



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגלת : ניצן כרמלי

תאריך הבחינה : 21.02.2012

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד א' – סמסטר חורף תשע"ב 2012

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 30 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

הרצאות\תרגולים\בחינות קודמות	מתוך 10 נקודות	שאלה 1
תרגילי בית	מתוך 10 נקודות	שאלה 2
יישום	מתוך 20 נקודות	שאלה 3
תיאוריה	מתוך 10 נקודות	שאלה 4

סה"כ _____ מתוך 50 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 - תרגילי כיתה/הרצאות/מבחנים קודמים (10 נקודות)

חלק 1

חברת MBPF Finance Inc. מבצעת הערכת בקשות להלוואות ולאחר מכן מאשרת או דוחה את הבקשות. החברה מעוניינת להעריך שינויים ברמת השירות הנובעים משינוי בתהליך הערכת הבקשות.

מופע הבקשות להלוואות הינו בקצב של 1000 בקשות בחודש. עד לינואר 1998 (תחת "תהליך 1"), כל בקשה עוברת את אותו התהליך. נמצא כי בממוצע קיימות 500 בקשות בתהליך ההערכה, ובממוצע 20% מהבקשות מאושרות בתום התהליך. מכיוון שקיימים סוגי בקשות שונים וכי לא סביר להתייחס לכל הבקשות באותו אופן, הוחלט לבצע שינוי בתהליך העבודה. לפי "תהליך 2" כל הבקשות עוברות בדיקה ראשונית שבסופה תסווג כל בקשה לאחת מ-3 הקבוצות הבאות:

A – בקשות שעבורן קיים סיכוי גבוה לאישור ועבורן נדרשת בדיקה קצרה נוספת.

B – בקשות עבורן נדרשת בדיקה מפורטת.

C – בקשות נדחות לאחר בדיקה ראשונית.

נמצא כי בממוצע 25% מכלל הבקשות הן מסוג A, 25% מסוג B ו- 50% מסוג C. בממוצע, 70% מהבקשות מסוג A ו- 10% מהבקשות מסוג B מאושרות בתום הבדיקה הנוספת. מספר הבקשות הממוצע בתהליך הינו כדלקמן: 200 בקשות בבדיקה הראשונית, 25 בבדיקה לבקשות מסוג A ו- 150 בבדיקה לבקשות מסוג B.

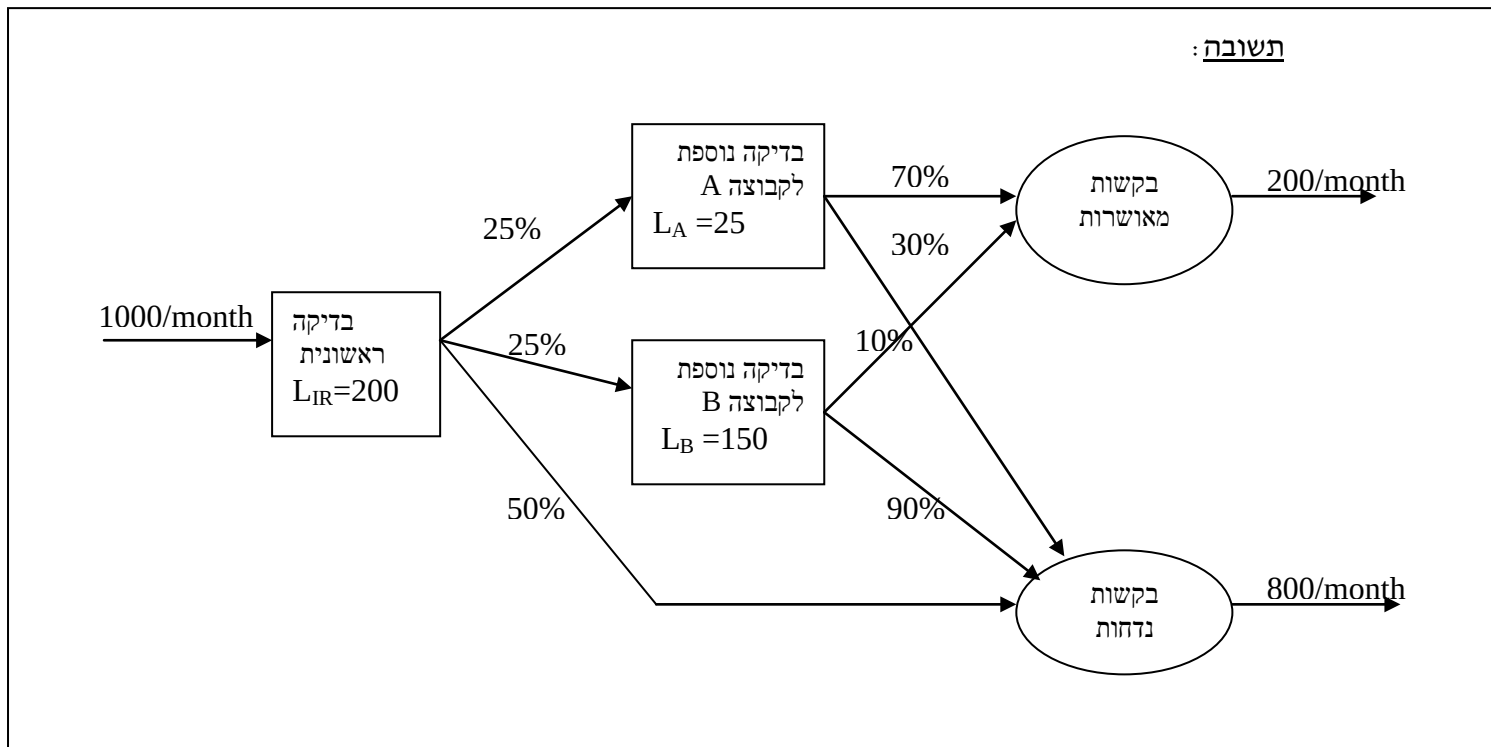
1.1.1 חשבו את ממוצע זמן בדיקת בקשה לפי תהליך 1.

תשובה:

לפי חוק Little ,

$$W_1 = \frac{500}{1000} \text{ month} = 15 \text{ days}$$

1.1.2 השלימו את התרשים המתאר את תהליך 2 ע"י תוספת שמות הפעילויות, אחוזי מעבר, קצבי מעבר וממוצע מספר בקשות בתחנה.



1.1.3 חשבו את ממוצע זמן בדיקת בקשה לפי תהליך 2.

תשובה:

דרך 1:

$$W_2 = \frac{375}{1000} \text{ month} = 11.25 \text{ days}$$

דרך 2:

$$W_{IR} = \frac{200}{1000} \text{ month} = 6 \text{ days}; \quad W_A = \frac{25}{1000 \times 0.25} \text{ month} = 3 \text{ days};$$

$$W_B = \frac{150}{1000 \times 0.25} \text{ month} = 18 \text{ days};$$

$$\Rightarrow W_2 = 0.5 \cdot 6 + 0.25 \cdot (6 + 3) + 0.25 \cdot (6 + 18) = 11.25 \text{ days}$$

כלומר, שיפור של 4 ימים בממוצע זמן השירות.

1.1.4 האם זמן השירות הממוצע עבור בקשות שאושרו השתפר במעבר מתהליך 1 לתהליך 2? הציגו את חישוביכם.

תשובה:

דרך 1: $\frac{25\% \times 70\%}{20\%} = \frac{7}{8}$ מהבקשות שאושרו הן מסוג A, ו- $\frac{1}{8}$ מסוג B. לכן,

$$W_{Approved} = \frac{7}{8} \cdot 9 + \frac{1}{8} \cdot 24 = 10.875 \text{ days}$$

דרך 2:

$$L_{Approved} = L_{IR,App} + L_{A,App} + L_{B,App} = 200 \cdot 20\% + 25 \cdot 70\% + 150 \cdot 10\% = 72.5$$

$$\lambda_{Approved} = 1000 \cdot 20\% = 200 \text{ per month}$$

$$\Rightarrow W_{Approved} = \frac{72.5}{200} \text{ month} = 10.875 \text{ days}$$

← זמן העיבוד עבור הבקשות שאושרו השתפר.

1.1.5 הניחו כי 8 סוכנים עובדים בתחנת הבדיקה הנוספת לבקשות מסוג B וכי עומס העבודה מתחלק ביניהם באופן שווה. כל סוכן יכול לשרת 40 בקשות לחודש. בנוסף, בממוצע, 20% מהבקשות שמסווגות לאחר הבדיקה הראשונית לקבוצה A דורשות למעשה בדיקה מפורטת יותר, ונשלחות לבדיקה עבור קבוצה B (לאחר בדיקתן בקבוצה A). מהי כעת נצילות סוכן בתחנת הבדיקה מסוג B? הציגו את חישוביכם.

תשובה:

$$\rho_B = \frac{250 + 250 \cdot 20\%}{8 \cdot 4} = 94\%$$

1.1.6 תחת ההנחות של סעיף 1.1.5, מהו פרופיל התעסוקה של סוכן בתחנה B? כלומר, מהו אחוז הזמן בטווח הארוך בו עסוק הסוכן בהערכת בקשות שהגיעו ישירות מהבדיקה הראשונית, בטיפול בבקשות שהגיעו מתחנת בדיקה A ומהו אחוז זמן חוסר-התעסוקה?

תשובה:

בקשות מבדיקה ראשונית : 78%.

בקשות מ-A : 94%-78%=16%.

בטל : 100%-94%=6%.

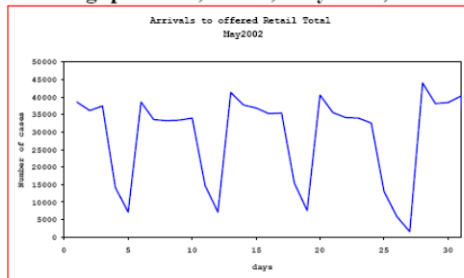
חלק 2

1.2.1 מצורפים בזאת 3 עמודים שהוצגו בהרצאה, המתארים את קיומו או אי-קיומו של חוק Little במערכות שונות (בכל עמוד מוצגים 3 גרפים). הסבירו, עבור כל עמוד, האם נראה שחוק Little מתקיים, ומדוע הוא צפוי/לא צפוי להתקיים במקרה זה.

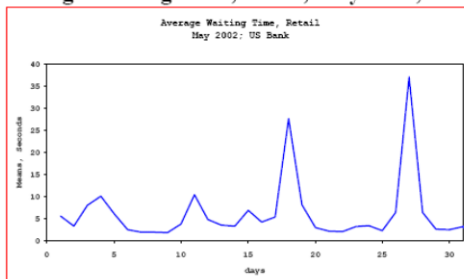
גרף 1: ימי חודש מאי 2002

Little's Law for Retail calls, May 2002: US Bank

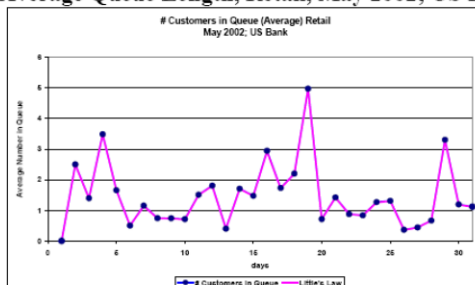
λ : Throughput Rate, Retail, May 2002; US Bank



W: Average Waiting Time, Retail, May 2002; US Bank (Wq)



L: Average Queue Length, Retail, May 2002; US Bank (Lq)



Date	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
λ	38476	36144	37414	14194	7107	38587	33572	33220	33349	34009	14807	7141	41293	37653	36872	35266
W	5.6	3.3	8.0	10.0	6.1	2.6	1.9	1.9	1.8	3.8	10.5	4.8	3.5	3.4	6.8	4.2
$\lambda \cdot W$	2.49	1.39	3.48	1.65	0.50	1.14	0.74	0.74	0.69	1.50	1.79	0.40	1.69	1.47	2.91	1.71
L	2.50	1.40	3.49	1.66	0.50	1.15	0.74	0.74	0.71	1.51	1.81	0.40	1.71	1.47	2.94	1.73

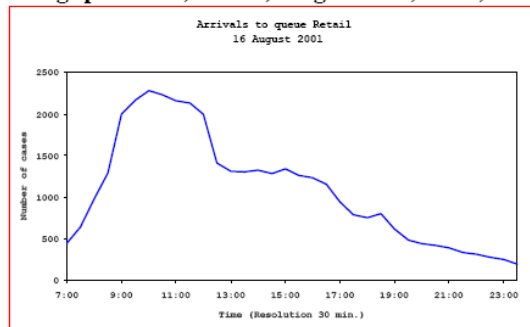
Date	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
λ	35338	15533	7530	40534	35493	34070	34005	32512	13100	5909	1558	43980	38163	38416	40284
W	5.4	27.6	8.1	3.0	2.1	2.1	3.2	3.5	2.3	6.4	37.0	6.5	2.7	2.5	3.2
$\lambda \cdot W$	2.19	4.96	0.71	1.41	0.87	0.83	1.25	1.30	0.35	0.44	0.67	3.29	1.18	1.11	1.47
L	2.20	4.97	0.71	1.42	0.88	0.84	1.27	1.31	0.37	0.44	0.67	3.30	1.20	1.12	1.48

תשובה: חוק Little (מתקיים) לא מתקיים (צפוי/לא צפוי) (סמנו בעיגול את התשובה הנכונה).
הסבר:

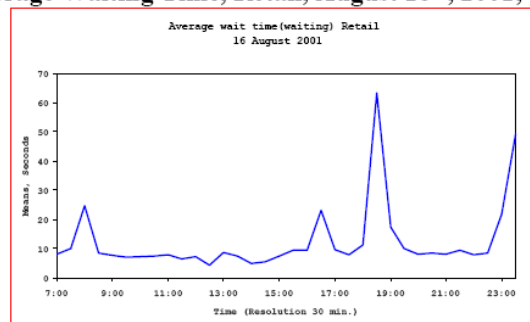
גרף 1 מאשש את קיומו של חוק Little ברזולוציה של ימים. בסוף כל יום מוקד השרות נסגר ולכן ברזולוציה זו אנו מצפים שחוק Little יתקיים: גירסת אופק סופי המתחיל ומסתיים ריק.

Little's Law for Retail calls, August 16th, 2001: US Bank

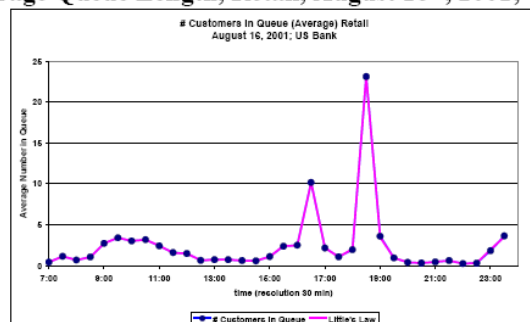
λ : Throughput Rate, Retail, August 16th, 2001; US Bank



W: Average Waiting Time, Retail, August 16th, 2001; US Bank



L: Average Queue Length, Retail, August 16th, 2001; US Bank



Time	7:00	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00	12:30	13:00	13:30	14:00	14:30	15:00
λ	443	639	987	1291	1998	2166	2278	2231	2158	2135	2000	1408	1311	1303	1323	1285	1340
W	1.7	3.2	1.2	1.5	2.4	2.8	2.4	2.6	2.0	1.3	1.3	0.8	1.0	1.0	0.8	0.8	1.5
$\lambda * W$	0.42	1.14	0.68	1.06	2.72	3.42	3.01	3.18	2.44	1.55	1.47	0.64	0.72	0.72	0.62	0.59	1.09
L	0.42	1.14	0.68	1.06	2.72	3.40	3.02	3.17	2.41	1.59	1.48	0.64	0.72	0.72	0.62	0.57	1.11

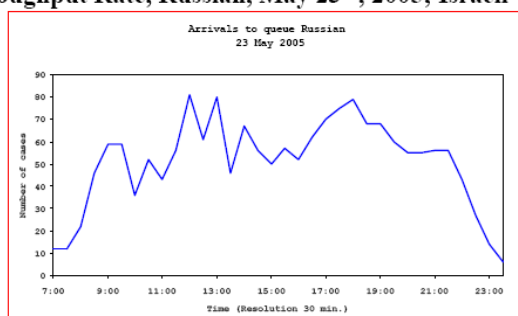
Time	15:30	16:00	16:30	17:00	17:30	18:00	18:30	19:00	19:30	20:00	20:30	21:00	21:30	22:00	22:30	23:00	23:30
λ	1258	1235	1157	942	788	752	803	619	485	437	421	386	336	311	274	251	193
W	3.5	3.6	15.8	4.2	2.4	4.9	51.9	10.0	3.5	1.7	1.3	2.1	3.3	1.4	2.0	14.3	32.6
$\lambda * W$	2.422	2.45	10.2	2.173	1.06	2.05	23.16	3.43	0.95	0.41	0.314	0.44	0.62	0.24	0.30	2.00	3.50
L	2.37	2.49	10.17	2.16	1.07	1.94	23.11	3.59	0.95	0.40	0.31	0.45	0.62	0.24	0.30	1.83	3.63

תשובה: חוק Little (מתקיים/לא מתקיים; צפוי/לא צפוי) סמנו בעיגול את התשובה הנכונה).
הסבר:

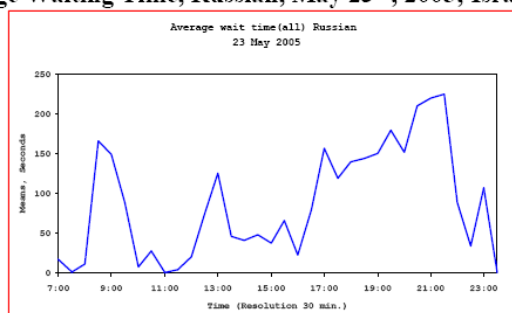
גרף 2 מאשש את קיומו של חוק Little גם ברזולוציה של חצאי שעות, מקרה זה הוא מפתיע, אך מתקיים כיוון שהמערכת גדולה ומגיעה מהר למצב יציב, וכן בגלל שזמני השרות וזמני ההמתנה קצרים (דקות) בהרבה מהרזולוציה בה אנו בוחנים את המערכת: גרסת מצב יציב.

Little's Law for Russian calls, May 23rd, 2005: Israeli Telecom

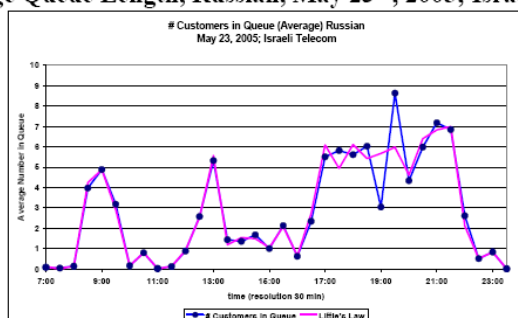
λ : Throughput Rate, Russian, May 23rd, 2005; Israeli Telecom



W : Average Waiting Time, Russian, May 23rd, 2005; Israeli Telecom



L : Average Queue Length, Russian, May 23rd, 2005; Israeli Telecom



Time	7:00	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00	12:30	13:00	13:30	14:00	14:30	15:00
λ	12	12	22	46	59	59	36	52	43	56	81	61	80	46	67	56	50
W	16.9	1.3	11.4	166.0	148.9	88.7	7.9	27.4	0.7	3.9	20.3	74.9	125.4	46.3	41.4	47.9	37.7
$\lambda * W$	0.11	0.01	0.14	4.24	4.88	2.91	0.16	0.79	0.02	0.12	0.91	2.54	5.57	1.18	1.54	1.49	1.05
L	0.08	0.04	0.14	3.97	4.88	3.18	0.16	0.79	0.02	0.12	0.88	2.57	5.32	1.44	1.36	1.67	1.00

Time	15:30	16:00	16:30	17:00	17:30	18:00	18:30	19:00	19:30	20:00	20:30	21:00	21:30	22:00	22:30	23:00	23:30
λ	57	52	62	70	75	79	68	68	60	55	55	56	56	43	27	14	6
W	65.7	22.4	79.2	156.6	118.6	139.3	143.6	150.2	179.2	151.3	209.5	219.5	224.7	88.4	33.7	107.0	0.7
$\lambda * W$	2.08	0.65	2.73	6.09	4.94	6.11	5.42	5.68	5.97	4.62	6.40	6.83	6.99	2.11	0.51	0.83	0.00
L	2.13	0.62	2.34	5.51	5.82	5.61	6.03	3.04	8.63	4.34	5.99	7.18	6.85	2.61	0.51	0.83	0.00

תשובה: חוק Little מתקיים (לא מתקיים) צפוי לא צפוי (סמנו בעיגול את התשובה הנכונה).
הסבר:

גרף 3 מראה לנו שאכן ברזולוציה של חצאי שעות, חוק Little לא תמיד מתקיים. הסיבה שהוא לא מתקיים כאן היא שמקרה זה מתאר מוקד קטן העובד בעומס גבוה. במוקד קטן זה יש לקוחות הממתינים יותר מחצי שעה, ולכן ברזולוציה שכזו יש השפעה הדדית של חצאי שעות עוקבים הגורמים לנוסחת Little לא להתקיים.

1.2.2. עבור המקרים בהם נוסחת Little לא מתקיימת, הציעו שתי אלטרנטיבות שסביר שתעבודנה, המקשרות בין קצב מופע, מספר השיחות במערכת וזמן שהייה במערכת.

תשובה:

לריאליזציה בודדת ישנן שתי אפשרויות:

אפשרות 1: נעמיד פנים שהמערכת ריקה בתחילת כל אינטרוול ובסופו. לצורך כך עלינו לבצע תיקונים לקצב המופע λ ולממוצע משך שהייה במערכת $E[W]$:

קצב הגעה $\hat{\lambda}$: בכל אינטרוול נספור את כל השיחות ששהו זמן מסוים במערכת באותו אינטרוול, כלומר, נספור גם את השיחות שהגיעו למערכת במהלך האינטרוול וגם כאלו שהגיעו לפני תחילת האינטרוול אך טרם יצאו מהמערכת.

ממוצע משך שהייה $E[\hat{W}]$: בכל אינטרוול, משך שהייה של כל שיחה יחושב רק על סמך משך שהייה שחל בתוך האינטרוול. כלומר, משך שהייה של שיחות שנכנסו למערכת לפני תחילת האינטרוול יחושב רק מתחילת האינטרוול ומשך שהייה של שיחות שעזבו את המערכת אחרי סוף האינטרוול יחושב רק עד סוף האינטרוול.

לסיכום: נתייחס לכל שיחה שנכנסה למערכת לפני תחילת האינטרוול כאילו הגיעה בדיוק בתחילת האינטרוול וכל שיחה שיצאה מהמערכת לאחר סיום האינטרוול כאילו יצאה בדיוק עם סיום האינטרוול.

אפשרות 2: Remaining Work in the System:

נשתמש בפונקציה $V = \{V(t), t \geq 0\}$ כאשר $V(t)$ מוגדרת להיות שארית העבודה במערכת בזמן t . $V(t)$ זהו למעשה סכום על שארית משך שהייה שנותר לכל השיחות שנמצאות במערכת בזמן t . כלומר, הגעה חדשה מעלה את $V(t)$ במשך שהייה של אותה הגעה, ובכל יחידת זמן שחולפת הערך של $V(t)$ קטן בדיוק כמספר הלקוחות ששוהים במערכת כפול האורך של יחידת הזמן. נניח כי $t_1 < t_2$ אזי:

א. אם $V(t_1) = V(t_2)$ אז באינטרוול $[t_1, t_2]$, $L = \lambda W$.

ב. כללית, ההפרש בין λW ל- L ניתן ע"י הנוסחה: $\lambda W - L = \frac{V(t_2) - V(t_1)}{t_2 - t_1}$

לממוצע של כמה ריאליזציות:

ניתן להשתמש בנוסחה לחישוב ה-offered-load, שבעצם מהווה אנלוג לנוסחת Little במערכת עם דינמיקה תלוית-זמן:

$$L(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(u) P(W > t - u) du$$

כאשר $L(t)$ – הוא ממוצע מספר האנשים במערכת בזמן t , W – משתנה מקרי המתאר את זמן שהייה במערכת, ו- $\lambda(u)$ – קצב המופע בזמן u .

שאלה 2 – תרגילי בית (10 נקודות)

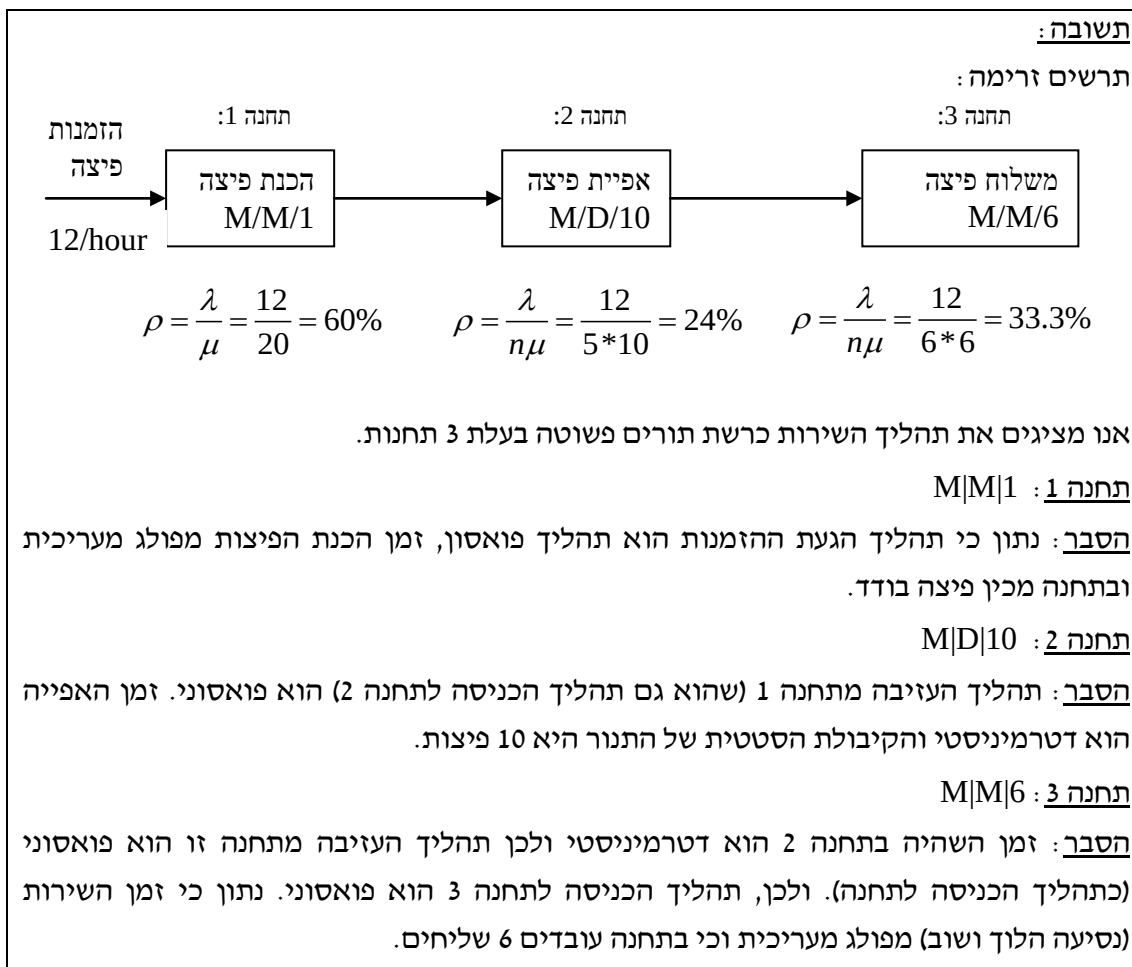
חלק 1 – "Anonymous Pizza"

בפיצרייה מסוימת ניתן לתאר את תהליך הגעת ההזמנות לפיצה באמצעות תהליך פואסון עם קצב של 12 הזמנות בשעה.

בפיצרייה מועסק מכין פיצות בודד, אשר עלות העסקתו הינה \$10 לשעה, המכין בממוצע פיצה אחת כל 3 דקות. זמן הכנת הפיצות מפולג מעריכית. לאחר הכנת הפיצה, היא מוכנסת לתנור בעל קיבולת של 10 פיצות, וזמן אפייתה הוא 12 דקות בדיוק. בפיצרייה צוות של 6 שליחים וזמן משלוח (הלוך ושוב) מפולג מעריכית עם ממוצע של 10 דקות. זמן נסיעה לכיוון אחד שווה למחצית זמן נסיעה הלוך ושוב, ונניח לפשטות כי גם זמן זה מפולג מעריכית. עלות העסקת שליח הינה \$8 לשעה. זמני הכנת הפיצות וזמני המשלוח בלתי תלויים.

הפיצרייה פועלת במדיניות לפיה היא מתחייבת לספק את הפיצה המוזמנת תוך 40 דקות מקבלת ההזמנה (תחילת הכנת הפיצה), ובמקרה של סטייה ממדיניות זו הלקוח מפוצה ע"י הוזלה של \$2 במחיר הפיצה.

2.1.1 שרטטו דיאגרמת זרימה לתהליך המתואר לעיל (Process Flow Diagram), החל מהגעת הזמנה ועד לשליחתה ללקוח. תארו כל תחנה באמצעות המודל המתמטי המתאים לה, תוך הסבר מתאים.



2.1.2 איזו פעולה מהווה את צוואר הבקבוק בתהליך? הסבירו בדיוק ככל שתוכלו.

תשובה:

הקיבולת של תחנה 1 היא 20 פיצות לשעה, של תחנה 2 היא 50 פיצות לשעה ושל תחנה 3 היא 36 פיצות לשעה. קצב ההגעה לכל אחת מהתחנות זהה ולכן תחנה 1, שלה הקיבולת הנמוכה ביותר, היא צוואר הבקבוק.

2.1.3 חשבו את ההסתברות כי לקוח יפוצה עקב איחור בהגעת פיצה.

לצורך החישוב, היעזרו בחומר המופיע בעמודים 11-12, הכולל: נספח שהופיע בתרגיל הבית והעמודים הרלוונטיים שנלקחו מההרצאות. הסבירו כל שלב בחישוביכם. **אין צורך בחישובים מספריים - מספיק שימוש בנוסחאות הרלוונטיות והצבת הפרמטרים בהן.**

תשובה:

זמן שהיה בתחנה 2 הוא 12 דקות.

נסמן:

X = זמן שהיה בתחנה 1 (תור $M|M|1$)

$$X \sim \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{\mu(1-\rho_1)} = \frac{1}{8} \text{ hour}\right) = \exp(8)$$

Y = זמן המתנה בתור לתחנה 3 (תור $M|M|6$)

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{w.p. } 1 - E_{2,N} \\ \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{n\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho_3} \text{ hour}\right) = \exp(24) & \text{w.p. } E_{2,N} \end{cases}$$

Z = זמן משלוח (זמן שהיה בתחנה 3)

$$Z \sim \exp\left(\text{mean} = 5 \text{ minutes} = \frac{1}{12} \text{ hour}\right) = \exp(12)$$

(הנצילות בתחנה 2 נמוכה ולכן נניח כי אין תור לתחנה זו, כלומר פיצה מוכנסת לתנור מיד בתום הכנתה בתחנה 1).

$$\begin{aligned} P(X + 12 + Y + Z > 40) &= P(X + Y + Z > 28) = \\ &= P(\underbrace{X + Z}_{\text{sum of two exponential random variables}} > 28) * P(Y = 0) + P(\underbrace{X + Y + Z}_{\text{sum of three exponential random variables, first scenario}} > 28 | Y > 0) * P(Y > 0) \\ &= 0.064 * 0.982 + 0.093 * 0.018 = 0.065 \end{aligned}$$

Sum of two exponential random variables.

Assume that $X \sim \exp(\lambda_1)$, $Y \sim \exp(\lambda_2)$, X and Y are independent and $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Then straightforward calculations provide us with the following cumulative distribution function of $X + Y$:

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 x}.$$

Sum of three exponential random variables.

Assume that $X \sim \exp(\lambda_1)$, $Y \sim \exp(\lambda_2)$, $Z \sim \exp(\lambda_3)$, X , Y and Z are independent and $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Then the cumulative distribution function of $X + Y + Z$ is given by:

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 x} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{-\lambda_3 x}.$$

M/M/1: Sojourn Time

Sojourn time is **exponentially** distributed:

$$W \stackrel{d}{=} \exp \left(\text{mean} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} \left[1 + \frac{\rho}{1-\rho} \right] \right).$$

Proof: By PASTA and the memoryless-property of Exponentials,

$$W \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^N X_i, \quad X_i \sim \exp(\mu) \text{ i.i.d.},$$

$N \triangleq L + 1 \stackrel{d}{=} \text{Geom}(1 - \rho)$ (from 1);
 N and $\{X_i\}$ are all independent.

Conclude by recalling: Geometric sum of iid Exponentials is Exponentially distributed. (The parameter is calculated via Wald.)

Aside: The latter property is essentially Poisson-Splitting. A self-contained proof can be give via *Moment generating functions*:

$$\begin{aligned} \phi_W(t) &\triangleq \mathbb{E}[\exp\{tW\}] = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ t \cdot \sum_{i=1}^N X_i \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left\{ t \cdot \sum_{i=1}^N X_i \right\} \middle| N \right] \right] \\ &\quad (X_i \text{ independent with } \mathbb{E}[\exp\{tX_i\}] = \frac{\mu}{\mu-t}) \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\mu}{\mu-t} \right)^N \right] = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\rho) \rho^{k-1} \left(\frac{\mu}{\mu-t} \right)^k \\ &= \frac{\mu(1-\rho)}{\mu-t} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu\rho}{\mu-t} \right)^k = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)-t} \\ &= \phi_{\exp(\mu(1-\rho))}(t). \end{aligned}$$

M/M/n Queue: Properties

Erlang-C Formula (1917) for the Delay probability:

$$P\{W_q > 0\} \triangleq E_{2,n} = \sum_{i \geq n} \pi_i = \frac{R^n}{n!} \frac{1}{1 - \rho} \cdot \pi_0.$$

Erlang-C computation: via recursion, see Erlang-B below.

Erlang-C approximations: important later in course.

Number-in-queue:

$$P\{L_q = i\} = E_{2,n} \cdot (1 - \rho)\rho^i, \quad i > 0,$$

or

$$L_q = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Geom}_{\geq 0}(1 - \rho) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Waiting time distribution:

$$\frac{W_q}{1/\mu} = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Exp}\left(\text{mean} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Compare with M/M/1!

Departure process: Poisson(λ) in steady-state.

Proof via reversibility, as with M/M/1.

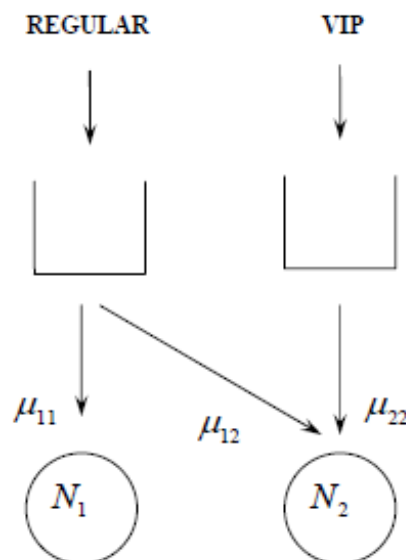
חלק 2 – "N-Model"

למוקד טלפוני מגיעים שני סוגי לקוחות (שיחות) – לקוחות רגילים (סוג מס' 1) ולקוחות VIP (סוג מספר 2). נגדיר את הערכים הבאים:

- $\lambda_1(t)$ - קצב הכניסה של לקוחות רגילים (סוג 1).
- $\lambda_2(t)$ - קצב הכניסה של לקוחות VIP (סוג 2).
- N_1 - מספר השרתים בתחנה מספר 1.
- N_2 - מספר השרתים בתחנה מספר 2.

השרתים בתחנה מספר 1 יכולים לטפל רק בלקוחות רגילים בקצב μ_{11} . השרתים בתחנה מספר 2 יכולים לשרת את שני סוגי הלקוחות. את הלקוחות הרגילים הם משרתים בקצב μ_{12} ואת לקוחות ה-VIP בקצב μ_{22} . במערכת אין נטישות. המוקד פועל ע"פ מדיניות **Preemptive Resume**, כלומר, כאשר מגיע לקוח VIP למערכת ויש לקוח רגיל בשירות, השירות של הלקוח הרגיל יופסק ויתחדש מאותה נקודה שבה הסתיים כאשר לא יהיו עוד לקוחות VIP במערכת. לא ייתכן שיש לקוח רגיל בשירות בתחנה 2 כל עוד יש לקוחות VIP במערכת.

להלן תרשים המתאר את המערכת:



נגדיר: $Q_i(t)$ מספר הלקוחות במערכת מסוג $i, i=1,2$. כאשר: $Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t)$
 $Q_0(t) = 0$

נבחן שתי מדיניות ניתוב עבור לקוחות רגילים:

1. אם שתי התחנות פנויות לקבל לקוחות רגילים הם מנותבים לתחנה מספר 1.
2. אם שתי התחנות פנויות לקבל לקוחות רגילים הם מנותבים לתחנה מספר 2.

2.2.1 כתבו את המשוואות הדיפרנציאליות המאפיינות את $Q_1(t)$ ו- $Q_2(t)$, עבור שתי מדיניות הניתוב.

תשובה:

First policy:

$$\frac{dQ_1}{dt} = \lambda_1 - \mu_{11}(Q_1 \wedge N_1) - \mu_{12}[(Q_1 - N_1)^+ \wedge (N_2 - Q_2)^+]$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \lambda_2 - \mu_{22}(Q_2 \wedge N_2).$$

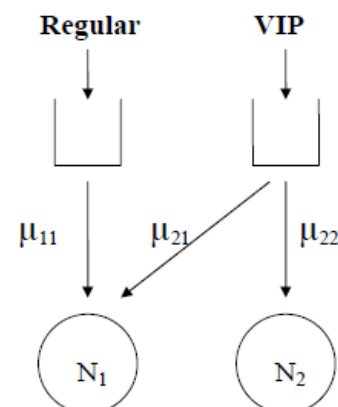
Second policy:

$$\frac{dQ_1}{dt} = \lambda_1 - \mu_{12}(Q_1 \wedge (N_2 - Q_2)^+) - \mu_{11}[(Q_1 - (N_2 - Q_2)^+)^+ \wedge N_1]$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \lambda_2 - \mu_{22}(Q_2 \wedge N_2).$$

2.2.2 הניחו כי כעת המוקד עובד ע"פ מודל אחר שבו שרתים מתחנה 2 יכולים לטפל אך ורק בלקוחות VIP ושרתים מתחנה 1 יכולים לטפל בשני סוגי הלקוחות. הניחו כי השרתים בתחנה מספר 1 נותנים עדיפות ללקוחות VIP. אם לקוח VIP מגיע ויש שרתים פנויים בשתי התחנות הוא ינותב לתחנה מספר 2. הניחו גם כי קצב השירות של לקוחות VIP זהה בשתי התחנות וכן כי כמו קודם, מדיניות המוקד הינה *Preemptive Resume*. שרטטו תרשים המתאר את מבנה המערכת (כמופיע לעיל):

תשובה:



2.2.3 רשמו את המשוואות הדיפרנציאליות עבור $Q_1(t)$ ו- $Q_2(t)$ ע"פ המדיניות החדשה :

תשובה:

$$\frac{dQ_1}{dt} = \lambda_1 - \mu_1 \left[Q_1 \wedge (N_1 - (Q_2 - N_2)^+)^+ \right]$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \lambda_2 - \mu_2 (Q_2 \wedge (N_1 + N_2)).$$

2.2.4 השוו את המודל המתואר בסעיף זה עם המודל המתואר בסעיף 2.2.1. מתי כדאי להשתמש בכל אחד מהמודלים הנ"ל?

תשובה:

המודל בסעיף 2.2.1 שם דגש על **נצילות השרתים**. על מנת להבטיח שהשרתים המעניקים שירות ללקוחות VIP מנוצלים כראוי אנו מוסיפים להם לקוחות רגילים. המודל בסעיף זה שם דגש על **רמת השירות** שמקבלים לקוחות VIP, כאשר הם מנותבים לשרתים המעניקים שירות ללקוחות הרגילים במידה והינם נאלצים לחכות לשרתי ה- VIP.

שאלה 3 – יישום (20 נקודות)

"בנק ישראלי" (סיפור מהחיים)

אחת לכמה חודשים משיקה מחלקת השיווק של "בנק ישראלי" מבצעים, מסלולים או תוכניות חדשות. כל השקה גוררת אחריה עליה בכמות השיחות המגיעות למוקד הטלפוני של הבנק. לאחר כל השקה כזו מנהל הבנק פונה אל מנהל המוקד בטענות על אי עמידה ביעד השירות שהגדיר הבנק ולפיו נדרש כי: **80% מהשיחות יענו תוך 50 שניות**. בתגובה, מנהל המוקד מעוניין לפתח כלי שיאפשר לו לחזות כיצד תוספת בכמות השיחות **החודשית** תשפיע על רמת השירות **החודשית**. כלי כזה, לדבריו, יאפשר לו להגיב על טענות ההנהלה ולהתריע מבעוד מועד שתוספת צפויה בכמות השיחות החודשית, עקב השקת מבצע או תוכנית חדשה, וזאת ללא שינוי באיזו המוקד, תגורר ירידה ברמת השירות (למשל, % הנענים תוך 50 שניות). מנהל המוקד הטלפוני פונה אל שרית, בוגרת הקורס "הנדסת מערכות שירות", על מנת שתעזור לו לתכנן כלי כזה.

3.1 בשלב הראשון שרית שכנעה את מנהל המוקד כי שימוש בנתונים ברמה חודשית וחיזוי רמת השירות הצפויה כממוצע חודשי הינו בעייתי ביותר. נמקו מדוע.

תשובה:

חישוב רמת השירות כממוצע על פני כל החודש מסתיר הרבה מאוד מידע (כאמור, "הממוצע אינו מספר את כל הסיפור"). ייתכן כי רמת השירות החודשית הממוצעת תהיה סבירה אך עשויים להיות ימים (או שעות) שבהם רמת השירות תהיה נמוכה מאוד, בעוד שבימים אחרים היא תהיה גבוהה מאוד. מופע שיחות, למשל, יכול להשתנות באופן דרמטי מיום ליום ואפילו תוך כדי יום. לכן עדיף לחשב את רמת השירות בכל שעה ע"פ נתונים שעתיים, ואף לבחון את התוצאות ברזולוציה זו.

3.2. מנהל המוקד מסביר כי בהינתן רמת השירות הרצויה, חישוב כמות השרתים הדרושים על מנת לעמוד ברמת השירות, מתבסס על מודל Erlang C. הסבירו למנהל המוקד מדוע מודל זה אינו מתאים והציעו מודל מתאים יותר, מתוך המודלים שנלמדו בכיתה. הניחו כי עלות השרתים מהווה כ- 75% מעלויות המוקד, והסבירו מדוע עובדה זו מחזקת את טיעונכם.

תשובה:

מודל Erlang C מתבסס על ההנחה כי אין נטיות. מודל מתאים יותר יהיה Erlang A, הלוקח בחשבון נטיות. הנטיות במודל Erlang A מביאות לכך שזמן ההמתנה עבור לקוחות שאינם נוטים מתקצר והסיכוי לקבלת שירות תוך 50 שניות גדל (The “fittest survive” and wait less, much less). מכיוון שרמת השירות נקבעת על-פי אחוז הלקוחות שנענים תוך 50 שניות שימוש ב-Erlang A ישיג את רמת השירות הרצויה עם פחות שרתים מאשר היו נדרשים ע"פ Erlang C (אבל, כמובן, מאבדים לקוחות נוטים). מאחר ועלויות השרתים הן העלויות המשמעותיות ביותר, צמצום מספר השרתים יצמצם משמעותית את עלויות המוקד.

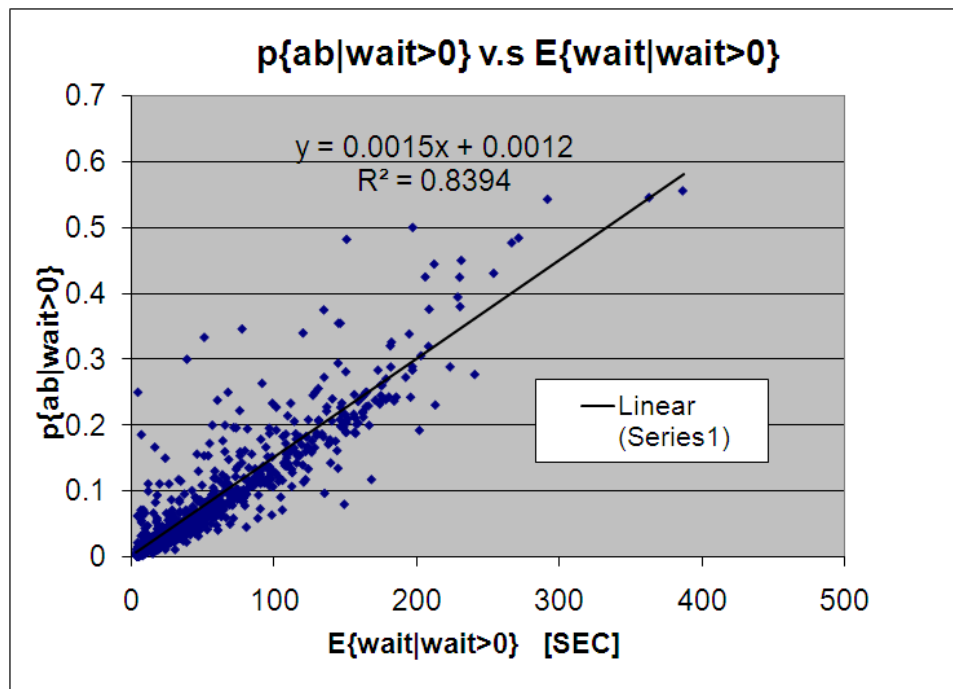
3.3. הסבירו מדוע המדד לרמת השירות שבו משתמש המוקד – אחוז הלקוחות הנענים תוך פחות מ-50 שניות, הינו בעייתי.

תשובה:

המדד לרמת שירות שבו משתמש המוקד – אחוז הנענים תוך 50 שניות, הינו בעייתי מפני שאינו לוקח בחשבון כלל את הנוטים. ייתכנו מצבים אבסורדיים, למשל, שירות לפי LCFS (Last Come First Served) שבהם רמת השירות על פי אחוז הנענים תוך X שניות תהיה גבוהה אך יהיו לקוחות רבים שינטשו ויאלצו לחכות זמן רב בטרם נטישה (כלומר, גם ימתינו זמן רב וגם לא יקבלו שירות).

3.4. מתברר לכם כי המוקד אינו אומד את הסבלנות הממוצעת של לקוחותיו אלא מניח שרירותית כי ערכה הוא 90 שניות.

בסוף חודש ינואר, עבור כל חצי שעה משעות היום (סה"כ כ-914 חצאי שעות, לאחר ניפוי חריגים) חושבו ההסתברות לנטוש בהינתן שהייתה המתנה ותוחלת ההמתנה בהינתן שהייתה המתנה. על סמך הגרף שהתקבל, מהי הסבלנות הממוצעת בחודש ינואר? האם סבלנות זו קרובה לערך שנקבע ע"י המוקד?



תשובה:

על פי הגרף:

$$P\{Ab | wait > 0\} \approx 0.0015 * E\{Wait | wait > 0\}$$

$$\Rightarrow \text{Average Patience} = \frac{1}{0.0015} = 666.667_{\text{sec}}$$

הסבלנות הממוצעת המתקבלת היא 666.67 שניות, מעל 11 דקות! ערך זה רחוק מאוד מהערך שנקבע ע"י המוקד - דקה וחצי. בנוסף, 11 דקות הוא ערך **ממוצע**, כך שסביר לקבל גם ערכים גבוהים יותר.

3.5. כעת שרית מעוניינת לבנות קובץ אקסל שיקבל כקלט את כמות השיחות הנכנסות, משך השירות הממוצע, הסבלנות הממוצעת ומספר השרתים במוקד בכל שעה ויוציא כפלט את רמת השירות (%) הלקוחות הנענים תוך פחות מ-50 שניות). לצורך כך בחנה שרית את שעה 7:00 ביום ב', 29.8.2011. יום זה הוגדר ע"פ מנהל המוקד כיום מייצג, ללא חגים או אירועים מיוחדים והשעה שנבחרה הייתה שעה ממוצעת ביום זה מבחינת העומס המוצע ונצילות השרתים. בשעה זו משך השירות הממוצע הינו 206 שניות (3:26 דקות), הסבלנות הממוצעת שווה בקירוב לפעמיים משך השירות, בשעה זו נכנסו 446 שיחות ומספר העמדות המאושות בשעה זו היה 28. מהי ההסתברות להמתנה באינטרוול זה? לשימושכם מצורפת פונקציית Garnett בסוף נשאלה. (הערה: באותו אופן ניתן ורצוי לנתח גם שעות עמוסות).

תשובה:

ראשית נחשב את ה - Offered load :

$$\lambda = 446$$

$$\mu = \frac{1}{206 / 3600} = 17.475$$

$$R = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{446}{17.475} = 25.52$$

$$\text{כעת, ע"פ הנוסחה } N \approx R + \beta \sqrt{R} \text{ נמצא את } \beta : \beta = \frac{28 - 25.52}{\sqrt{25.52}} = 0.49 \approx 0.5$$

$$\frac{\theta}{\mu} = 0.5 \text{ ולפיכך, מתוך Garnett Delay Function אנו מקבלים כי הסיכוי להמתנה הינו:}$$

$$P\{\text{Wait} > 0\} \approx 0.35$$

3.6. בכיתה נלמדו הקירובים הבאים (עבור מודל $(M / M / n + G)$):

- 0. **QED:** $P\{W_q > 0\} \approx \alpha$, for some $0 < \alpha < 1$;
- 1. **Manager:** $n \approx R + \beta\sqrt{R}$, for some $-\infty < \beta < \infty$;
- 2. **Servers:** Occupancy $\approx 1 - \frac{\beta + \gamma}{\sqrt{n}}$;
- 3. **Customers:** $P\{Ab\} \approx \frac{\gamma}{\sqrt{n}}$, for some $0 < \gamma < \infty$;

$$\gamma = \alpha \cdot \sqrt{\frac{\theta}{\mu}} \cdot [h(\hat{\beta}) - \hat{\beta}] \quad \hat{\beta} = \beta \sqrt{\frac{\mu}{g_0}}$$

g_0 צפיפות הסבלנות ב-0.

$$P\left\{W_q > \frac{t}{\sqrt{n}}\right\} \approx \left[1 + \sqrt{\frac{g_0}{\mu}} \cdot \frac{h(\hat{\beta})}{h(-\beta)}\right]^{-1} \cdot \frac{\bar{\Phi}(\hat{\beta} + \sqrt{g_0\mu} \cdot t)}{\bar{\Phi}(\hat{\beta})}$$

$$P\left\{Ab \mid W_q > \frac{t}{\sqrt{n}}\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{g_0}{\mu}} \cdot [h(\hat{\beta} + \sqrt{g_0\mu} \cdot t) - \hat{\beta}]$$

על סמך נוסחאות אלו חישובה שרית, עבור $T=50$ sec (כאשר $\frac{t}{\sqrt{n}} = T = 50$ sec):

$$[h(\hat{\beta}) - \hat{\beta}] = 0.655$$

$$P\{W_q > T\} = 0.0109$$

$$P\{Ab | W_q > T\} = 0.5804$$

חשבו את רמת השירות הרצויה, כלומר את אחוז השיחות הנענות תוך 50 שניות. הסבירו את חישוביכם.

תשובה:

אנו מחפשים את:

$$P\{Wq \leq T; Sr\}$$

מתקיים:

$$P\{Wq \leq T; Sr\} = 1 - P\{Ab\} - P\{W > T; Sr\} \quad (1)$$

$$P\{Wq > T; Sr\} = P\{Wq > T\} - P\{Wq > T; Ab\} \quad (2)$$

$$P\{Wq > T; Ab\} = P\{Wq > T\} P\{Ab|Wq > T\} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} P\{Wq \leq T; Sr\} &= 1 - P\{Ab\} - [P\{Wq > T\} - P\{Wq > T\} P\{Ab|Wq > T\}] \Leftarrow \\ &= 1 - P\{Ab\} - P\{Wq > T\} [1 - P\{Ab|Wq > T\}] \end{aligned}$$

$$P\{Ab|Wq > T\} = 0.5804 \quad \text{נתון:}$$

$$P\{Wq > T\} = 0.0109$$

$$\gamma = \alpha \sqrt{\frac{\theta}{\mu}} [h(\hat{\beta}) - \hat{\beta}] \approx 0.35 * \sqrt{0.5} * 0.655 = 0.162$$

$$P\{Ab\} = \frac{\gamma}{\sqrt{n}} = \frac{0.162}{\sqrt{28}} = 0.03 = 3\%$$

$$P\{Wq \leq T; Sr\} = 1 - 0.03 - 0.0109(1 - 0.5804) = 0.952 = 95.2\% \quad \text{ובסה"כ:}$$

כלומר, 95.2% מהלקוחות נענים תוך 50 שניות.

3.7. בקורס "הנדסת מערכות שירות" למדה שרית כלי שיכול לחשב את רמת השירות הצפויה בהינתן קצב מופע, משך השירות הממוצע, הסבלנות הממוצעת ומספר השרתים באינטרוול זמן מסוים. כלי זה נקרא 4CC והמנוע המתמטי שלו הוא Erlang A ($M / M / n + M$). ב-Erlang A הסבלנות משפיעה על מדדי הביצועים דרך הממוצע שלה, בעוד שבקירובים הנ"ל הסבלנות באה לידי ביטוי דרך ערך צפיפות הסבלנות ב-0 (בראשית). האם אתם צופים הבדל משמעותי בין התוצאות המתקבלות מחישוב על סמך הקירובים לבין התוצאות שיתקבלו ע"י 4CC הסביר

רמז: צפיפות מ"מ $\exp(\theta)$ נתונה ע"י: $f(t) = \theta e^{-\theta t}$, $t \geq 0$.

תשובה:

אין הבדל בין 2 דרכי החישוב: העובדה שבקירובים אנו משתמשים ב- g_0 וב-Erlang A משתמשים ב- θ , הפרמטר של ההתפלגות אקספוננציאלית, אינה משפיעה על המודל ואינה

משנה את התוצאה מכיוון ש: $f(0) = \theta = g_0 = \frac{1}{\text{Average patience}}$.

3.8 על סמך הנתונים בסעיף 3.5, מהו אחוז הנוטשים? (השתמשו בפונקציית Garnett שבסוף השאלה).

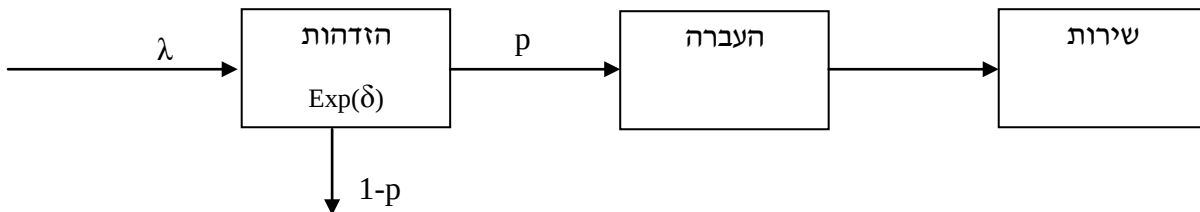
תשובה:

בסעיף 3.1.8 חישבנו כי $\beta \approx 0.5$, $\frac{\theta}{\mu} = 0.5$ וכן נתון כי $N=28$. ולכן נשתמש בפונקציית

GMR(0.5), בנקודה $\beta \approx 0.5$ ונקבל כי $P\{Ab\} \approx 3.2\% \Rightarrow P\{Ab\} * \sqrt{N} \approx 0.17$

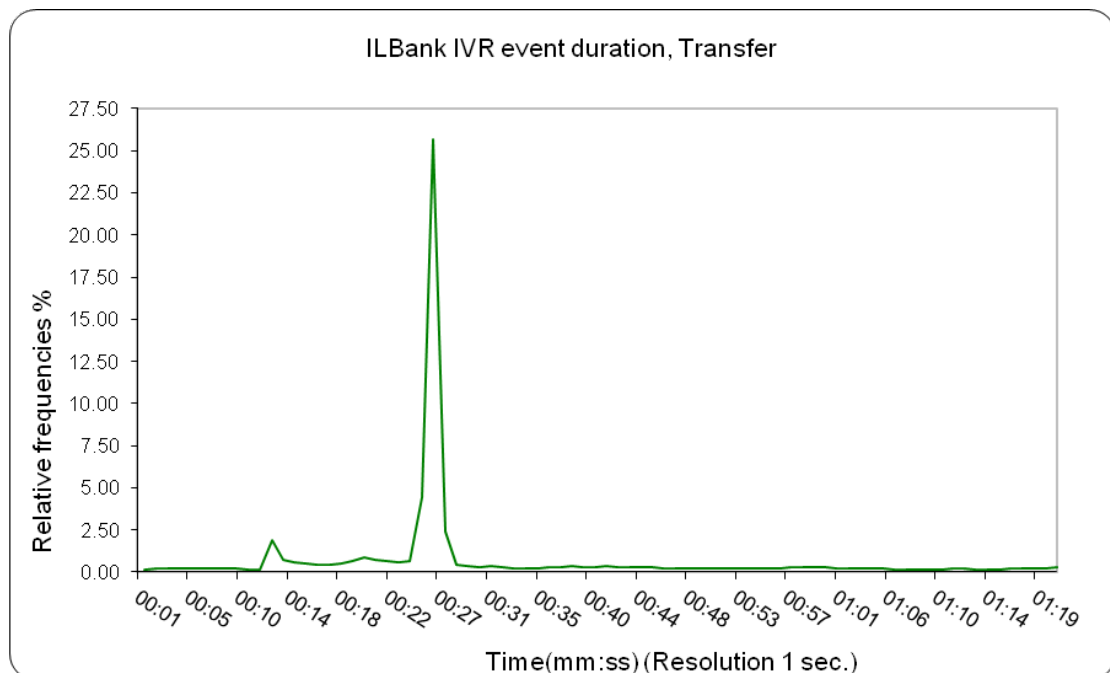
3.9 המוקד הטלפוני של "בנק ישראלי" כולל מערכת מענה קולי

(IVR – Interactive Voice Response). כל הלקוחות המתקשרים למוקד עוברים קודם כל ב-IVR שם הם מבצעים הזדהות, ולאחר מכן יכולים לבחור האם לעבור לקבלת שירות ע"י שרתי המוקד, להמשיך את פעילותם ב-IVR או לצאת מהמערכת. תרשים הזרימה של התהליך שעוברים הלקוחות ב-IVR נראה כך:



נניח שקצב הכניסה למערכת קבוע בזמן, ונסמנו ב- λ .

שלב ההזדהות, מפולג $\exp(\delta)$. אחוז הלקוחות הבוחרים לעבור לשירות ע"י שרתי המוקד הינו p . הגרף הבא מתאר את פונקציית הצפיפות האמפירית של משך שלב ה"העברה". על סמך גרף זה, תנו קירוב טוב ככל שתוכלו להתפלגות משך השלב.



תשובה:

גרף זה שבו שיא אחד משמעותי יחיד בסביבות 27 שניות מרמז על כך שלמשך שלב ההעברה התפלגות דטרמיניסטית. ההסתברות שמשך התהליך יקבל כל ערך השונה מ- 27 שניות נמוכה ביותר.

3.10 איזה מודל מתמטי מתאים למידול מספר הלקוחות הנמצאים בשלב "העברה"? מהן הנחות המודל?

תשובה:

המודל המתאים הוא $M / D / \infty$.

הנחות: 1. הגעות – ע"פ תהליך פואסון עם קצב קבוע λp .

2. קצב שירות דטרמיניסטי.

3. אינסוף שרתים. IVR זו מערכת של שירות עצמי. סביר להניח, כפי שהוזכר

בכיתה, שמספר הקווים מספיק גדול בכדי לתת מענה לכל הלקוחות ולכן כל לקוח

המגיע למערכת מקבל שירות מיידית.

הפלט של שלב "הזדהות" הוא הקלט לשלב "העברה". הגעות לשלב "הזדהות" הינן ע"פ תהליך

פואסון קבוע בזמן, ומכיוון שניתן למדל את שלב זה כ- $M / M / \infty$ גם העזיבות משלב זה הינן

ע"פ תהליך פואסון קבוע בזמן. מאחר שרק p אחוז מהלקוחות ממשיכים לשלב "העברה"

מתקיים פיצול פואסון ולפיכך ההגעות לשלב ההעברה הינן ע"פ תהליך פואסון עם קצב קבוע

λp .

3.11 הניחו כעת כי קצב הכניסה למערכת משתנה בזמן ונתון ע"י $\lambda(t)$. ברצוננו לחשב את מספר השרתים הדרושים במוקד. לצורך כך עלינו לחשב את ה – Offered Load בכניסה לשלב השירות. הסבירו כיצד יש לחשב את ה – Offered Load לשלב זה.

תשובה:

תהליך הכניסה לשלב "העברה" הוא פואסוני עם קצב $\lambda(t) * p$, נסמנו $\hat{\lambda}(t)$. מכיוון שמשך השהייה בשלב זה הוא קבוע (עם פרמטר $D \approx 27$ sec) קצב היציאה משלב זה, שהינו גם קצב

הכניסה לשירות הוא $\hat{\lambda}(t - D)$.

תהליך הכניסה לשירות הוא פואסון לא הומוגני בזמן.

נשתמש בנוסחא:

$$R(t) = E[S]E[\lambda(t - S_e)]$$

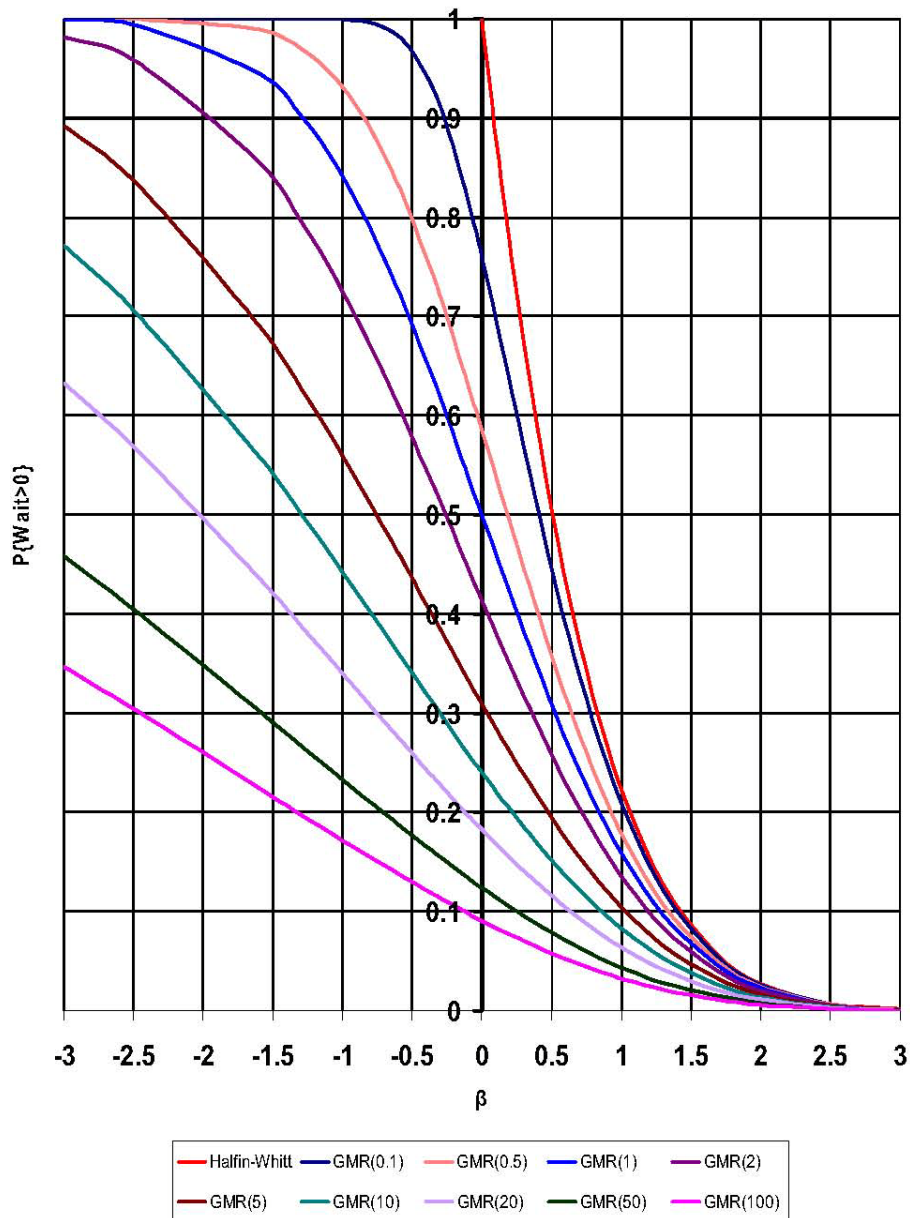
(S_e זוהי תוחלת שארית משך השירות).

כאשר קצב הכניסה הוא $\hat{\lambda}(t - D)$, נקבל:

$$R(t) = E[S]E[\hat{\lambda}(t - D - S_e)]$$

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .

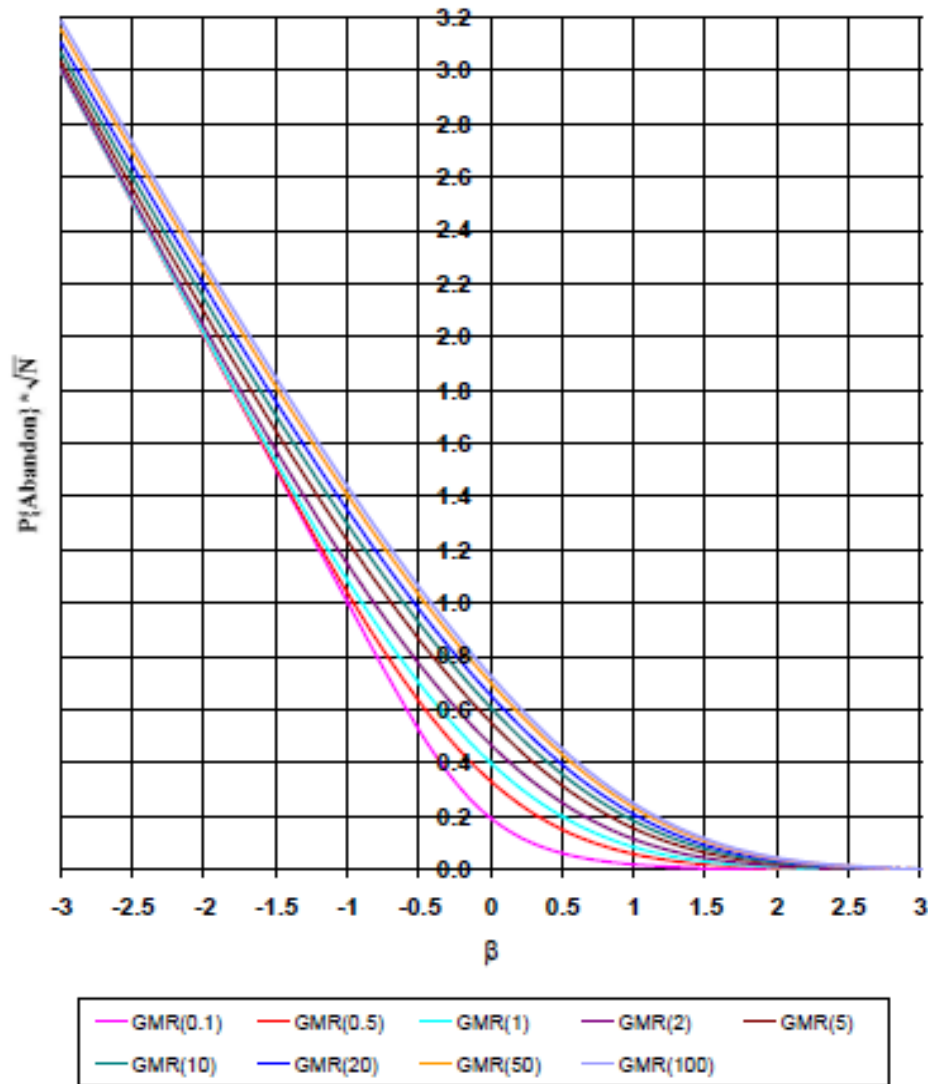


GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\frac{\theta}{\mu} = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

Note: **Erlang-C** = limit of **Erlang-A**, as patience $\uparrow$ indefinitely.

Erlang-A: % Abandonment

$\%Ab \times \sqrt{n}$ vs. β , for varying (im)patience (θ/μ):



Note the behavior: slope $-\beta$, for (relatively) large negative β and over all (im)patience levels. For an explanation, think **ED**: $n = R + \beta\sqrt{R} = R - \gamma R$; hence $\gamma \approx -\beta/\sqrt{R} \approx -\beta/\sqrt{n}$, and γ is $P\{Ab\}$ in the ED-Regime.

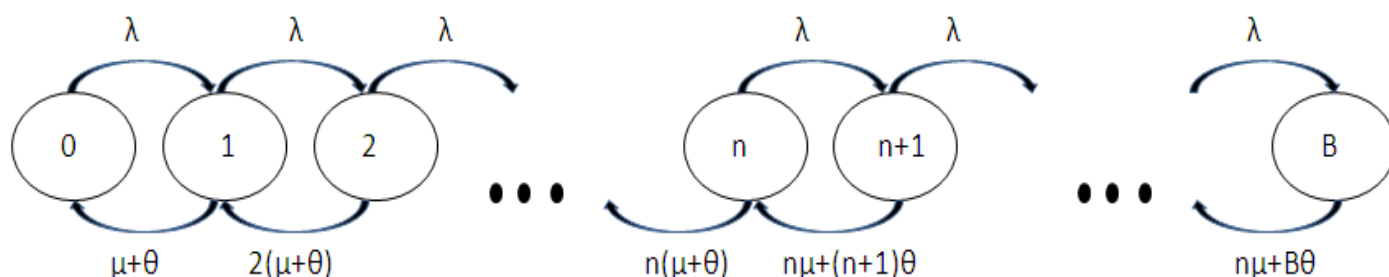
שאלה 4 – תיאוריה (10 נקודות)

4.1 ניתן לבנות מודל מתמטי לאירוע רב נפגעים ע"י שילוב התק"מים של Erlang. הפרמטרים של המודל נתונים ע"י:

- קצב מופע הנפגעים λ (נניח לפשטות כרגע שהוא קבוע).
- מספר המיטות הוא B (מופע כאשר כל המיטות תפוסות מועבר למקום אחר).
- מספר הרופאים הוא n ($B \geq n$).
- משך טיפול ממוצע ע"י רופא $\frac{1}{\mu}$ (אחרי הטיפול ממשיכים בתהליך במקום אחר).
- משך הזמן הממוצע עד מוות $\frac{1}{\theta}$.

כתבו את קצבי הלידה והמוות של התק"מ הרלוונטי על המצבים הבאים:
(שימו לב: ייתכן מוות תוך כדי קבלת טיפול ע"י הרופא).

תשובה:



4.2 התק"מ הנ"ל ארגודי (סופי, אי פריק). נסמן את התפלגותו הסטציונארית ע"י $(\pi_0, \dots, \pi_B)$.

תנו אינטרפרטציה פיזיקאלית מתאימה ל- π_B והסבירו תשובתכם.

תשובה:

נתון כי מופע כאשר כל המיטות תפוסות מעובר למקום אחר, לפיכך, π_B מבטא את אחוז המעברים למקום אחר.

4.3 השתמשו ב- π_i -ים כדי לבטא את קצב התמורות.

תשובה:

$$\sum_{i=0}^B \theta i \pi_i$$

4.4 אלטרנטיבה למודל הסטוכסטי הנ"ל הוא מודל נוזלים, שיכול להביא בחשבון גם קצב מופע משתנה עם הזמן.

נסמן ב- λ_t = קצב מופע הנפגעים בזמן t .

X_t = מספר הנפגעים (החיים) במערכת בזמן t .

לפשטות נניח ש- B שווה אינסוף (אין חסם על מספר המאושפזים).

יתר הפרמטרים לא משתנים: μ, θ, n .

- כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $X_t, t \geq 0$.

- כתבו ביטוי לאחוז הנפטרים על פני תקופת זמן $[0, T]$.

תשובה:

$$\dot{X}_t = \lambda_t - \mu(X_t \wedge n) - \theta X_t$$

$$\frac{\theta \int_0^T X_u du}{\int_0^T \lambda_u du} = \text{אחוז הנפטרים}$$

4.5 בעמוד הבא מצורפת כתבה על יוזמה בריטית שמכוונת להעלות את מאגר האברים להשתלה.

אין צורך לקרוא את הכתבה, די להבין שמטרת היוזמה להשאיר בחיים, באופן מלאכותי, מיתות קליניות, על מנת שתאפשרנה תרומת אברים להשתלה לאחר המוות הקליני.

14/2/2012

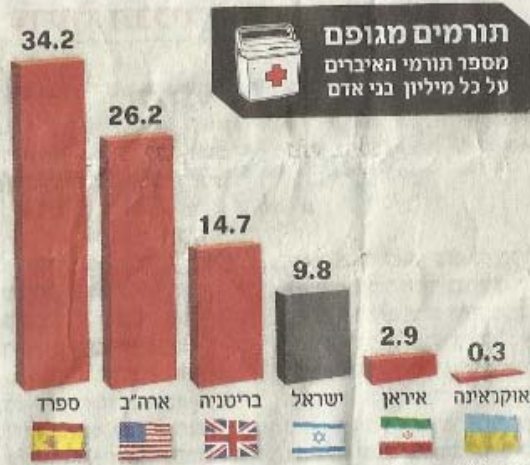
יוזמה בריטית בשל מיעוט השתלות: להחזיק בחיים מי שמת מוות קליני

על רקע הצורך בהגדלת מספר התרומות, מעוניינת ההסתדרות הרפואית הבריטית ברפורמה שנויה במחלוקת

רות, נוכעים מהברלים בחקיקה ובנהלים, ממירת הכשרתם של הרופאים וממוסכמות חברתיות. ביפאן לדוגמה, קיימת סלידה גורפת מתרומת איברים שמקורה בגישת הבודהיזם והשינטו למוות ולטיפול במנוח.

בספרד, לעומת זאת, גר" לו שיעורי תרומת האיברים מאז שנת 1989 ב-142% והם נחשבים כיום לגבוהים ביותר בעולם. הסיבה לכך היא פעילותו של ארגון לאומי לתרומות איברי רימ (ONT) ב-139 יחידות טיפול נמרץ וחדרי מיון בבתי חולים ברחבי המדינה.

בין היתר, עוסק הארגון באיתור מקרים שבהם קיים פוטנציאל לתרומת איברים ובשכנוע המשפחות שאיבדו את יקיריהן. בנוסף, במערכת הבריאות הסיפרדית משתמשים בהגדרה "הנחת הסכמה" (presumed consent), שבה מניחים שהמנוח הסכים לתרומת איברים אלא אם הוא או בני משפחתו הצהירו אחרת קודם לכן.



לאחר הפסקת פעילות הלב והריאה, ושניתן להוציא את לבו ולהשתילו בחולה אחר קשה להבנה ודורשת הבהרות רבות, נאמר ברו"ח. כיום נלקחים מתורמים כאלה רק ככדים, כליות וריאות. הפערים בהיקף התרומות בין בריטניה למדינות אחרות

טיפול מיותר שלא מועיל לרוב. אחת מההצעות הקיצוניות ברו"ח היא שלאחר קבלת אישור ממשפחת המת, רופאים יוכלו להוציא מגופו את הלב ולשמור עליו פעיל כדי להשתיל אותו בחולה הזקוק ללב חירש. "העובדה שחולה מוכרז כמת

להוציא את איבריהם כדי שישמשו לתרומות.

בדרך כלל, מונעים חר" לים כאלה לפרק זמן קצר, כדי שקרוביהם יוכלו להיפרד מהם. בשיטת שימור האיברים יושם החולה כאשר ברור שהוא על סף מוות, כשהכוונה הברורה היא קידום תרומת איברים. הליך זה הוביל לעלייה של 50% במספר האיברים הזמינים להשתלה כאשר בוצע בשני בתי חולים בבריטניה ב-1988, אולם הופסק ב-1994 משום שמשרד הבריאות של בריטניה קבע כי הוא לא חר" קי. יש חשש שההנשמה המדוברת שיוגדרו "צמחים", נוסף על כך, נראה שיש חוסר אתיקה בהעניית טיפול לחולים מסוימים כדי שאחרים יפיקו ממנו תועלת.

ניג'ל היטון, מרצה לכירורגיה השתלות בקינגס קולג' בלונדון, אומר שהשיטה נמצאת בשימוש בארה"ב ובספרד. "לא נשים יש נקיפות מצפון. הבעיה היא שמאריכים חיים או מעניקים

דניס קמבל

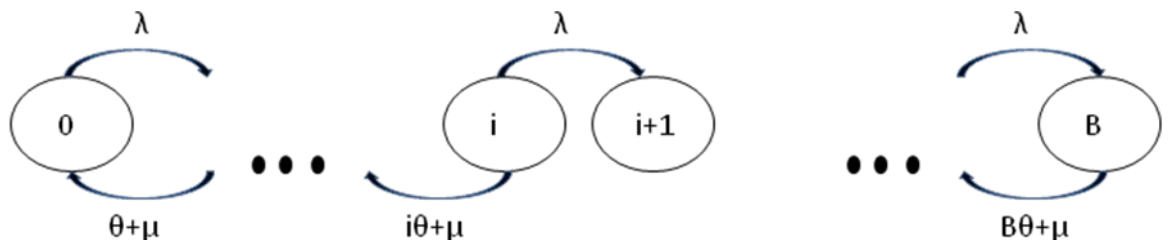
גריאן

ו"ח מטעם ההסתדרות הרפואית הבריטית מע" לה את השאלה מהו הג" בול שיוצב בפני רופאים המעוניינים להציל חיי מטופלים הסובלים מכלל בתפקוד איברי ריאהם. ברו"ח פטורים ראשי הסתדרות הרופאים כי יש צורך להחזיק חולים בחיים כדי שישמשו תורמי איברים בשעת הצורך, וכי אפי שר להוציא לבבות של תינוקות ולהוציא איברים מתורמים בסיו" כון גבוה, כחלק ממנהפכה רפואית ואתית שמטרתה להקל על המנוח טור הכרוני באיברים להשתלה.

רו"ח ההסתדרות הרפואית שמעלה דרכים להגדלת מאגר האיברים עורר דיון אתי מה מר" כנים רופאים לעשות כדי להציל חיים. ההסתדרות דורשת דיון על יישום הליך הנשמה שנוי במחלוקת שבמסגרתו חר" לים שמתו מוות מוחי, יוחזקו בחיים רק כדי שאפשר יהיה

כיצד ניתן לתאר בעזרת תק"מ את מספר המתים הקליניים הזמינים להשתלה? הניחו שוב מצב סטציונארי. בתשובתכם, הגדירו במדויק את הפרמטרים של התק"מ.

תשובה:



פרמטרים:

λ - קצב מיתות קליניות.

μ - קצב ביקוש לתרומות.

θ - קצב מקרי מוות אמיתיים (מוות סופי, מעבר למוות הקליני).

B - מספר המיטות הזמינות למתים קליניים.

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Gen. Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$N \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multi-nomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(m, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; m \geq 1$	$k = m, m+1, \dots$	$\left[\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t} \right]^m$	$\frac{m}{p}$	$\frac{mq}{p^2}$	Number of trials till m -th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$\exp\{-\lambda(1 - e^t)\}$	λ	λ	
Hyper-geometric	$X \sim HG(N, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{M-k}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N + M$	$\max(0, n - M) \leq k$ $k \leq \min(n, N)$	$\sum_k e^{tk} p(k)$	$\frac{n \cdot N}{N+M}$	$n \cdot \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N}{N+M-1}$	N – special elements M – ordinary ones n – sample size k – special in sample
		Density Function						
Beta	$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	Complicated	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ $= (x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp\left\{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\}$	μ	σ^2	