



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום
מתרגלת : ניצן כרמלי

תאריך הבחינה : 15.7.2012

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד א' – סמסטר אביב תשע"ב 2012

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 32 עמודים, כולל עמוד זה ועמוד 32 (התפלגויות מהקורס בהסתברות).
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

הרצאות/תרגולים/בחינות קודמות	מתוך 10 נקודות	שאלה 1	ניקוד:
תרגילי בית	מתוך 10 נקודות	שאלה 2	
יישום	מתוך 20 נקודות	שאלה 3	
תיאוריה	מתוך 10 נקודות	שאלה 4	

סה"כ _____ מתוך 50 נקודות

בהצלחה !

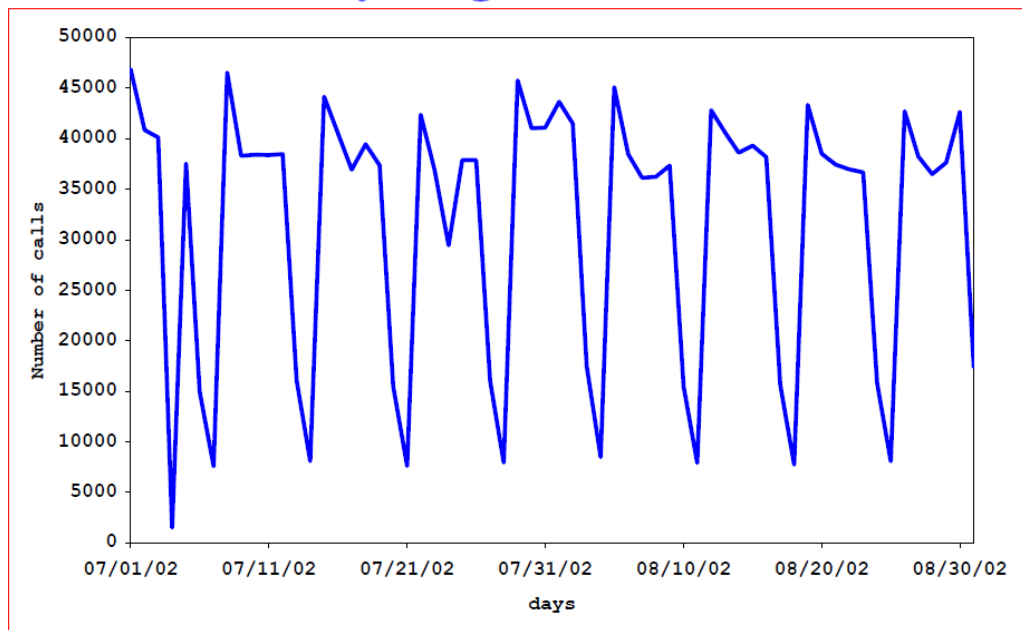
שאלה 1 - תרגילי כיתה/הרצאות/מבחנים קודמים (10 נקודות)

חלק 1 – מופעים, תחזיות ו- SEESTAT

1.1.1 הגרף הבא מציג את סך השיחות הנכנסות למוקד טלפוני ביום בתקופה 1/7/2002-30/8/2002. אילו מסקנות (בעלות משמעות תפעולית) ניתן להסיק מהגרף? (התייחסו בתשובתכם למגמות, מחזוריות, ימים חריגים ועוד).

גרף 1

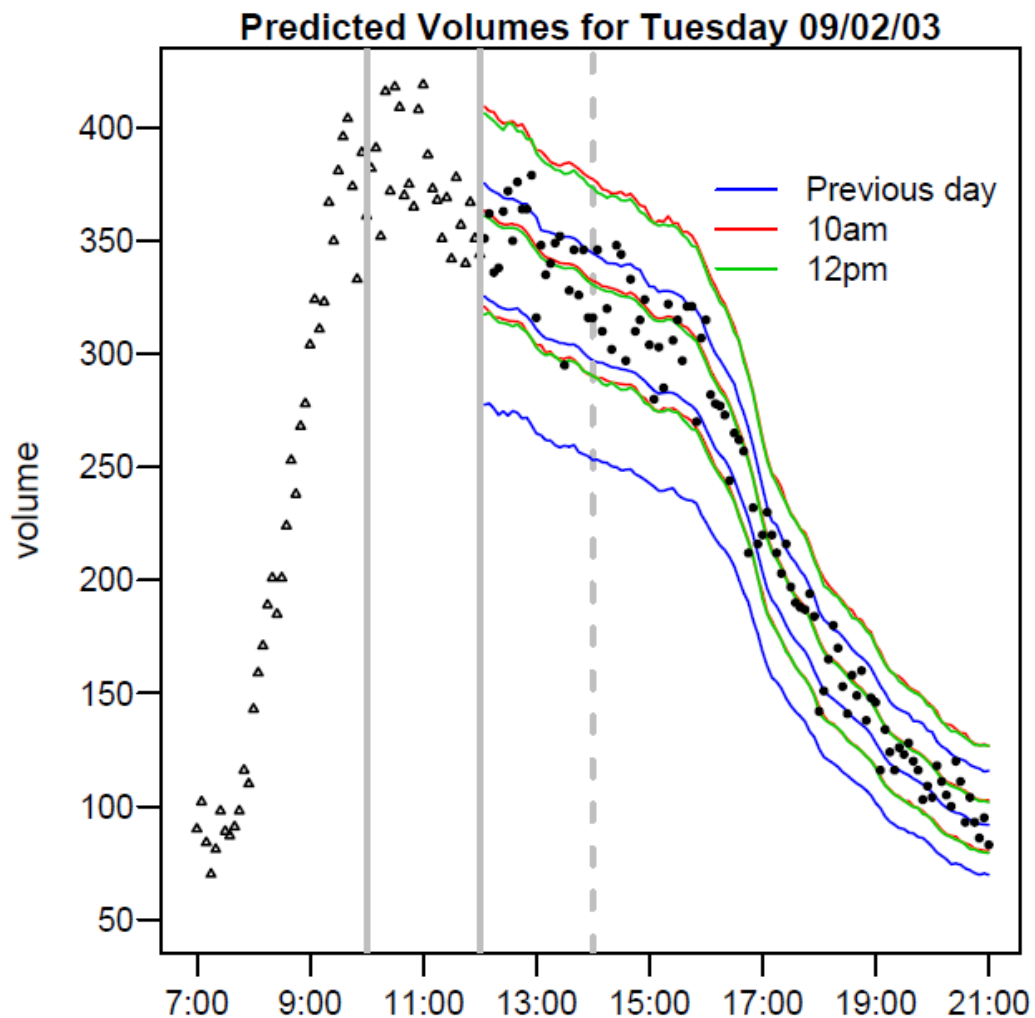
**Daily Call Volumes at a U.S. Bank.
July-August 2002.**



תשובה:

1.1.2 להלן מתוארים שלושה ניסיונות לחזות קצב מופע למוקד שירות טלפוני בארה"ב. התחזית היא למספר המופעים החל משעה 12:00. הנקודות מתארות את המספר האמיתי. סכמו בקצרה את המסקנות העיקריות הנובעות מדוגמה זו.

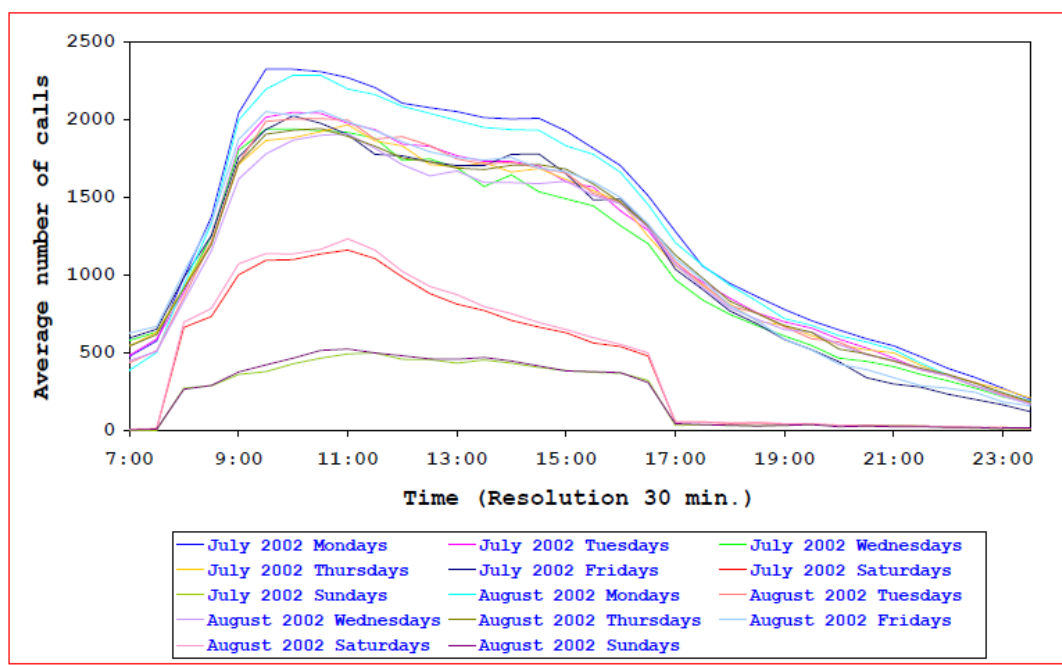
גרף 2



תשובה:

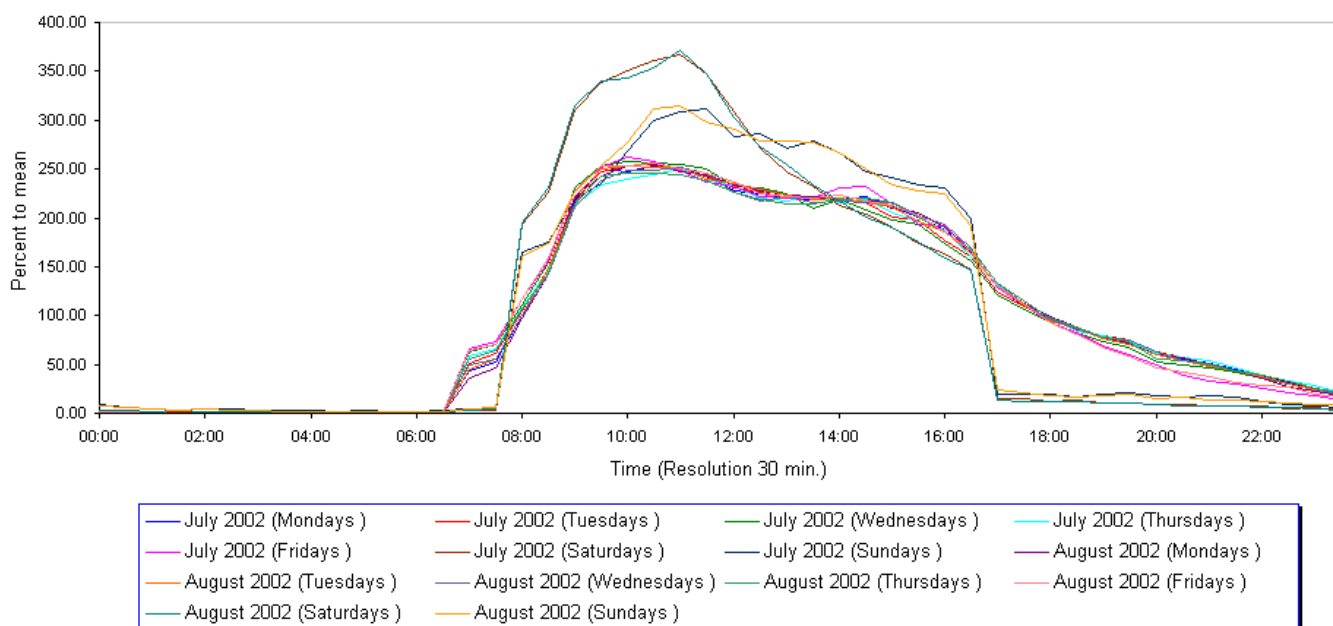
בגרפים הבאים מתוארים מופעים למוקד שירות טלפוני בארץ, בימים שונים של השבוע: הגרף הראשון מתאר מספר מופעים לחצי שעה והשני את מספר מופעים זה ביחס לממוצע היומי (באחוזים).

גרף 3



גרף 4

USBank Arrivals to queue



1.1.3 בהנחה שהמופע למוקד הוא פואסון לא הומוגני בזמן, באיזה מודל מתמטי לקצב המופע $\lambda(t)$, $t \geq 0$ הייתם ממליצים להשתמש, ובאילו שיטות הייתם חוזים אותו?

תשובה:

1.1.4 נניח כי דוח ה- ACD המופיע בעמוד הבא מתאר את ההגעות לאותו מוקד טלפוני ב- 1.7.2002. כיצד ניתן לבדוק, בעזרת הדוח הנ"ל, את ההשערה הבאה: "המופעים בין השעה 7:00 ל- 24:00 ב-1.7.2002 מתאימים לתהליך פואסון לא הומוגני בזמן"? הסבירו תשובתכם במילים (אין צורך בנוסחאות מתמטיות).

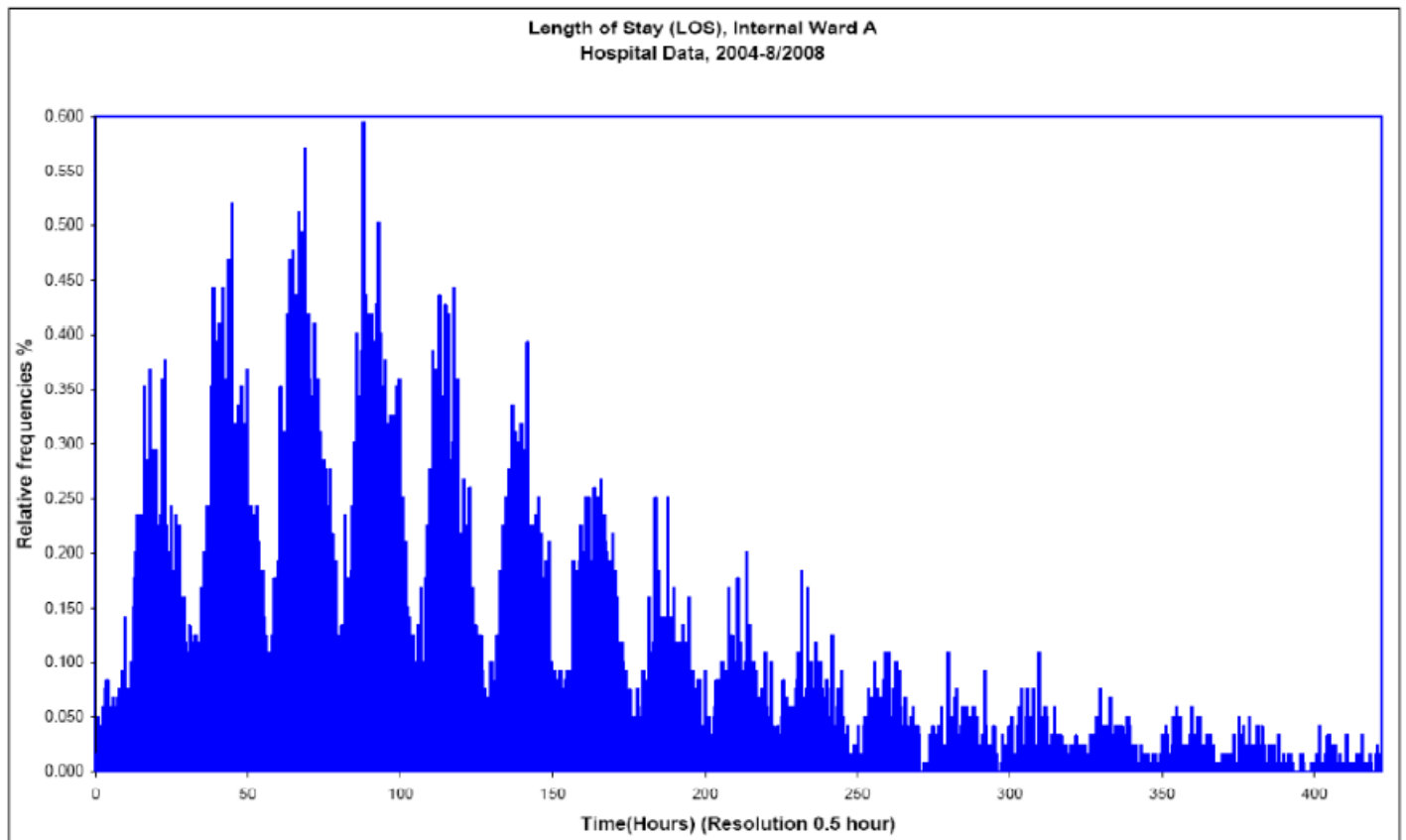
תשובה:

call_id	q_start	q_exit	ser_start	ser_exit	outcome	wait_time	service_time	Agent
510013309	06:23:00	06:23:07	06:23:08	06:25:01	Agent	7	113	23015
510013355	06:23:19	06:24:30	06:24:31	06:24:51	Agent	71	20	23007
510013559	06:24:52	06:24:52	06:24:52	06:26:57	Agent	0	125	23007
510013814	06:26:32	06:26:33	06:26:33	06:27:27	Agent	1	54	23015
510013830	06:26:36	06:26:38	00:00:00	00:00:00	Abandon	2	0	0
510013871	06:26:47	06:26:57	06:26:58	06:28:45	Agent	10	107	23007
510014006	06:27:53	06:27:53	06:27:53	06:29:46	Agent	0	113	23015
510014071	06:28:15	06:28:45	06:28:46	06:29:04	Agent	30	18	23007
510014116	06:28:35	06:29:04	06:29:05	06:30:31	Agent	29	86	23007
510014132	06:28:43	06:29:46	06:29:47	06:31:27	Agent	63	100	23015
510014196	06:29:05	06:30:31	06:30:32	06:34:32	Agent	86	240	23007
510014425	06:30:38	06:31:27	06:31:27	06:34:31	Agent	49	184	23015
510014578	06:31:32	06:34:31	06:34:32	06:35:54	Agent	179	82	23015
510014674	06:32:06	06:34:32	06:34:33	06:37:04	Agent	146	151	23007
510014702	06:32:18	06:33:00	00:00:00	00:00:00	Abandon	42	0	0
510014712	06:32:26	06:35:54	06:35:55	06:37:37	Agent	208	102	23015
510014750	06:32:37	06:36:08	06:36:09	06:47:58	Agent	211	709	23041
510014927	06:33:46	06:37:04	06:37:05	06:43:49	Agent	198	404	23007
510015175	06:35:19	06:36:04	00:00:00	00:00:00	Abandon	45	0	0
510015368	06:36:28	06:37:37	06:37:38	06:39:53	Agent	69	135	23015
510015393	06:36:35	06:37:54	00:00:00	00:00:00	Abandon	79	0	0
510015405	06:36:39	06:39:53	06:39:54	06:51:04	Agent	194	670	23015
510015441	06:36:55	06:43:49	06:43:50	06:45:58	Agent	414	128	23007
510015539	06:37:41	06:45:58	06:45:59	06:47:44	Agent	497	105	23007
510015752	06:38:54	06:39:14	00:00:00	00:00:00	Abandon	20	0	0
510015802	06:39:13	06:40:31	00:00:00	00:00:00	Abandon	78	0	0
510016057	06:40:42	06:40:59	00:00:00	00:00:00	Abandon	17	0	0
510016208	06:41:36	06:47:44	06:47:45	06:51:29	Agent	368	224	23007
510016446	06:42:56	06:47:58	06:47:59	06:48:31	Agent	302	32	23041
510016552	06:43:35	06:45:36	00:00:00	00:00:00	Abandon	121	0	0
510016619	06:44:02	06:48:31	06:48:32	06:50:56	Agent	269	144	23041
510016625	06:44:05	06:46:13	00:00:00	00:00:00	Abandon	128	0	0
510016700	06:44:32	06:50:56	06:50:57	06:56:20	Agent	384	323	23041
510016708	06:44:36	06:51:04	06:51:05	06:53:01	Agent	388	116	23015
510016925	06:45:53	06:51:29	06:51:30	06:53:14	Agent	336	104	23007
510017302	06:48:04	06:53:01	06:53:02	06:54:12	Agent	297	70	23015
510017389	06:48:31	06:49:30	00:00:00	00:00:00	Abandon	59	0	0
510017423	06:48:42	06:53:14	06:53:14	06:54:56	Agent	272	102	23007
510017606	06:49:55	06:54:12	06:54:12	06:55:49	Agent	257	97	23015
510017636	06:50:03	06:51:57	00:00:00	00:00:00	Abandon	114	0	0
510017717	06:50:38	06:54:56	06:54:57	06:56:50	Agent	258	113	23007

1.1.5 להלן היסטוגרמה המתארת את משכי השהייה (אשפוז) במחלקה פנימית בבית חולים גדול בארץ. כיצד ניתן להסביר את הצורה המיוחדת של היסטוגרמה זו?

גרף 5

Hospital Data: Histogram of Length of Stay



תשובה:

חלק 2 – תחומים תפעוליים

בעמוד 10 נתונות 3 דוגמאות של דו"חות ACD ממוקד שירות טלפוני בארץ.

1.2.1 התאימו לכל דוח את התחום התפעולי המתאים מבין: **QED**, **ED** ו- **QD**. נמקו בקצרה אך במדויק ככל שתוכלו.

תשובה:

דוח	מדיניות	נימוק קצר
1		
2		
3		

בסעיפים הבאים נתמקד בשורה השנייה בכל דוח (מודגשת): בדוח מספר 1 – 00:23:30-22: בדוח מספר 2 – 14:30-14:00, ובדוח מספר 3 – 00:14:30-13:13.

1.2.2 כתבו את כלל איוש שנראה מתאים ביותר לכל דו"ח, המקשר בין העומס המוצע R ומספר השרתים n. חשבו את דרגות השירות (ערכי הפרמטרים של כללי האיוש) עבור השורה השניה של כל דוח.

דוח	כלל איוש	דרגת השירות
1		
2		
3		

1.2.3 נניח כי מספר המופעים היה גדל פי 9 וגם מספר המוקדנים (שרתים) היה גדל פי 9 (כל שאר הפרמטרים נשארים כפי שהיו).
תנו הערכתכם לממוצע זמן ההמתנה תחת תרחיש חדש זה. נמקו בקצרה ובמדויק ככל שתוכלו.

דוח	ממוצע זמן ההמתנה הנוכחי	ממוצע זמן ההמתנה החדש	נימוק קצר
1			
2			
3			

Report 1

Time	Arrivals	Average Service Time (sec)	Offered Load	Number of Agents	Fraction Abandoning (%)	Average Wait (sec)	Served Immediately (%)
22:00	476	160.1	42.3	34.3	21.8	104.4	0.8
22:30	416	196.5	45.4	28.9	38.7	163.2	0.4
23:00	346	194.0	37.3	24.8	41.0	171.1	0.9

Report 2

Time	Arrivals	Average Service Time (sec)	Offered Load	Number of Agents	Fraction Abandoning (%)	Average Wait (sec)	Served Immediately (%)
13:30	859	70.9	33.8	53.6	0.0	0.0	100.0
14:00	768	75.1	32.0	57.3	0.0	0.0	100.0
14:30	700	80.2	31.2	52.8	0.0	0.0	100.0
15:00	596	84.5	28.0	39.0	0.0	1.6	88.1

Report 3

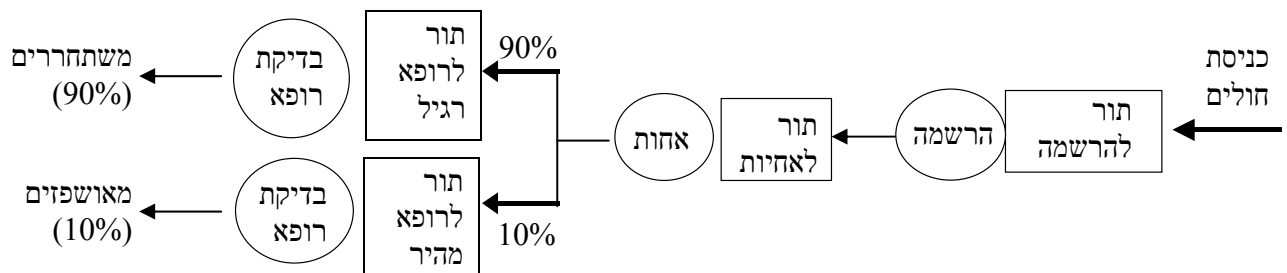
Time	Arrivals	Average Service Time (sec)	Offered Load	Number of Agents	Fraction Abandoning (%)	Average Wait (sec)	Served Immediately (%)
13:00	176	202.2	19.8	18.8	5.7	30.6	23.5
13:30	175	207.1	20.1	20.1	3.5	17.1	54.2
14:00	169	196.3	18.4	20.9	1.8	5.4	74.7

שאלה 2 – תרגילי בית (10 נקודות)

חוק Little

חולים הפונים לחדר מיון בבית חולים מסוים עוברים את תהליך הטיפול לפי התרשים המצורף. התהליך מתחיל בהרשמה. אחרי ההרשמה, החולים עוברים בדיקה אצל **אחיות** שמסווגות אותם לחולים **משתחררים פוטנציאליים** (הנשלחים לרופא "רגיל", מקבלים הוראות וטיפול ולא מאושפזים) או **מאושפזים פוטנציאליים** (הנשלחים לטיפול דחוף ובסוף הטיפול יאושפזו). שני סוגי החולים מחכים בתורים נפרדים לקראת בדיקת רופא. הרופא בודק את החולים. לאחר בדיקת הרופא, החולים המאושפזים נשלחים למחלקות בבית-החולים; החולים המשתחררים מקבלים טיפול והוראות להמשכו (למשל מרשמים) ואז משתחררים לביתם. נניח, בשלב זה, שאחיות המיון לא עושות טעויות וממיינות 100% של החולים בצורה נכונה.

מדידות מראות שממוצע קצב הגעת חולים למיון הוא 50 חולים בשעה, מתוכם בסופו של דבר מאושפזים 10% מהפונים. תהליך הרשמה של חולה נמשך 2 דקות בממוצע. בדיקת אחות אורכת 3 דקות בממוצע. משך זמן בדיקת רופא משתנה בין שני סוגי החולים: 5 דקות למשתחררים פוטנציאליים ו- 30 דקות למאושפזים פוטנציאליים, בממוצע. נמצא גם כי בממוצע 20 חולים ממתינים בתור להרשמה ו- 5 חולים ממתינים בתור לאחות. בנוסף, תור החולים המשתחררים (הרגילים) לקראת בדיקת רופא הוא 15 חולים בממוצע ותור החולים המאושפזים (הדחופים) הוא חולה אחד בממוצע.



2.1 כמה זמן בממוצע ישהה חולה בחדר המיון?

תשובה:

2.2 כמה חולים בממוצע יהיו סה"כ בחדר המיון?

תשובה:

2.3 כמה זמן בממוצע ישהו מאושפזים פוטנציאליים בחדר המיון?

תשובה:

2.4 מהו מספר הפקידים המינימלי בעמדת ההרשמה שיאפשר מצב שבו נצילותם לא תעלה על 80%.

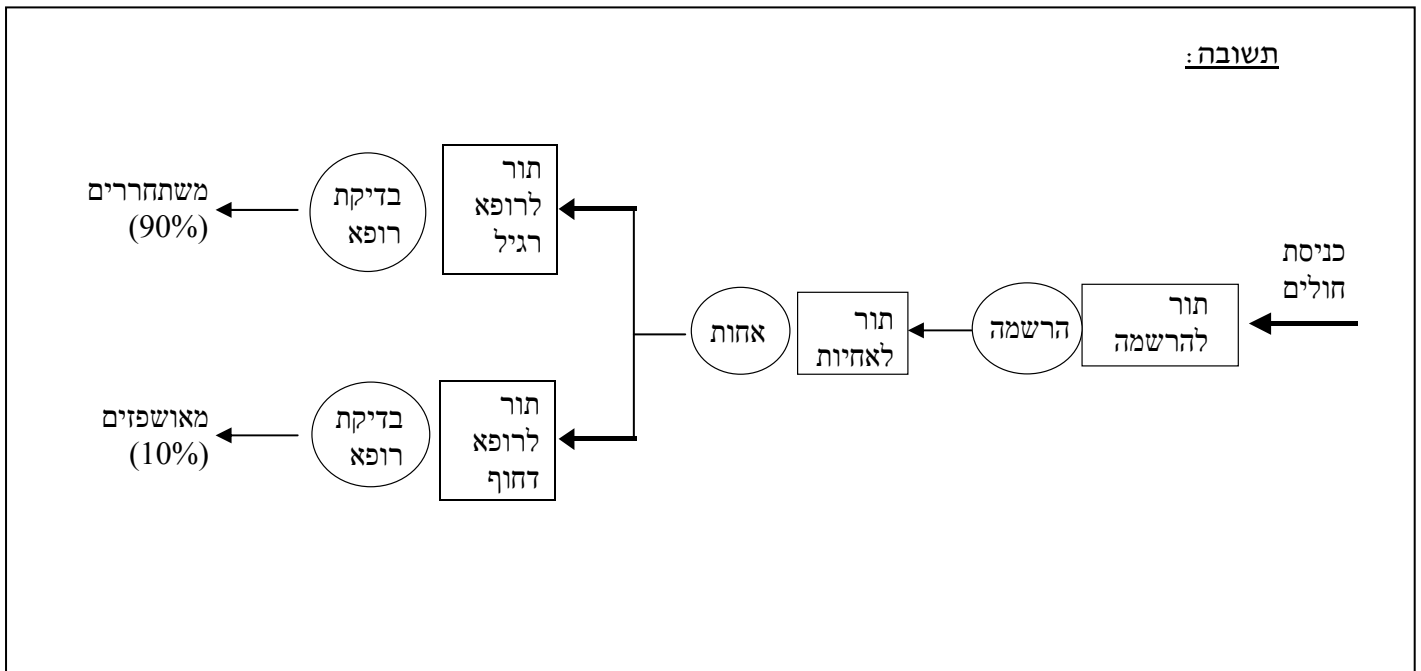
תשובה:

2.5 מהו מספר הרופאים המינימלי שנדרש כדי להבטיח את יציבות המערכת?

תשובה:

בבדיקה נוספת התגלה כי למרות שרק 90% מהחולים משתחררים (ולכן אינם דחופים), האחות מסווגת 92% מהחולים כרגילים. הרופא שמבצע את הבדיקה הרגילה הוא שמגלה את הטעות בסיווג של 2% הנותרים. כתוצאה מכך, תור החולים הרגילים לקראת בדיקת רופא הוא ארוך יותר ומונה 21 חולים בממוצע. (תור החולים הדחופים נשאר חולה אחד בממוצע). החולים שמסווגים בטעות כרגילים שוהים אצל הרופא הרגיל 10 דקות בממוצע, לאחר מכן הם נשלחים להמשך טיפול אצל הרופא הדחוף. משך זמן בדיקת רופא דחוף נשאר 30 דקות. שימו לב כי החולים שמסווגים באופן שגוי מחכים בפועל בשני תורים (לרופאים). הניחו כי כל שאר הנתונים נשארו זהים למה שנמצא קודם לכן.

2.6 השלימו את האיור כך שיתאר את המצב החדש.



2.7 כמה זמן בממוצע ישהיה חולה בחדר המיון?



שאלה 3 – יישום (20 נקודות)

תכנון שדות תעופה

להלן כתבה שהתפרסמה ב-YNET – 7.5.2010, אין צורך לקרוא את הכתבה, כל המידע הדרוש יופיע בשאלות עצמן.

economy כלכלה

תקציב לתכנון שדה תעופה בתמנע. כך הוא יראה

שר התחבורה, ישראל כץ, אישר תקציב ממשלתי בסך 56 מיליון שקל לצורך תכנון שדה התעופה שיחליף את השדה באילת. התקציב דורש את אישור שר האוצר, יובל שטייניץ. שדה התעופה יאפשר למטוסי סילון גדולים להמריא ממנו לכל היעדים באירופה יואב זיתון

צעד ראשון משמעותי בדרך להקמת שדה התעופה החדש בתמנע: שר התחבורה, ישראל כץ, אישר אתמול (ה') תקציב ממשלתי בסך 56 מיליון שקל לצורך תכנון שדה התעופה שעתיד להחליף את שדה התעופה באילת. תקציב זה עוד דורש את אישור שר האוצר, יובל שטייניץ, ומהווה חלק מתקציב ההקמה הכולל של השדה - 1.7 מיליארד שקל.

תכנון השדה, שיפעל 18 ק"מ צפונית לאילת, אמור להימשך מספר חודשים, וההקמה עצמה של השדה עצמו צפויה להימשך 4 שנים מרגע תחילת העבודות.



הדמייה - שדה התעופה בתמנע

שדה התעופה יכלול מסלול המראות ונחיתות באורך של 3,600 מטר שיאפשר למטוסי סילון גדולים להמריא ממנו לכל היעדים באירופה. לדברי השר כץ, שדה התעופה בתמנע ישמש כשדה תעופה בינלאומי וכן לטיסות פנים ארציות.

השדה יכלול טרמינל מוסעים וחניית "דיוסי פרי", בדומה לחניית הקיימות בנתב"ג.

יוסי, העובד בחברת האדריכלות שזכתה במכרז לתכנון טרמינל הנוסעים בשדה החדש, נדרש לקבוע את השטח הדרוש לאזור ה- Check-in של טיסות פנים. לצורך כך עליו להעריך את כמות הנוסעים הצפויה לשהות בזמן נתון, באזור דלפקי ה- Check-in של שתי החברות המפעילות טיסות פנים – אל-על וארקיע.

בשלב הראשון, יוסי מעוניין להעריך את כמות הנוסעים בטיסות מקומיות, הצפויה לשהות באזור ה- Check in של חברת אל-על. החברה תפעיל 3 טיסות ביום (ב-7:00, 14:00 ו-19:00) משדה התעופה לתל-אביב. החברה תאייש 4 דלפקים החל משעתיים לפני הטיסה. ראשית, לשם הפשטות, מנתח יוסי את מערכת התור לפני טיסת אל-על אחת בודדת. הוא מעריך כי נוסעים יגיעו לאזור הדלפקים של החברה בטווח של בין שעתיים לפני הטיסה ועד חצי שעה לפני הטיסה. שוב לפשטות, הוא מניח כי ההגעות בטווח זמן זה הינן לפי תהליך פואסון עם קצב של 100 נוסעים בשעה וכי משך השירות בכל אחד מהדלפקים מתפלג מערכית עם תוחלת של 2.25 דקות לנוסע. בנוסף מניח יוסי כי המערכת מגיעה במהירות למצב יציב.

3.1 איזה מודל מתמטי מתאים לתיאור מערכת התור בטווח של שעתיים עד חצי שעה לפני טיסת אל-על? מהן הנחות המודל? מהם הפרמטרים של המודל?

תשובה:

3.2 שרטטו על גבי הגרף המצורף את קצב הגעת נוסעים לטיסות אל-על לתל אביב לאורך כל שעות היום. האם הגעת הנוסעים לטיסות אל-על לתל אביב במשך יממה אחת מהווה תהליך פואסון הומוגני בזמן? נמקו את תשובתכם. (הקפידו על היחידות המתאימות).

תשובה:



שימו לב: פונקציית Garnett ודפי הרצאה רלוונטיים לפתרון הסעיפים הבאים מופיעים בסוף השאלה.

3.3 מהי ההסתברות שנוסע שהגיע לטיסת פנים של אל-על בטווח שבין שעתיים לחצי שעה לפני הטיסה יאלץ להמתין?

תשובה:

3.4 מהו אורך התור הממוצע לדלפקי ה - Check-in של חברת אל-על (בטווח הזמן של שעתיים עד חצי שעה לפני הטיסה)?

תשובה:

כעת יוסי מעוניין לעדן מספר הנחות שעשה בניתוח הראשוני. ידוע כי 30% מהנוסעים הינם לקוחות עסקיים המגיעים לדלפק ה – Check in ללא מזוודות למסירה. עבור נוסעים אלו משך השירות בדלפק מתפלג מעריכית עם ממוצע של חצי דקה בלבד. 70% מהנוסעים הם תיירים ומשך השירות שלהם מתפלג מעריכית עם ממוצע של 3 דקות. ההנחה לגבי תהליך ההגעה אינה משתנה לעת עתה.

3.5 איזה מודל מתמטי מתאים לתיאור המערכת כעת? מהן הנחות המודל?

תשובה:

חלק זה של העמוד נשאר ריק

3.6 מה יהיה כעת אורך התור הממוצע לדלפקי ה - Check-in של חברת אל-על (בטווח הזמן של שעותיים עד חצי שעה לפני הטיסה)? השוו אותו לאורך התור הממוצע שקיבלתם בסעיף 3.3. האם תוצאה זו הייתה צפויה? נמקו תשובתכם.

תזכורת: אם $X \sim \exp(\lambda)$ אזי $E[X^2] = (E[X])^2 + \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

תשובה:

במחשבה נוספת, יוסי מבין כי על מנת שיוכל להעריך את השטח הדרוש לאזור ה- Check in, עליו לאמוד את המספר המקסימאלי של לקוחות בתור ולא את הממוצע. כמו כן, הוא בודק את נתוני ההגעות של לקוחות אל-על לטיסות פנים היוצאות משדה התעופה באילת ומגלה כי ההנחות הראשוניות שעשה אינן מדוייקות.

בפועל, נוסעים אכן מגיעים לאזור ה- Check in החל משעתיים לפני הטיסה אך לא ע"פ תהליך פואסון. קצב ההגעה משתנה כפונקציה של הזמן עד הטיסה. הנוסע האחרון יגיע 15 דקות לפני הטיסה.

כמו כן מתברר לו כי אמנם החברה פותחת את הדלפקים החל משעתיים לפני הטיסה אך מתחילים לקבל נוסעים רק שעה וחצי לפני הטיסה. על סמך נתונים אלו יוסי משרטט את הגרף הבא:

גרף 6

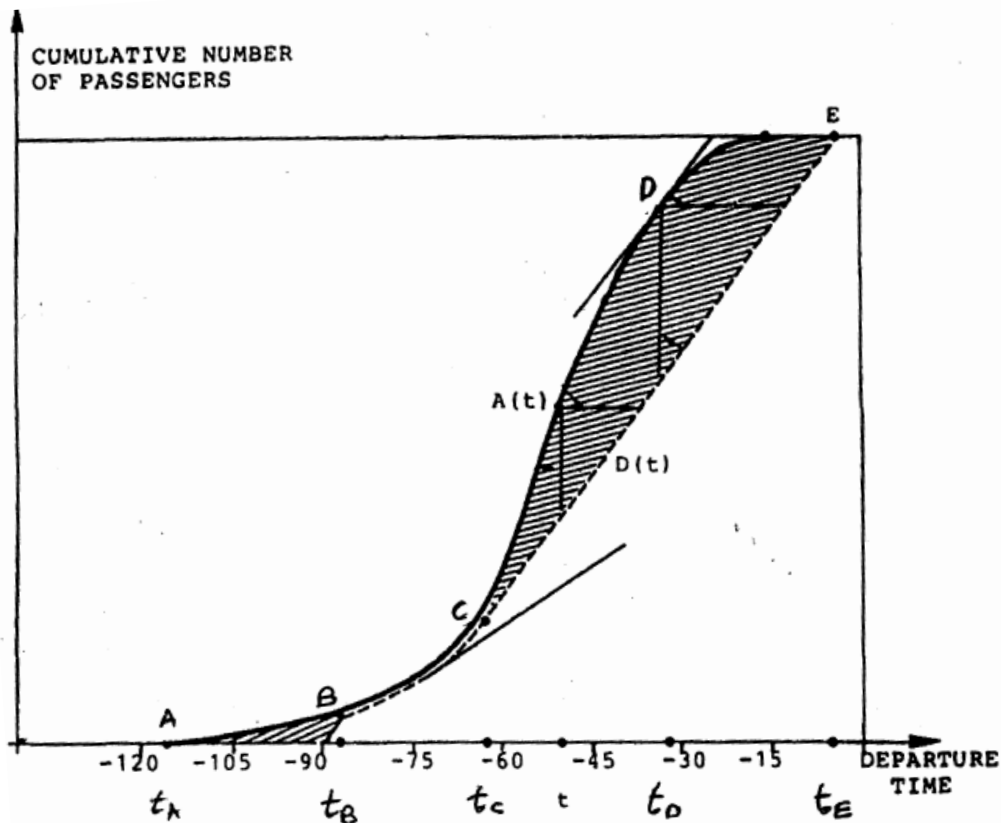


Fig. 1. Check-in facility queuing.

כאשר :

ציר ה- X מתאר את הזמן עד ליציאת הטיסה.

$A(t)$ = כמות הנוסעים המצטברת באזור ה- Check in עד זמן t .

$D(t)$ = כמות הנוסעים המצטברת שנכנסה ל- Check in עד זמן t .

בשאלות הבאות בטאו את תשובותיכם בעזרת t_A, t_B, t_C, t_D, t_E מהגרף.

3.7 באילו זמנים קיים תור במערכת?

תשובה :

3.8 מה ניתן לומר על היחס בין קצב ההגעה לקצב השירות החל מפתיחת הדלפקים (90 דקות לפני הטיסה) ועד ל-65 דקות לפני הטיסה (מי גדול ממנו)? מה ניתן לומר על נצילות הפקידים החל מזמן t_B ועד 65 דקות לפני הטיסה?

תשובה :

3.9 באיזה אינטרוול זמן קצב ההגעה הוא הגבוה ביותר? מתי מתקבל אורך התור הארוך ביותר? זמן ההמתנה הארוך ביותר? הסבירו את התופעה המתקבלת.
סמנו את אורך התור המקסימאלי - $q_{\max}$, ואת זמן ההמתנה המקסימאלי - $w_{\max}$, על גבי **גרף 6**.

תשובה:

3.10 מה מתאר השטח המקווקו בגרף? בטאו את השטח המקווקו S באמצעות $A(t)$ ו- $D(t)$.

כיצד ניתן לחשב את אורך התור הממוצע ומשך ההמתנה הממוצע על סמך S ?

רשמו את הנוסחאות המתאימות תוך שימוש בסימוני הגרף.

תשובה:

חלק זה של העמוד נשאר ריק

3.11 גבי, העובד גם הוא בחברת האדריכלות המתכננת את השדה החדש, אחראי לתכנון מסלולי הנחיתה של טיסות פנים. על-פי ההנחיות, יוקצה רק מסלול אחד לנחיתות של טיסות פנים. תהליך ההגעה של טיסות פנים הינו תהליך פואסון עם קצב של λ טיסות בשעה. כאשר מטוס נוחת במסלול הוא תופס אותו לזמן קבוע D . טיסות פנים אשר מגיעות בזמן שהמסלול תפוס יופנו למסלול אחר. כיצד מתפלג הזמן מרגע תחילת נחיתה במסלול **המיועד לטיסות פנים** ועד לרגע תחילת הנחיתה הבאה **במסלול זה**?

תשובה:

3.12 מהו אחוז טיסות הפנים שמופנות למסלולים אלטרנטיביים? ניתן גם לחשב תשובה זו ע"פ נוסחה שנלמדה בקורס – מהי הנוסחה?

תשובה:

M/M/1: Further Properties

- **Delay probability** (PASTA):

$$P\{W_q > 0\} = \rho.$$

- **Waiting time in queue** (given delay, it is exp):

$$\frac{W_q}{1/\mu} \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - \rho \\ \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{1-\rho}\right) & \text{wp } \rho \end{cases}$$

$$\text{Note: } E\left[\frac{W_q}{1/\mu}\right] = 0 \times (1 - \rho) + \frac{1}{1-\rho} \times \rho = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

- **Number-in-system/queue:**

$$E[L] = \frac{\rho}{1 - \rho}; \quad E[L_q] = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

- **Server's utilization** (occupancy) is $\rho = \lambda/\mu$.

Via Little's formula, applied to "system = server":

$$\rho = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T L_{\text{Server}}(u) du = \lambda \times \frac{1}{\mu}.$$

- **Departure process** in steady state is Poisson (λ) (Burke's theorem) – useful in queueing networks.

Support: Reversibility implies that the departure process equals (in distribution) the arrival process. Furthermore,

Average inter-departure time =

$$\frac{1}{\mu} \cdot \rho + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right) \cdot (1 - \rho) = \frac{1}{\lambda}.$$

M/M/n Queue: Properties

Erlang-C Formula (1917) for the Delay probability:

$$P\{W_q > 0\} \triangleq E_{2,n} = \sum_{i \geq n} \pi_i = \frac{R^n}{n!} \frac{1}{1 - \rho} \cdot \pi_0.$$

Erlang-C computation: via recursion, see Erlang-B below.

Erlang-C approximations: important later in course.

Number-in-queue:

$$P\{L_q = i\} = E_{2,n} \cdot (1 - \rho)\rho^i, \quad i > 0,$$

or

$$L_q = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Geom}_{\geq 0}(1 - \rho) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Waiting time distribution:

$$\frac{W_q}{1/\mu} = \begin{cases} 0 & \text{wp } 1 - E_{2,n} \\ \text{Exp}(\text{mean} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\rho}) & \text{wp } E_{2,n} \end{cases}$$

Compare with M/M/1!

Departure process: Poisson(λ) in steady-state.

Proof via reversibility, as with M/M/1.

Approximating G/G/n

Stability condition: $\rho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1$.

Kingman's Exponential Law:

$$\frac{W_q}{E(S)} \approx \begin{cases} \exp\left(\text{mean} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\rho} \cdot \frac{C^2(A)+C^2(S)}{2}\right) & , \text{ wp } E_{2,n}, \\ 0 & , \text{ otherwise.} \end{cases}$$

In particular, a popular measure for service-level, used to determine the number-of-servers n , is:

$$P\{W_q > x \cdot E(S)\} \approx E_{2,n} \cdot \exp\left(-x \cdot \frac{2n(1-\rho)}{C^2(A) + C^2(S)}\right), \quad x > 0.$$

Allen-Cunneen Approximation:

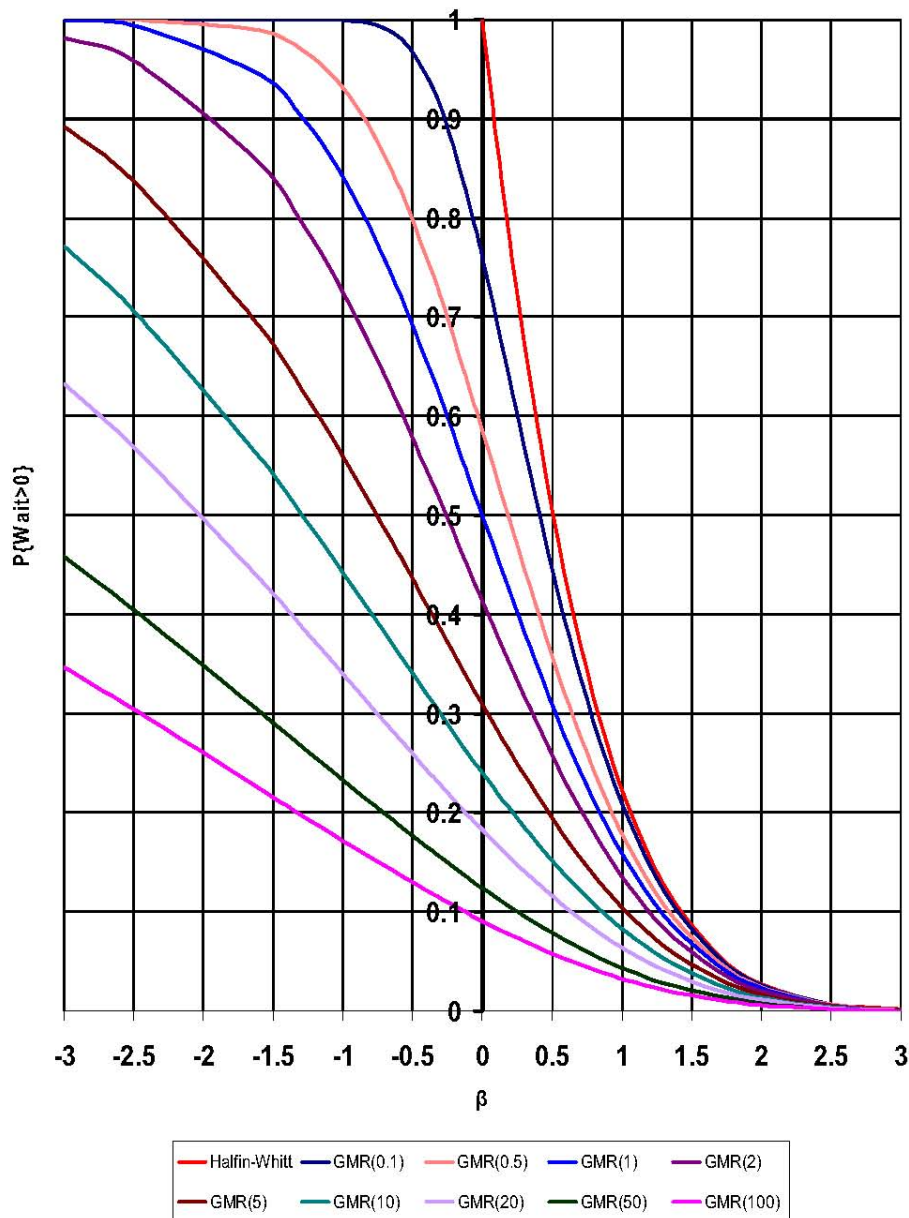
$$E(W_q) \approx E(S) \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{E_{2,n}}{1-\rho} \cdot \frac{C^2(A) + C^2(S)}{2}.$$

or equivalently,

$$E(W_q) \approx E(W_{q,M/M/n}) \cdot \frac{C^2(A) + C^2(S)}{2}.$$

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .



GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\theta/\mu = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

Note: **Erlang-C** = limit of **Erlang-A**, as patience $\uparrow$ indefinitely.

שאלה 4 – תיאוריה (10 נקודות)

4.1 במערכת שירות $M_t | G | \infty$, המופע הוא פואסוני לא הומוגני בזמן עם קצב מופע $\{\lambda(t), t \geq 0\}$, ומשכי השירות S הם בלתי-תלויים, שווי התפלגות, ובלתי תלויים במופע. נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t ויהי $R(t)$ ממוצע מספרם: $R(t) = EL(t)$. ניתן להראות ש- $R(t)$ נתון על ידי כל אחד משני הביטויים הבאים:

$$R(t) = E \left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du \right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

מטרת שני הסעיפים הבאים היא להוכיח את הנוסחאות הנ"ל במקרה פרטי של משך שירות דטרמיניסטי.

4.1.1 נניח שמשך השירות S הוא דטרמיניסטי $S=D$: הוכיחו את השוויון בין שתי ההצגות של $R(t)$ למקרה זה, ז"א:

$$\int_{t-D}^t \lambda(u) du = D \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

כאשר S_e הוא זמן שארית השירות המתאים ל- S דטרמיניסטי D .

תשובה:

$$4.1.2 \text{ הוכיחו שמתקיים: } R(t) = \int_{t-D}^t \lambda(u) du$$

$$\text{רמז: } \int_{t-D}^t \lambda(u) du = \int_0^t \lambda(u) du - \int_0^{t-D} \lambda(u) du$$

תשובה:

4.2 בכתה הוסבר ש- $R(t)$ הנ"ל משמש כהגדרת **העומס המוצע (Offered Load)** למערכת שירות בזמן t , כאשר המופע אליה ומשכי השירות בה הם כמתואר בחלק 2 הנ"ל. (כזכור, $R(t)$ נמדד ב-Erlang).

הסבירו בקצרה מדוע אכן **ההגדרה מתאימה**. את הסברכם חלקו לשלושה חלקים:

4.2.1 המקרה הפרטי של מופע פואסוני **בקצב קבוע** ($\lambda(t) \equiv \lambda$) : מהו $R(t)$ במקרה זה ומדוע הגדרתו מתאימה?

תשובה:

4.2.2 דוגמא - חדר מיון בבית חולים, שבו משך השהייה הממוצע **6 שעות**: מדוע ההגדרה מסעיף 4.2.1 איננה מתאימה למקרה שכזה?

תשובה:

4.2.3 המקרה הכללי: מדוע הגדרת $R(t)$ בחלק 4.1 הנ"ל אכן מתאימה?

תשובה:

4.3 ניתן להראות (על ידי שינוי משתני אינטגרציה בלבד) שמתקיים :

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = \int_{-\infty}^t \lambda(u)[1-G(t-u)]du$$

כאשר $G(\cdot)$ היא פונקצית ההתפלגות של משך השירות S . שימו לב ליחס :

$$1-G(t-u) = P\{S > t-u\}$$

היעזרו בעובדות אלו כדי **לחדד** את הסברכם בסעיף 4.2.3, ז"א תנו הסבר מדויק יותר לעובדה ש-
 $R(t)$ הוא אכן **ההגדרה המתאימה** לעומס המוצע (Offered Load) בזמן t .

תשובה :

שאלת בונוס : עשו חלק זה רק אחרי שסיימתם את יתר הבחינה.

4.4 הסבירו כיצד ניתן **להרחיב** את המקרה הדטרמיניסטי ב- 4.2.1 הנ"ל למקרה של S כללי, דהיינו כיצד מוכיחים שאכן :

$$E\left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du\right) = E(S) \cdot E(\lambda(t-S_e))$$

רמז : ניתן לקרב כל משתנה מקרי, בדיוק רב כרצונכם, על ידי משתנה מקרי המקבל מספר **סופי** של ערכים (מ"מ דיסקרטי).

תשובה :

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Gen. Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$N \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multi-nomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(m, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; m \geq 1$	$k = m, m+1, \dots$	$\left[\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t} \right]^m$	$\frac{m}{p}$	$\frac{mq}{p^2}$	Number of trials till m -th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$\exp\{-\lambda(1 - e^t)\}$	λ	λ	
Hyper-geometric	$X \sim HG(N, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{M-k}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N + M$	$\max(0, n - M) \leq k$ $k \leq \min(n, N)$	$\sum_k e^{tk} p(k)$	$\frac{n \cdot M}{N + M}$	$n \cdot \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N+M-n}{N+M-1}$	N – special elements M – ordinary ones n – sample size k – special in sample
		Density Function						
Beta	$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	Complicated	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ $= (x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp\left\{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\}$	μ	σ^2	