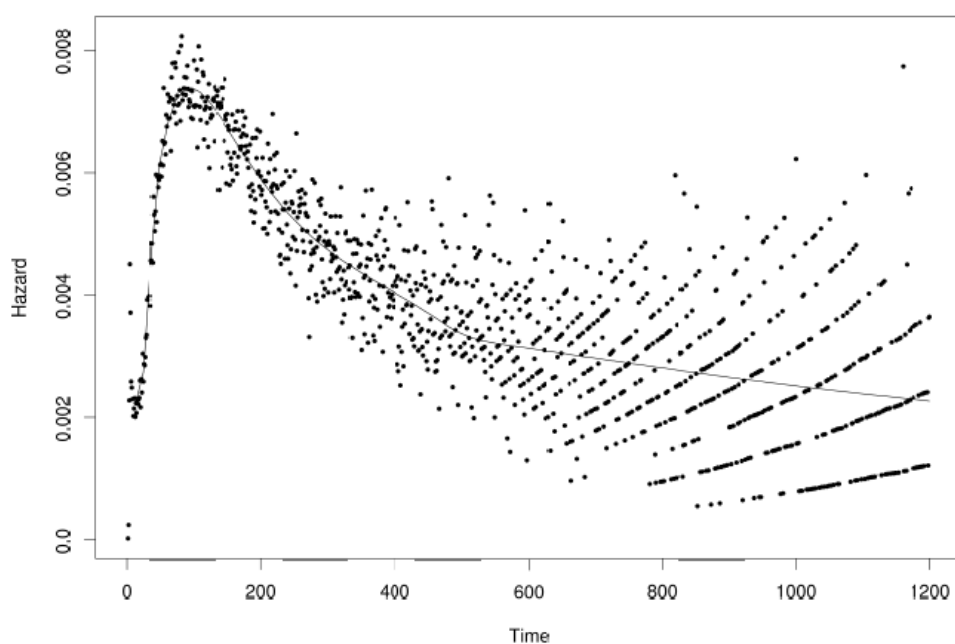
שני הגרפים שלהלן מבוססים על נתוני מוקד שירות טלפוני של בנק ישראלי קטן. נותחו ארבעה סוגי שירות עיקריים: NW, NE, IN, PS. גרף 1 מתאר פונקציות שרידות (survival functions) של ארבעת סוגי השירות. נקודות בגרף 2 הן אמדים לפונקצית הסיכון (hazard rate) של זמן השירות הכולל (כל סוגי השירות ביחד), ברזולוציה של שנייה אחת. הקו בגרף 2 הוא אמד לפונקצית הסיכון אחרי החלקה.

גרף 1

Nov-Dec



גרף 2



2.2.1 (1 נקודה) איך הייתם אומדים את תוחלת זמן השירות של סוג שירות מסוים, לו הייתה נתונה לכם רק פונקציית השרידות (survival) שלו $S(x), x \geq 0$?

תשובה:

$$\text{נשתמש בנוסחת הזנב: } E[S] = \int_0^{\infty} S(x) dx.$$

2.2.2 (2 נקודות) איך הייתם אומדים את תוחלת זמן השירות של סוג שירות מסוים, לו הייתה נתונה לכם רק פונקציית הסיכון (hazard rate) שלו $h(x), x \geq 0$?

תשובה:

ניתן לקבל את פונקציית השרידות מפונקציית הסיכון: $S(x) = \exp \left\{ - \int_0^x h(u) du \right\}$ ואחר כך להשתמש בנוסחת הזנב.

2.2.3 (1 נקודה) סדרו את ארבעת סוגי השירות לפי תוחלתם (מהקצרה ביותר לארוכה ביותר)

תשובה:

$$E(NW) < E(PS) < E(NE) < E(IN)$$

2.2.4 (2 נקודות) הסבירו את הצורה של "נקודות המסודרות על קו עולה", הבולטת בחלק הימני של גרף 2.

הערה:

האמידה של פונקצית הסיכון בגרף 2 נעשתה באופן הבא:

- נסמן ב A_k את מספר התצפיות עם זמן שירות שווה ל- k שניות.
- נסמן ב η_k את מספר התצפיות עם זמן שירות שגדול או שווה מ- k שניות.
- האמידים לפונקצית הסיכון בשניה k (נקודות בגרף 2) חושבו ע"י $\hat{h}(k) = A_k / \eta_k$.

הסבר:

הנקודות המסודרות על קו עולה מתאימות ל- $A_k = 1$, $A_k = 2$, ..., משום ש- η_k יורד כאשר הזמן עולה, קוים אלו עולים. (למשל הקו התחתון מתאים ל- $A_k = 1$)

חלק זה של העמוד נשאר ריק

שאלה 3 – יישום (20 נקודות)

שיבוץ מתמחים בבתי חולים

טוב או רע? שנה להסכם - הרופאים עדיין חלוקים

שנה לאחר שהרופאים חתמו על הסכם שכר עם האוצר העוסקים במקצוע עדיין חלוקים. ארגון רופאי בתי החולים ערך אירוע תחת המסר כי "מה שהיה רע לא השתנה, ומה שהיה טוב נהרס". מנגד, בהסתדרות הרפואית מרוצים: "הרווחנו בענק ל-9 שנים"



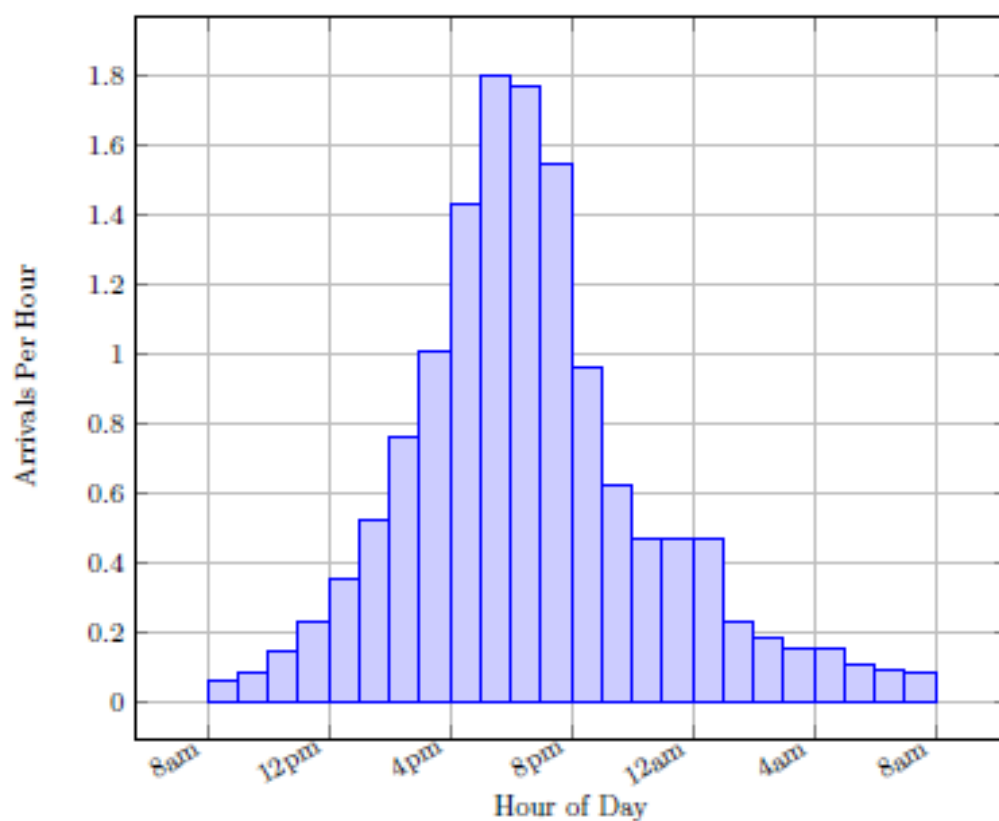
במחאת הרופאים בשנה שעברה (צילום: מוטי קמחי)

ב - 8.12.2011, לאחר סכסוך עבודה שנמשך כ- 9 חודשים, נחתם הסכם בין משרד האוצר לרופאים המתמחים. במהלך הדיונים נבחן לעומק נושא משמרות המתמחים הארוכות. שבוע עבודה של 80 שעות, עם משמרות הנמשכות מעל ל-36 שעות, היה עד אז תופעה שכיחה. כיום, על פי ההסכם החדש, מטפלים רופאים בחולים בבתי החולים במשמרות של עד 26 שעות רצופות.

כיועץ במשרד הבריאות הוטל עליך לבחון כיצד משפיע אורך המשמרת על רמת השירות הניתנת לחולים, ולנסח מדיניות משמרות אופטימאלית שתהיה קבועה ומעוגנת בחוק.

בשלב הראשון נבחן את קצב ההגעה למחלקות בתי החולים. כדוגמה, ניקח את אחת מהמחלקות הפנימיות בבית חולים גדול בארץ. גרף 1 מתאר את כמות ההגעות הממוצעת למחלקה, בכל שעה ביום.

גרף 1



3.1 (1 נקודה) האם ניתן להניח כי תהליך ההגעה למחלקה במשך יממה אחת הינו תהליך פואסון הומוגני בזמן? נמקו את תשובתכם.

תשובה :

לא ניתן להניח כי תהליך ההגעה הינו תהליך פואסון הומוגני בזמן. מההיסטוגרמה נראה בבירור כי קצב ההגעה אינו קבוע על פני היום, אלא משתנה באופן משמעותי משעה לשעה.

3.2 (2 נקודות) הסבירו מהו תהליך פואסון לא-הומוגני בזמן (או הומוגני למקוטעין) וכיצד ניתן לבדוק באמצעות מבחן Brown האם תהליך ההגעה הוא תהליך פואסון לא-הומוגני בזמן. פרטו

$$R_{ij} = (J(i) + 1 - j) \left(-\ln \left(\frac{L - T_{ij}}{L - T_{i,j-1}} \right) \right) : \text{את שלבי המבחן, לנוחיותכם הנוסחה הבאה:}$$

תשובה:

תהליך פואסון הומוגני למקוטעין הינו תהליך פואסון שהינו הומוגני בכל אינטרוול זמן קצר, כלומר בעל קצב קבוע בתוך כל אינטרוול זמן קצר אך הקצב משתנה מאינטרוול לאינטרוול. מבחן Brown:

1. נחלק את היום לאינטרוולים באורך שווה בהם אנו מניחים כי קצב הכניסה קבוע (למשל חצי שעה או שעה), סה"כ I אינטרוולים, כל אחד באורך L.
2. נגדיר את T_{ij} להיות ההגעה ה- j -ית באינטרוול ה- i .

$$\text{נגדיר } R_{ij} = (J(i) + 1 - j) \left(-\ln \left(\frac{L - T_{ij}}{L - T_{i,j-1}} \right) \right)$$

3. תחת הנחת האפס שתהליך ההגעה הוא תהליך פואסון הומוגני למקוטעין $\{R_{ij}\}$ הינם משתנים מקריים ב"ת ש"ה מהתפלגות $\exp(1)$. נשרטט Q-Q Plot של R_{ij} אלא מול השברונים

$$\text{התיאורטיים של ההתפלגות } \exp(1), \text{ כלומר אל מול } -\ln \left(1 - \frac{k}{N+1} \right) = -\ln \left(1 - F_N(k) \right)$$

(N = מספר התצפיות).

3.3 (2 נקודות) כעת נניח כי ברצוננו לאמוד את כמות המתמחים הכוללת הדרושה במחלקה פנימית בבית החולים. נניח כי משך הזמן הדרוש למתמחה לקבל למחלקה חולה חדש הינו 30 דקות בממוצע. כמו כן, מנהל בית החולים דורש כי חולה חדש שמגיע למחלקה יתקבל ע"י מתמחה תוך זמן ממוצע של 15 דקות. לאיזה כלל איוש מכוונים יעדי הביצוע של הנהלת בית החולים? מהו פרמטר השירות הרלוונטי?

תשובה:

יעד השירות הוא שזמן ההמתנה הממוצע יהיה 0.5 מזמן השירות הממוצע, כלומר מסדר גודל של זמן השירות ולפיכך יעדי ההנהלה מתאימים לאיוש ED.

$$\frac{E[W_q]}{E[S]} = \frac{1}{2} \approx \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \gamma \approx 2 \text{ וכלל האיוש המתאים הוא } n = R + 2$$

3.4 (2 נקודות) כמה מתמחים צריכים להיות בשעה 17:00 במחלקה עפ"י כלל זה? נמקו את תשובתכם.

תשובה:

כיוון שקצב ההגעה קבוע במהלך שעה (כלומר במשך זמן שהיה), אנו יכולים להשתמש בנוסחה הסטציונרית כקרוב סביר. ולכן,

$$n = \lceil R + 2 \rceil = \left\lceil \frac{\lambda}{\mu} + 2 \right\rceil = \left\lceil \frac{1.4}{2} + 2 \right\rceil = 3$$

3.5 (2 נקודות) הנהלת בית החולים שוקלת לאחד שתי מחלקות פנימיות למחלקה אחת. הניחו כי כלל האיוש שקבעתם בסעיף 3 אינו משתנה וכי קצב ההגעה ומשך השירות הממוצע זהים בשתי המחלקות. כיצד תשתנה נצילות הרופאים המתמחים עקב איחוד המחלקות? כיצד ישתנה זמן המתנה ממוצע לרופא? האם מתקיימת תופעת היתרון לגודל - Economies of Scale?

תשובה:

באיחוד שתי המחלקות העומס המוצע גדל פי 2, כלומר: $R \Rightarrow 2R$. לפני איחוד המחלקות נצילות

הרופאים המתמחים הייתה: $\rho_1 = \frac{R}{n} = \frac{R}{R+2}$. לאחר איחוד המחלקות הנצילות תהיה:

$\rho_2 = \frac{2R}{n} = \frac{2R}{2R+2}$. מתקיימת תופעת ה - Economies of Scale באופן חלקי. העומס המוצע

גדל פי 2 אך האיוש גדל ביחס קטן מזה ועדיין נשמר היעד של זמן ההמתנה הממוצע - כחצי מזמן שירות. זה מאפיין את היתרון לגודל שקיים ביחס למדד שירות זה.

אך לא כל מדדי השירות משתפרים בכלל איוש ED עם השינוי בגודל, לדוגמה, אחוז הממתינים גדל, כלומר נעשה גרוע יותר.

כעת נניח כי כאשר חולה מגיע למחלקה הוא עובר קבלה ע"י מתמחה ומאותו רגע ואילך נמצא תחת אחריות אותו מתמחה, **לכל אורך שהותו במחלקה**. (הניחו כי זמן השהיה מתפלג מעריכית עם ממוצע של 4 ימים). כל מתמחה יכול להיות אחראי על מספר מוגבל של חולים שיסומן ע"י c (נניח c=10). נבחן שתי מדיניות שונות של איוש מתמחים, המתאימות לכללים החדשים של הסכם העבודה. נניח כי אורך משמרת מקסימלי הוא 24 שעות, ולאחר משמרת ארוכה שכזו חייב הרופא לקבל יום חופש. המדיניות הן :

1. LS – Long Shifts

2. DA – Daily Admitting

ע"פ המדיניות הראשונה המתמחים יחולקו לשתי קבוצות שוות בגודל n. כל קבוצה תבצע משמרת של 24 שעות ואח"כ תנוח 24 שעות, לסירוגין. בסה"כ לאורך כל היום ולאורך כל השבוע, יהיה איוש אחיד של n מתמחים.

ע"פ המדיניות השנייה כל המתמחים יעבדו יחדיו במשמרת בוקר של 12 ואח"כ ינוחו במשך 12 שעות. המשמרת תתחיל ב- 10:00 ותסתיים ב- 22:00. חולים שיגיעו למחלקה בין 22:00 ל- 10:00 יהיו בהשגחה של אחות ויעברו קבלה ע"י רופא תורן (אנו מניחים שיש תמיד מספיק רופאים תורנים זמינים). הקבלה הרשמית שלהם למחלקה, ע"י המתמחה שיטפל בהם באופן רשמי במהלך שהותם במחלקה, תתבצע רק בבוקר כאשר יגיע מתמחה פנוי לקבלם. גם במדיניות הראשונה, אם מגיע חולה ואין מתמחים פנויים לקבלו הוא יעבור קבלה ע"י רופא תורן ויתקבל רשמית ע"י מתמחה רק כשאחד המתמחים במשמרת יתפנה, כלומר כשחולה אחר יעזוב את המחלקה.

באופן זה, אם חולה מגיע ואין מתמחה פנוי הוא יועבר בין שני רופאים. דבר זה אינו רצוי לחולה, כיוון שהוא פוגע ברצף הטיפול, ועלול לגרום לטעויות, איבוד מידע ובדיקות מיותרות.

3.6. (2 נקודות) נגדיר את $Q(t)$ כמספר החולים במחלקה בזמן t. כתבו ביטוי מתמטי, בעזרת מודל

נוזלים ל- $Q(t)$, כלומר רשמו את המשוואה הדיפרנציאלית של $\frac{d}{dt}Q(t)$.

כיצד ביטוי זה משתנה בכל מדיניות?

תשובה :

מדובר במודל נוזלים של Erlang C ולכן המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה הינה :

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \lambda(t) - \mu(Q(t) \wedge N(t))$$

כאשר במדיניות LS $N(t) = n \cdot c$ לכל אורך היום

ובמדיניות DA $N(t) = 2n \cdot c$ מ-10:00 עד 22:00 ואפס בשאר שעות היום.

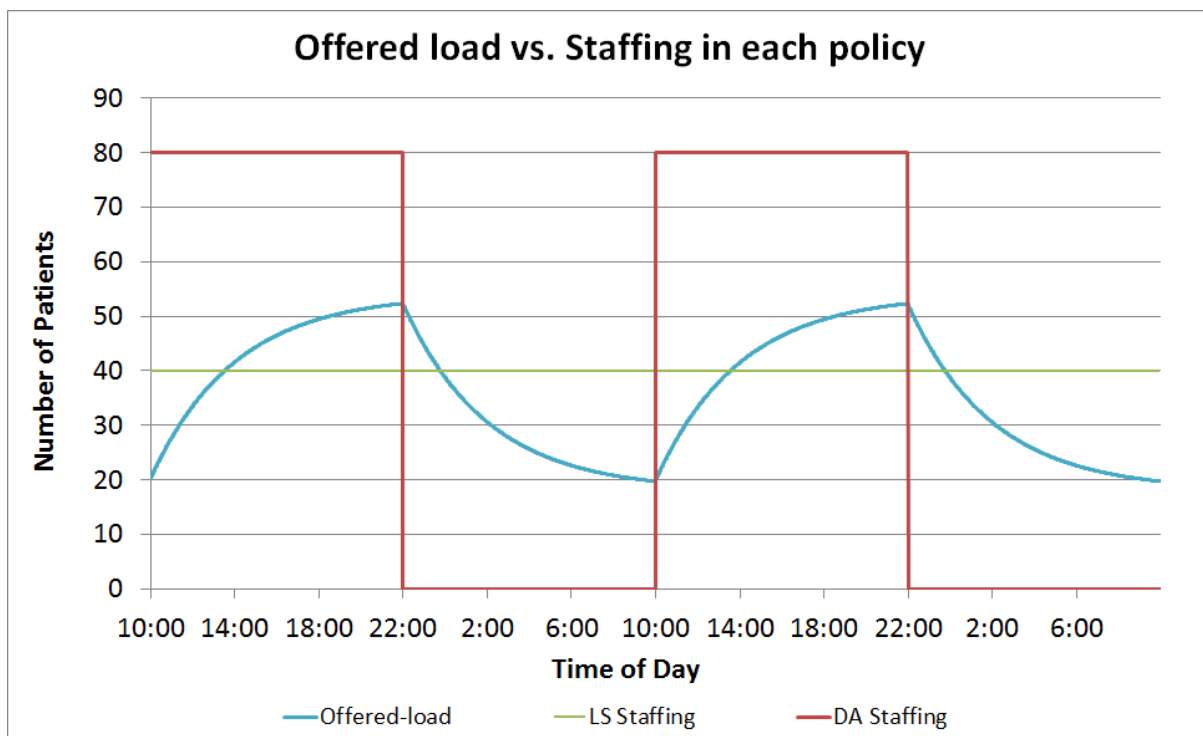
3.7. (2 נקודות) בקורס למדנו כי על מנת לקבוע את מספר המתמחים (שרתים), יש לחשב את $R(t)$ - העומס המוצע (offered-load). כיצד תשתמש במודל הנוזלים לחישוב $R(t)$?

תשובה:

על מנת לחשב את ה - Offered Load יש להתייחס למערכת כתור $M / M / \infty$, כלומר, להציב $N(t) = \infty$.

גרף מספר 2 מתאר את העומס המוצע (offered load) אל מול איוש המתמחים בכל מדיניות, על סמך מודל נוזלים, כאשר $n=4$ (כלומר ישנם לרשותנו 8 מתמחים).

גרף 2



3.8. (2 נקודות) העריכו באילו שעות ביום ייווצרו תורים בכל מדיניות? הסבירו.

תשובה :

תורים נוצרים כאשר העומס המוצע גדול ממספר השרתים. לכן,
לפי מדיניות DA יצטברו תורים בשעות הלילה מ- 22:00 עד 10:00 בבוקר, אם כי ייקח זמן נוסף
אחרי 10:00 בבוקר עד שהתורים יעלמו לחלוטין.
לפי מדיניות LS יצטברו תורים בשעות אחר הצהריים בערך משעה 14:00 עד 00:00 בלילה. (שוב
ייקח זמן נוסף עד שתורים אלו יעלמו לאחר חצות).

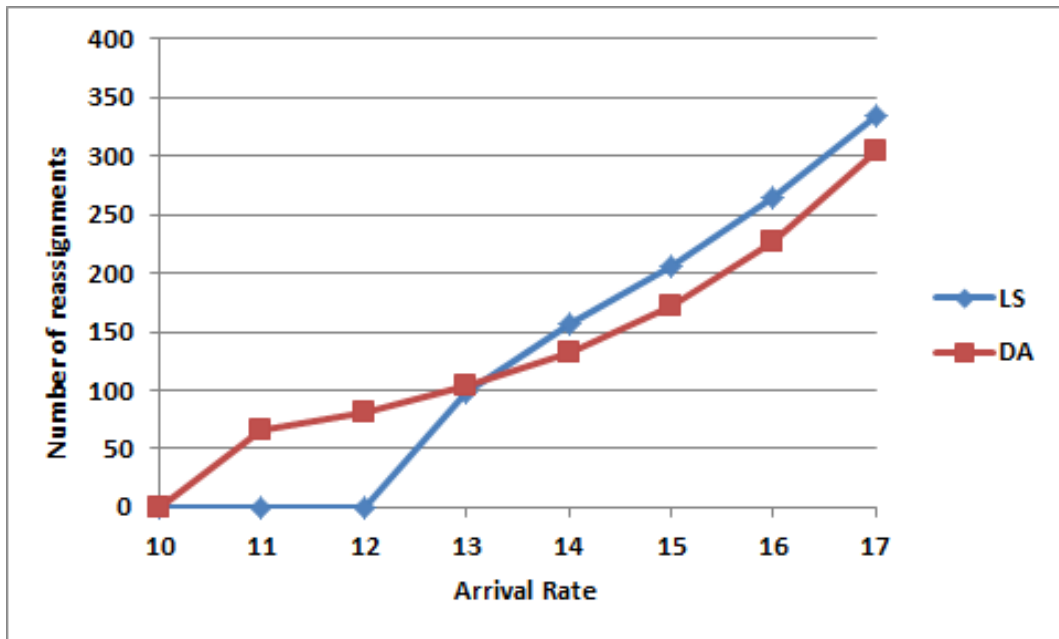
3.9. (2 נקודות) מכיוון שמבחינה רפואית חשוב שלכל חולה יהיה רצף טיפולי, בית החולים רוצה
להביא למינימום את מספר החולים המועברים מרופא אחראי אחד לשני (reassignment). על
כן, בית החולים רוצה להביא למינימום את מספר החולים שלא מתקבלים מיידית ע"י מתמחה
במהלך יממה. רשמו ביטוי למדד זה.

תשובה :

$$\int_0^{24} \lambda(t) \cdot P(W > 0) dt$$

3.10. (2 נקודות) מנהל המחלקה טוען כי מדיניות DA עדיפה בעומס הגעות גבוה ומדיניות LS עדיפה בעומס הגעות נמוך. לתמיכת טענתו הוא יצר את גרף מספר 3, המתאר את כמות החולים המועברים בין רופאים כפונקציה של קצב ההגעה הכולל למחלקה (ביממה). הוא הניח כי אם קצב ההגעה הכולל עולה הוא עולה באופן שווה לאורך היום, כלומר פרופורציית ההגעות בכל שעה נשמרת בדיוק אותו הדבר. הסבר מדוע תופעה זו מתרחשת? וכיצד היא קשורה לעומס המוצע (offered load)?

גרף 3



תשובה:

שתי המדיניות הללו אינן תואמות לעומס המוצע. מדיניות DA מאיישת יותר מדי רופאים ביום ופחות מדי בלילה, ומדיניות LS מאיישת יותר מדי רופאים בלילה ופחות מדי ביום. לכן, עבור מדיניות DA יוצרו תורים בלילה, בשעות בהן אין מתמחה במחלקה. גם בקצב כללי מאוד נמוך יהיו המתנות במדיניות זו. לעומת זאת, במדיניות LS, יוצרו תורים רק במהלך היום. ככל שהעומס גדל, מספר האנשים הממתינים במדיניות LS יגדל מהר יותר מכיוון שקצב ההגעות ביום גבוה יותר מהלילה. בקצב הגעות נמוך, אין תורים במדיניות LS, ולכן גם אין העברות.

3.11. (1 נקודה) הצע מדיניות משמרות שלדעתך תהיה טובה יותר מ- LS ו- DA. שרטט על גרף 2 (המצורף כאן מחדש לנוחיותכם) כיצד יראה איוש זה.

תשובה:

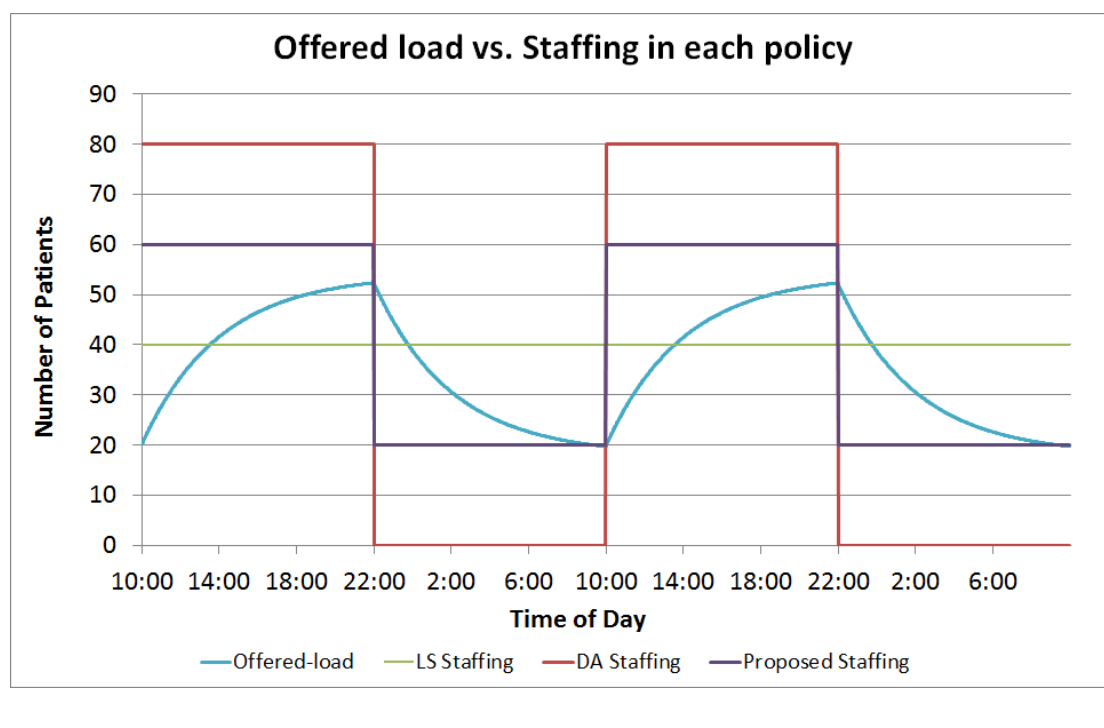
נרצה ליצור מדיניות משמרות בה מספר השרתים קרוב עד כמה שניתן לעומס המוצע.

ניתן לעשות זאת לדוגמה ע"י האיוש הבא:

נחלק את הרופאים ל-4 קבוצות. כל קבוצה תהיה במשמרת עבודה של 24 שעות, יום חופש, 12 שעות עבודה ביום, ולאחריהן 12 שעות לילה חופש, ושוב 12 שעות עבודה ביום, ולאחריהן 12 שעות לילה חופש. כל קבוצה תתחיל את יום העבודה הארוך בהפרש של 24 שעות. נגדיר משמרת "יום" מ- 14:00 בצהריים עד 2:00 בלילה, ומשמרת "לילה" המתחילה ב- 2 בלילה. באופן זה, בשעות "היום" יהיו פי 3 רופאים מבשעות ה"לילה". לכן, בגרף שלעיל במהלך היום (מ-14:00 עד 2:00) יהיה $nc=60$ ובלילה (מ-2:00 עד 14:00) $nc=20$.

הטבלה הבאה מסכמת את מדיניות המשמרות המוצעת:

	Day 1		Day 2		Day 3		Day 4	
	Day	Night	Day	Night	Day	Night	Day	Night
Shift 1	2	2	0	0	2	0	2	0
Shift 2	2	0	2	2	0	0	2	0
Shift 3	2	0	2	0	2	2	0	0
Shift 4	0	0	2	0	2	0	2	2
Total n	6	2	6	2	6	2	6	2
Total nc	60	20	60	20	60	20	60	20

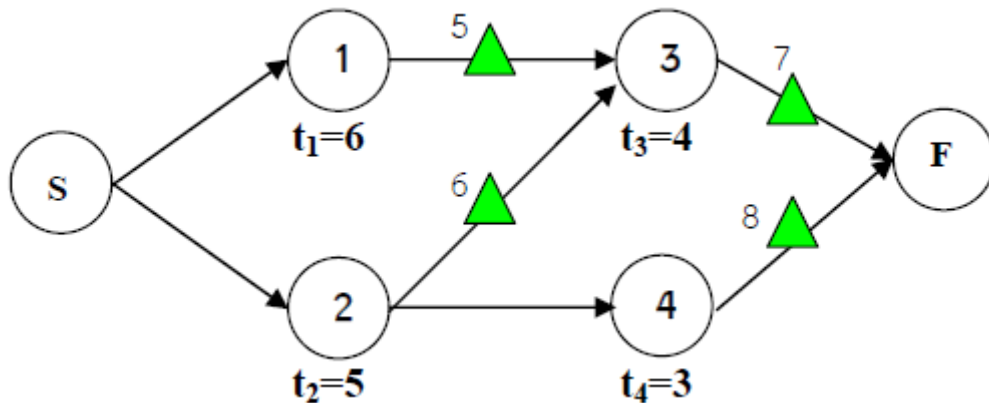


שאלה 4 – תאוריה (10 נקודות)

חלק 1 – PERT סטטי דטרמיניסטי

להלן גרף PERT המציין את סדר הפעילויות שעל פרויקט לעבור עד לסיומו (4 פעילויות בסה"כ).

t_i הינו משך פעילות i בימים. בשלב הראשון הניחו כי t_i קבוע לכל i .



4.1. (0.5 נקודה) כמה זמן נמשך הפרויקט? מהו הנתיב הקריטי? נמקו.

תשובה:

נבדוק את משכם של שלושת המסלולים בגרף:

S-1-3-F משכו 10 ימים.

S-2-3-F משכו 9 ימים.

S-2-4-F משכו 8 ימים.

לפיכך המסלול הקריטי הינו S-1-3-F והפרויקט נמשך 10 ימים.

חלק 2 – PERT סטוכסטי

4.2. (1 נקודה) כעת הניחו כי משכי הפעילויות מפולגים מעריכית, כאשר t_i הינו המשך הממוצע

של פעילות i . מסימולציה נמצא כי משכו הממוצע של הפרויקט כעת הינו 13.3 יום. הסבירו מדוע

משך הפרויקט כעת ארוך ממשך הפרויקט כאשר משכי הפעילויות הינם דטרמיניסטיים.

תשובה:

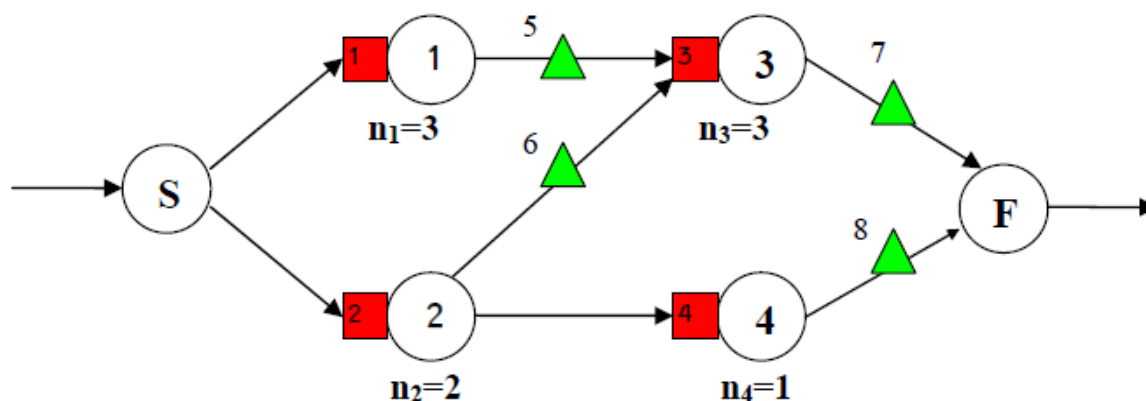
הדבר נובע מכך ש - $E\left(\max_j \sum_{i \in j} T_i\right) \geq \max_j E\left(\sum_{i \in j} T_i\right) = \max_j \sum_{i \in j} E(T_i)$ כאשר j מונה את כל

המסלולים האפשריים ברשת.

חלק 3 – PERT סטוכסטי דינמי

כעת נניח בנוסף כי פרויקטים מגיעים למערכת לפי תהליך פואסון, כאשר ממוצע הזמן הבין מופעי הוא 3.5 ימים. הגרף הבא מתאר את מספר השרתים בכל פעילות.

4.3.1. (0.5 נקודה) מהי הנצילות של כל אחד מסוגי השרתים?



תשובה:

$$\rho_1 = \frac{(1/3.5) \cdot 6}{3} = 57\% \quad \rho_3 = \frac{(1/3.5) \cdot 4}{3} = 38\%$$

$$\rho_2 = \frac{(1/3.5) \cdot 5}{2} = 71\% \quad \rho_4 = \frac{(1/3.5) \cdot 3}{1} = 86\%$$

4.3.2. (1 נקודה) מסימולציה נמצא כי משך פרויקט ממוצע כעת הינו 32.15 יום. הסבירו מדוע כעת משך פרויקט ממוצע ארוך ממשך פרויקט ממוצע תחת הנחות סעיף 4.2.

תשובה:

כעת מדובר במודל סטוכסטי דינמי, פרויקטים חדשים מגיעים למערכת ע"פ תהליך פואסון ולפיכך נוצרים תורי משאבים לפני כל אחת מהפעילויות, בנוסף לתורי הסנכרון שהיו קיימים קודם במערכת.

להלן מספר טבלאות ותרשים שהוצגו בהרצאה עבור סימולציה של המודל הדינמי סטוכסטי :

טבלה 1 – Waiting Times in Queues

Queue	mean	half C.I.	% from mean
1	1.42	0.063	4.43
2	5.15	0.318	6.17
3	0.234	0.009	3.84
4	17.4	1.49	8.5
5	5.39	0.298	5.5
6	2.65	0.076	2.86
7	15.102	1.42	9.5
8	1.589	0.071	4.46

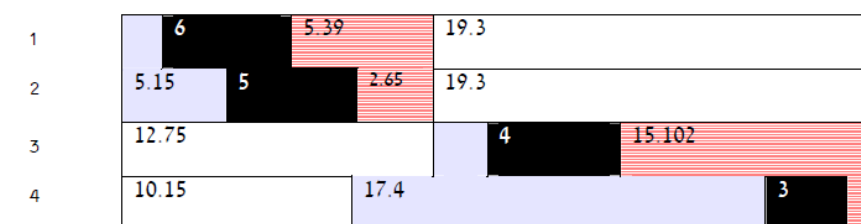
טבלה 2 – Critical Paths

Path	Frequency	half C.I.
s-1-3-f	0.146	0.0067
s-2-3-f	0.104	0.0052
s-2-4-f	0.750	0.0110
	1.000	

טבלה 3 - Critical Tasks (The probability that a task is on a critical path)

Task	Criticality index
1	0.146
2	0.854
3	0.250
4	0.750

תרשים 1:



- waiting time.
- processing.
- synchronization.
- Internal

4.4. (2 נקודות) כעת עליכם לבחון מספר חלופות לקיצור משך הפרויקט הממוצע. חלופה ראשונה הינה לקצר את המשך הממוצע של פעילות 2 ביום אחד, חלופה שניה היא לקצר את משך פעילות 3 ביום אחד. עבור כל חלופה הסבר האם אתם מצפים כי משך הפעילות (כולל תורי משאבים וסנכרון) יתקצר בממוצע ביום אחד? יותר מיום אחד? פחות מיום אחד? כיצד צפוי להשתנות משך הפרויקט כולו? איזו חלופה צפויה להביא לקיצור זמנים משמעותי יותר? מדוע? נמקו את תשובתכם במדויק ככל שתוכלו.

תשובה :

כאשר מקצרים את פעילות 2 ביום אחד, אנו מצפים כי משך הפעילות יתקצר ביותר מיום אחד מכיוון שקיצור משך פעילות 2 יקצר גם את תור המשאבים שלפניה. בנוסף, קיצור זה יוריד את משך ההמתנה בתור הסנכרון שאחרי פעולה 1, כך שזמן ההמתנה הכולל בתור סנכרון לפני פעילות 3 יתקצר, ולכן משך הפרויקט כולו צפוי להתקצר. (לראיה נוספת, פעילות 2 נמצאת על הנתיב הקריטי ב- 85% מהסימולציות, כלומר ב- 85% מהמקרים קיצור זמן הפעילות והתור שלפניה יבוא לידי ביטוי בקיצור משך הפרויקט כולו).

קיצור משך פעילות 3 ביום אחד, אומנם יקצר את זמן סיום פעילות 3 ביותר מיום אחד, אך העומס על תחנה זו נמוך יותר ולכן תור המשאבים שלפניה יתקצר פחות. בנוסף, רק ב- 25% מהמקרים פעילות זו הינה על הנתיב הקריטי ולכן תשפיע פחות על משך הזמן הכולל.

לפיכך, הקיצור בפעילות 2 יהיה בעל השפעה גדולה יותר על קיצור משך הפרויקט הכולל, ומשך הפרויקט הכולל צפוי להתקצר ביותר מיום אחד.

תשובה :

Process	Waiting time.	processing.	synchronization.	Internal	Total
1	6	5.39	19.3		
2	5.15	5	2.65		19.3
3	12.75	4	15.102		31.852
4	10.15	17.4	3		30.65

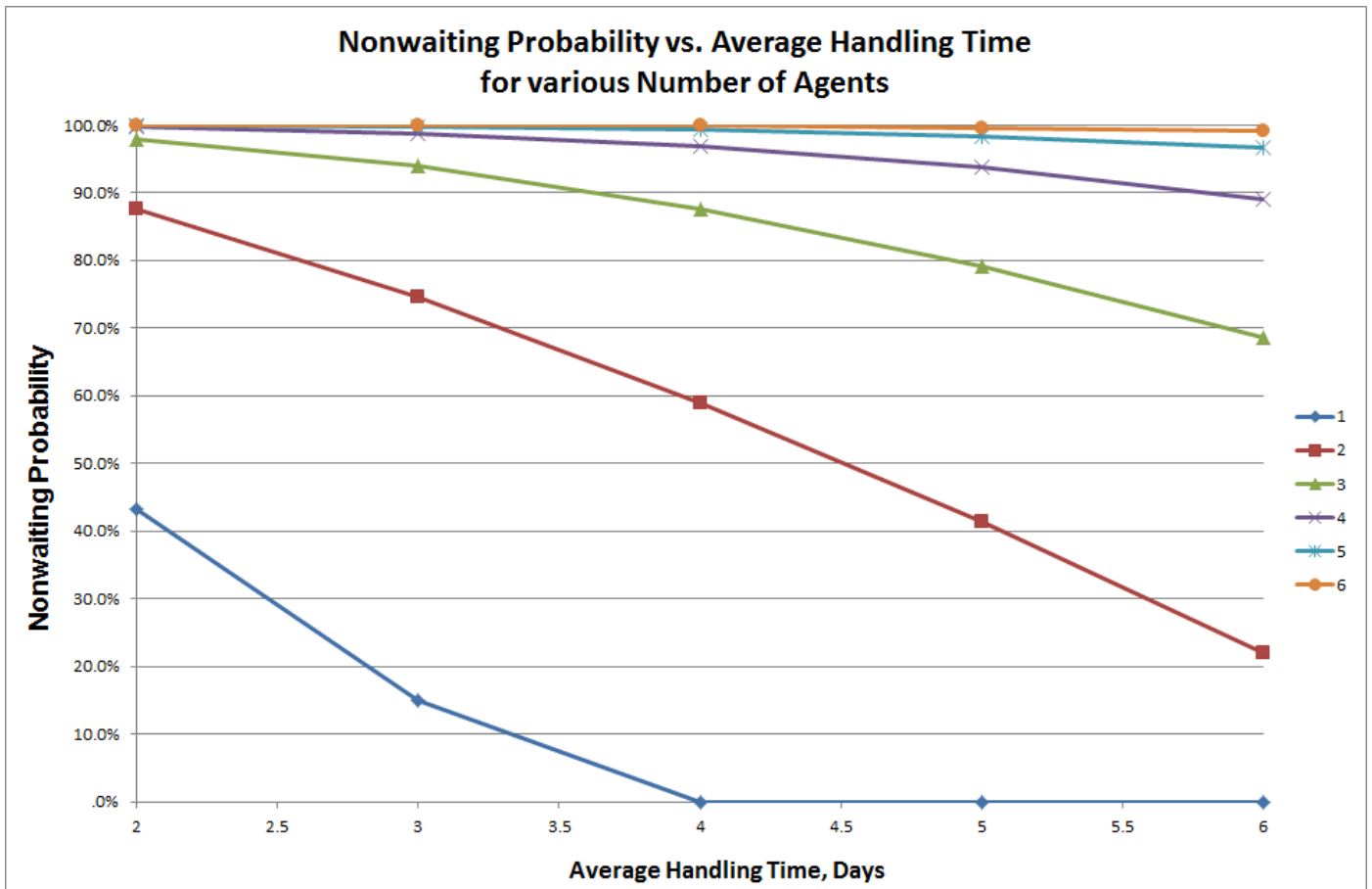
Legend:

- waiting time.
- processing.
- synchronization.
- Internal

חלק זה של העמוד נשאר ריק

4.6. (2 נקודות) על מנת להשוות בין החלופות בצורה יותר מדויקת הפקנו מתוכנת ה-4CC את גרף 4. גרף זה מתאר את ההסתברות לקבלת שירות מידי כפונקציה של משך שרות ממוצע ומספר השרתים. השתמש בגרף זה על מנת לחשב את הקיצור במשך ההמתנה הממוצע לכל אחת מהחלופות. איזו מבין כלל החלופות שהוצעו עדיפה? לעזרתכם מצורפות נוסחאות רלוונטיות בעמוד 31.

גרף 4



תשובה:

מתוך גרף 4 ניתן למצוא את $E_{2,n}$, עבור כל האפשרויות השונות.

נחשב את השיפור בזמן ההמתנה בתורי משאבים עבור כל אחת מהחלופות:

ממוצע זמן ההמתנה בתור המשאבים של פעילות 2 לפני השינוי היה:

$$E[W_q] = \frac{1}{n\mu} \cdot \frac{E_{2,n}}{(1-\rho)} = \frac{0.6}{2 \cdot (1/5) \cdot (1-0.714)} = 5.2$$

לאחר השינוי:

$$E[W_q] = \frac{1}{n\mu} \cdot \frac{E_{2,n}}{(1-\rho)} = \frac{0.4}{2 \cdot (1/4) \cdot (1-0.571)} = 1.866$$

, קיצור של 3.38 יום.

ממוצע זמן ההמתנה בתור המשאבים של פעילות 3 לפני השינוי היה :

$$E[W_q] = \frac{1}{n\mu} \cdot \frac{E_{2,n}}{(1-\rho)} = \frac{0.12}{3 \cdot (1/4) \cdot (1-0.38)} = 0.26$$

לאחר השינוי :

$$E[W_q] = \frac{1}{n\mu} \cdot \frac{E_{2,n}}{(1-\rho)} = \frac{0.06}{3 \cdot (1/3) \cdot (1-0.28)} = 0.084$$

ממוצע זמן ההמתנה בתור המשאבים של פעילות 4 לפני השינוי היה :

$$E[W_q] = \frac{1}{n\mu} \cdot \frac{E_{2,n}}{(1-\rho)} = \frac{0.85}{1 \cdot (1/3) \cdot (1-0.857)} = 17.85$$

לאחר השינוי :

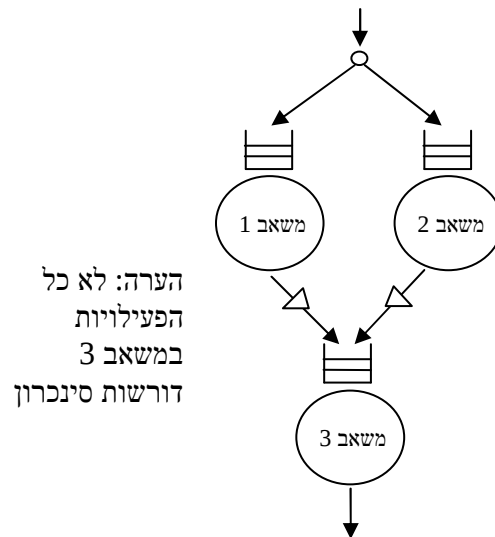
$$E[W_q] = \frac{1}{n\mu} \cdot \frac{E_{2,n}}{(1-\rho)} = \frac{0.25}{2 \cdot (1/3) \cdot (1-0.428)} = 0.656$$

ברור כי החלופה השלישית מביאה לקיצור משמעותי בהרבה בזמן ההמתנה של פרויקט בתור משאבים. פעילות 4 נמצאת 75% מהזמן על התיב הקריטי ולפיכך קיצור זמן ההמתנה לפנייה ישפיע באופן מהותי על זמן השהייה הכולל של פרויקט במערכת. כמו כן, כפי שניתן לראות מהסעיף הקודם, קיצור זה עשוי לבטל כמעט לחלוטין את תור הסנכרון שאחרי פעילות 3. החלופה הראשונה, המביאה לקיצור משך השהייה בפעילות 2 (תור+שירות) בכ – 3.5 ימים לא תוכל להביא לשיפור משמעותי כל-כך במשך השהייה הכולל של פרויקט במערכת.

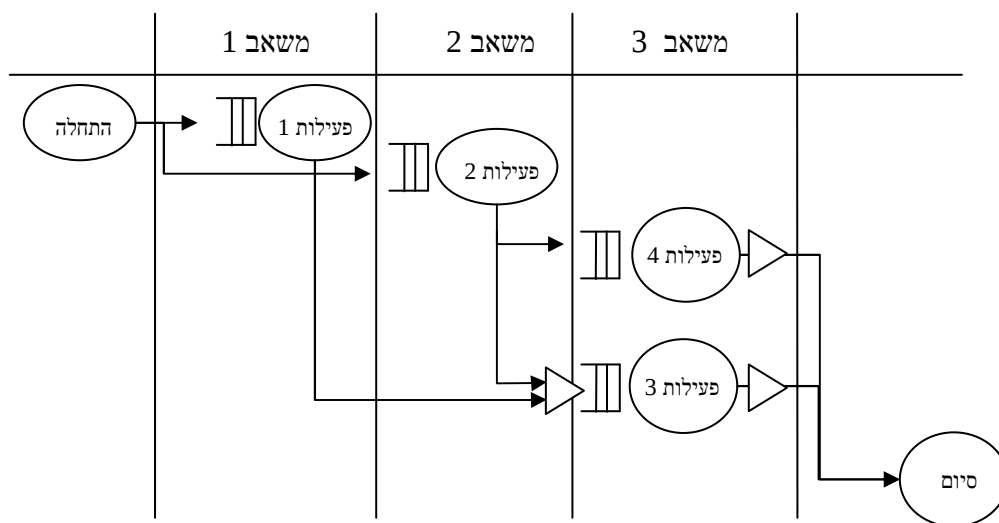
שימו לב – יש שאלות נוספות בעמוד הבא.

4.6. (1 נקודה) מנהל החברה הכשיר את השרתים שמבצעים את פעילות 3 ו-4 לבצע את שתי הפעילויות. צייר תרשים משאבים ותרשים תהליך משולב (משאבים ופעילויות) לפרויקט תחת תרחיש חדש זה.

תרשים משאבים:



תרשים תהליך משולב:



M/M/1: Further Properties

- Delay probability (PASTA):

$$P\{W_q > 0\} = \rho.$$

- Waiting time in queue (given delay, it is exp):

$$\frac{W_q}{1/\mu} \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - \rho \\ \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{1-\rho}\right) & \text{wp } \rho \end{cases}$$

$$\text{Note: } E\left[\frac{W_q}{1/\mu}\right] = 0 \times (1 - \rho) + \frac{1}{1-\rho} \times \rho = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- Number-in-system/queue:

$$E[L] = \frac{\rho}{1-\rho}; \quad E[L_q] = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

M/M/n Queue: Properties

Erlang-C Formula (1917) for the Delay probability:

$$P\{W_q > 0\} \triangleq E_{2,n} = \sum_{i \geq n} \pi_i = \frac{R^n}{n!} \frac{1}{1-\rho} \cdot \pi_0.$$

Erlang-C computation: via recursion, see Erlang-B below.

Erlang-C approximations: important later in course.

Number-in-queue:

$$P\{L_q = i\} = E_{2,n} \cdot (1 - \rho)\rho^i, \quad i > 0,$$

or

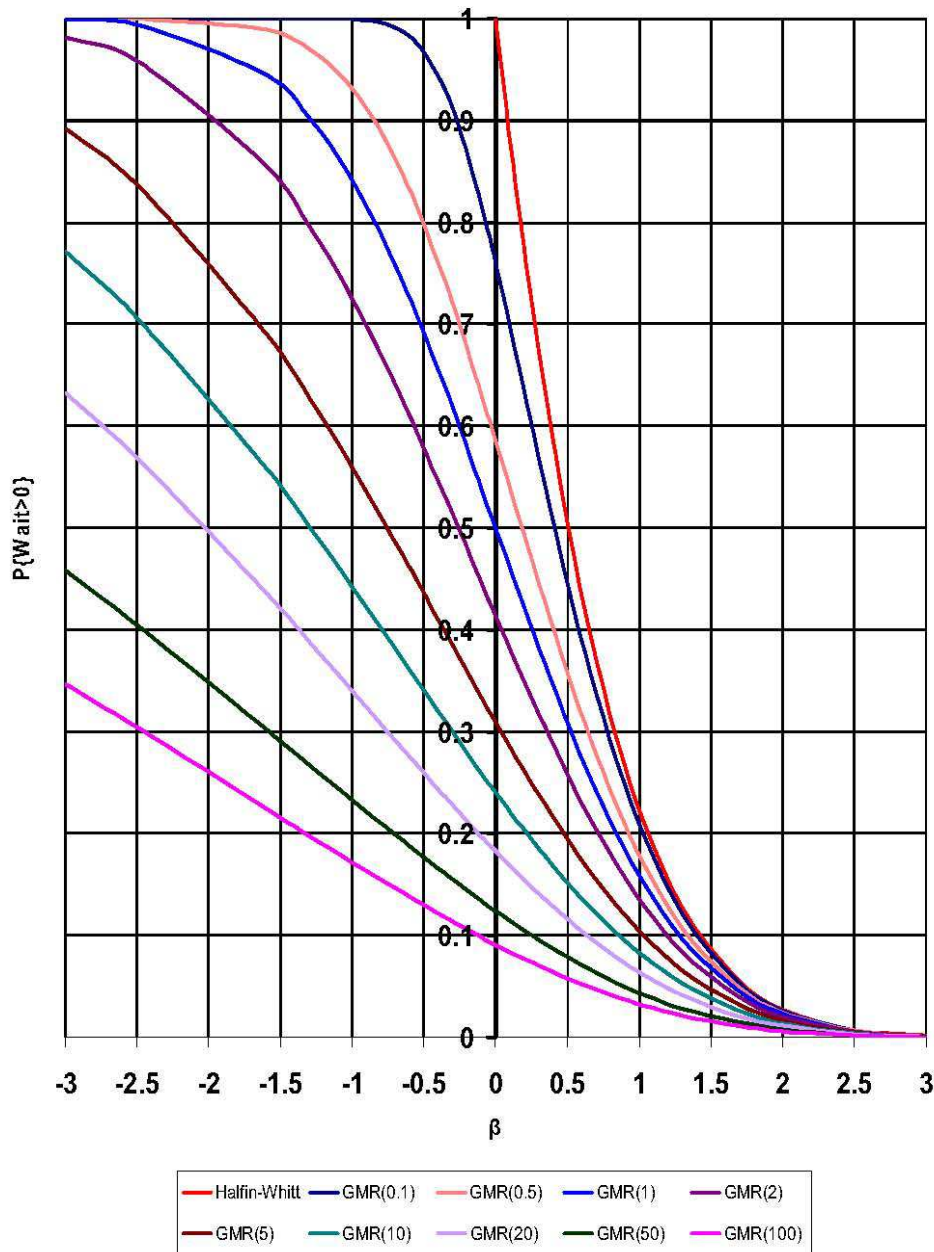
$$L_q = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Geom}_{\geq 0}(1 - \rho) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Waiting time distribution:

$$\frac{W_q}{1/\mu} = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Exp}\left(\text{mean} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .



GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\frac{\theta}{\mu} = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

Note: **Erlang-C** = limit of **Erlang-A**, as patience $\uparrow$ indefinitely.

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Gen. Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$N \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multi-nomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(m, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; m \geq 1$	$k = m, m+1, \dots$	$\left[\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t} \right]^m$	$\frac{m}{p}$	$\frac{mq}{p^2}$	Number of trials till m -th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$\exp\{-\lambda(1 - e^t)\}$	λ	λ	
Hyper-geometric	$X \sim HG(N, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N + M$	$\max(0, n - M) \leq k$ $k \leq \min(n, N)$	$\sum_k e^{tk} p(k)$	$\frac{n \cdot N}{N+M}$	$n \cdot \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N-M-n}{N+M-1}$	N – special elements M – ordinary ones n – sample size k – special in sample
		Density Function						
Beta	$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	Complicated	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ $= (x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp\left\{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\}$	μ	σ^2	