



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום

מתרגלת : גלית יום-טוב

תאריך הבחינה : 05.03.2009

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד א' – סמסטר חורף תשס"ט 2009

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 25 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

הרצאות\תרגולים\בחינות קודמות	מתוך 10 נקודות	שאלה 1	ניקוד:
תרגילי בית	מתוך 10 נקודות	שאלה 2	
יישום	מתוך 15 נקודות	שאלה 3	
תיאוריה	מתוך 10 נקודות	שאלה 4	

סה"כ _____ מתוך 45 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 - תרגילי כיתה/הרצאות/מבחנים קודמים

חלק 1. חוק Little.

בחברה יפנית כלשהי 36,000 עובדים, 20% מהם נשים. משך העסקה ממוצע של נשים הוא 37 חודשים, ולגברים 200 חודשים. הנח כי סך כמות המועסקים ואחוזי הגברים והנשים בתוכם קבועים לאורך זמן.

1.1 הסבירו מדוע קצב ההצטרפות של נשים חדשות לחברה הוא גדול יותר מקצב הצטרפות הגברים, למרות שפרופורציות הגברים והנשים במצב יציב הן 80% גברים ו-20% נשים. גבו את תשובתכם בחישובים.

תשובה:

נסמן את ממוצעי זמני ההעסקה של גברים ונשים על ידי W_1 ו- W_2 בהתאמה.

נסמן ב- W את ממוצע זמן ההעסקה הכללית בחברה.

1.2 בסעיף זה נניח כי נתונים (ע"י מדידות או מנסיון) p_1 ו- p_2 : פרופורציות מספר העובדים

שנשכרים בחודש מסוג 1 (גברים) וסוג 2 (נשים). ז"א, $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}$, כאשר λ_i הוא קצב

הגעת עובדים חדשים לחברה מסוג i , $(i = 1, 2)$.

בטאו את W בעזרת p_1, p_2, W_1 ו- W_2 .

תשובה:

1.3 בסעיף זה נניח כי נתונים q_1 ו- q_2 : פרופורציות מספר העובדים המועסקים בחברה, מסוג 1 וסוג 2.

ז"א, $q_i = \frac{L_i}{L_1 + L_2}$, כאשר L_i הוא ממוצע מספר העובדים בחברה מסוג i , $(i = 1, 2)$.

בטאו את W בעזרת q_1, q_2, W_1 ו- W_2 .

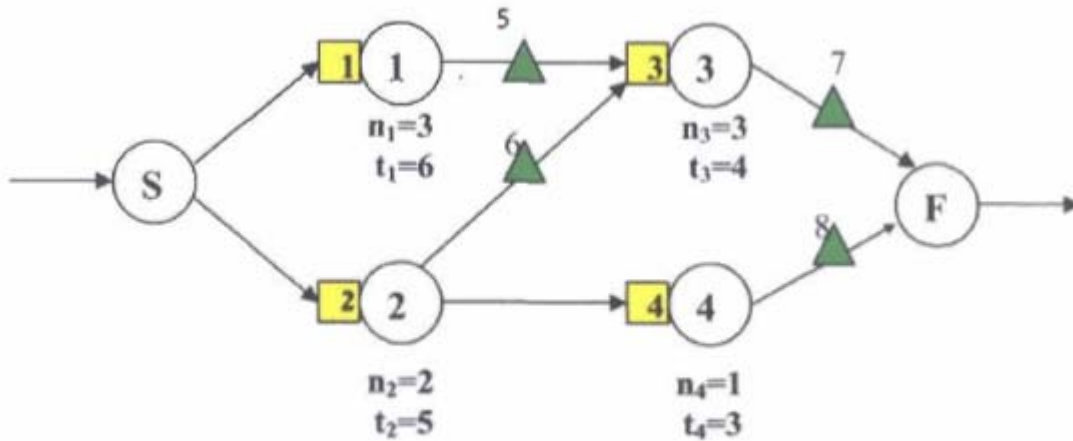
בעזרת תשובתכם תנו הסבר מילולי לגדלים $\frac{1}{W_1}, \frac{1}{W_2}, \frac{1}{W}$.

תשובה:

הסבר מילולי:

חלק 2. רשתות דינמיות סטוכסטיות.

נתונה רשת PERT/CPM דינמית סטוכסטית, כמתואר בגרף 1 וכפי שנלמד בכיתה: t_i הוא ממוצע זמן השירות בתחנה i , ו- n_i הוא מספר השרתים בתחנה i , $i = 1, 2, 3, 4$. פרויקטים חדשים מופיעים למערכת לפי תהליך פואסון עם ממוצע זמן בין מופעי של 3.5 ימים. נניח שהרשת במצב יציב.



Graph Number 1

2.1 לרשת 8 תורים הממוספרים מ-1 עד 8. מיהם התורים הנובעים מפערי סינכרון ומי הנובעים ממשאבים מוגבלים?

תשובה:

תורי סינכרון: _____

תורי משאבים: _____

2.2 מהי נצילות כל אחד משלושת השרתים המטפל בפעילות 3? הסבירו במשפט או שניים את תשובתכם.

תשובה:

נצילות השרתים: _____

הסבר: _____

2.3 מהו המספר המינימלי של שרתים הנדרשים לטפל בפעילות 3 כדי שנצילות כל אחד לא תעלה על 33%?

תשובה:

2.4 נסמן ב- T_{DS} את משך ביצוע פרויקט שמגיע למערכת במצב יציב. הסבירו במדויק ככל שתוכלו, אבל בשני משפטים לכל היותר, מדוע $ET_{DS} < 10$.

תשובה:

2.5 מנהל החברה הכשיר את השרתים שמבצעים את פעילות 3 ו-4 לבצע את שתי הפעילויות. צייר תרשים משאבים ותרשים משולב משאבים ופעילויות לפרויקט תחת תרחיש חדש זה.

תרשים משאבים:

תרשים משולב פעילויות-משאבים:

תרגיל 2 – תרגילי בית

למרכז שרות US Bank פונים לקוחות מכמה סוגים, ביניהם לקוחות המוגדרים Business (1) ו- Platinum (2). לקוחות Platinum נחשבים לקוחות VIP המקבלים עדיפות בנגישות לשרות. השרות עצמו, הניתן לשני סוגי הלקוחות, זהה, ואותם מוקדנים יכולים לתת שרות לשני סוגי הלקוחות. למרות זאת הוגדרו שתי קבוצות נציגי שירות נפרדים: "מוקדני Business" ו"מוקדני Platinum", שכל אחת מהן נותנת שרות לקבוצת הלקוחות שלה. הפרמטרים של המערכת נתונים ע"י:

- ♦ λ_1 (λ_2) - קצבי מופע לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ μ_1 (μ_2) - קצבי שירות לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ N_1 (N_2) - מספר המוקדנים בקבוצת שירות 1 (2).

מנהל השיווק החליט להשתמש בתוכנת SEESat על מנת לבחון את רמת השירות הניתנת לשני סוגי לקוחות אלו. הוא טוען שבחודש יולי 2001 רמת השירות לא היתה טובה וזאת על סמך הגרפים הבאים:

Figure 1: Average waiting time for Business and Platinum calls (July-01)

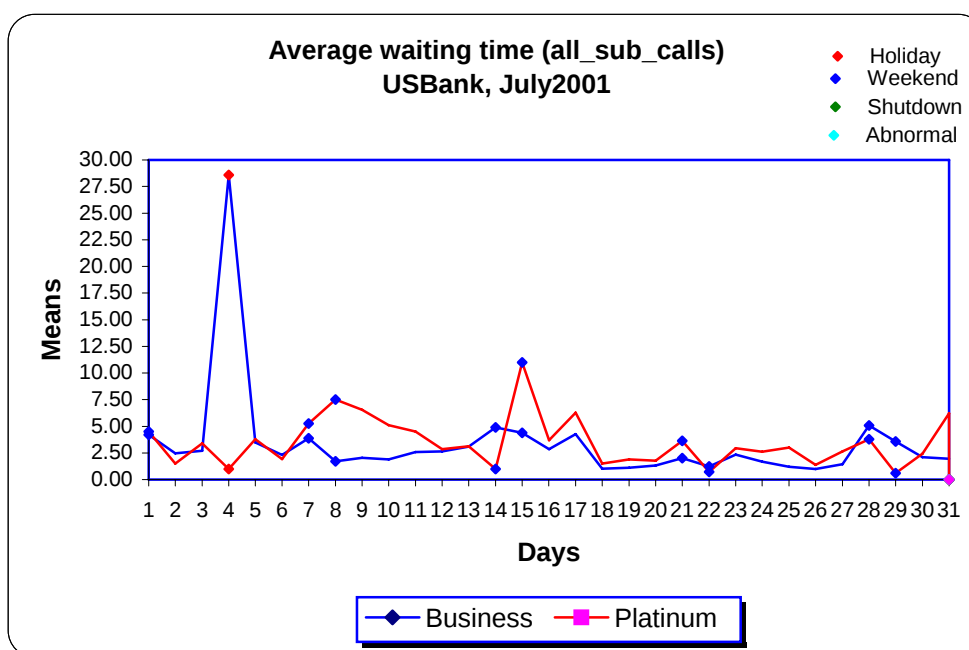
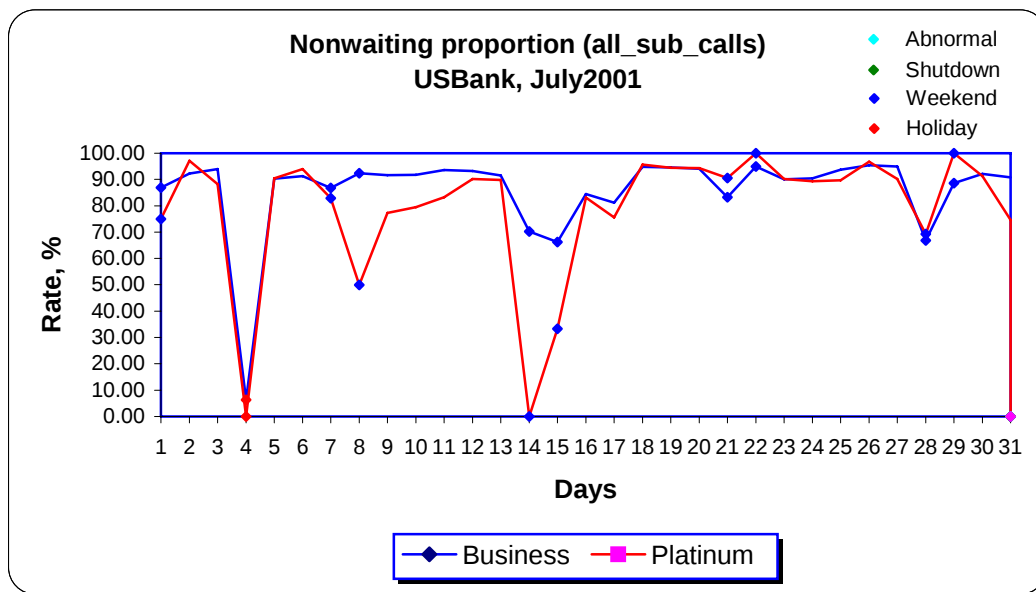


Figure 2: % immediately answered for Business and Platinum calls (July-01)



2.1 הסבירו את טענתו של מנהל השיווק, תוך שימוש בגרפים הנ"ל.

תשובה:

2.2 הציעו לפחות 2 פתרונות אפשריים לבעיה, ללא תוספת כ"א.

תשובה:

2.3 תארו, במדויק ככל שתוכלו, כיצד ניתן לייצר את גרף 2 בעזרת תוכנת SEEStat. (לשם תזכורת הפונקציות של התוכנה, צרפנו תצוגה של שני עמודים מממשק התוכנה).

תשובה:

Variables
Options
Select Categories

Select by ▼

Variable	Variable Type	Category	Subcategory
Number of agents	Counts	service	node
Average service incoming calls	Means	service	node
Incoming calls	Counts	service	node
Business calls	Counts	service	node
Served < 5	Counts	service	node
Served 5 to 19	Counts	service	node
Proportion served < 5	Rate	service	node
Proportioned served 5 to 19	Rate	service	node
Number agents < 5	Counts	service	node
Proportion agents < 5	Rate	service	node
VRU entries	Counts	service	
Announcement entries	Counts	service	
Message entries	Counts	service	
Direct entries	Counts	service	
VRU only	Counts	service	
VRU only proportion	Rate	service	
Announcement only	Counts	service	
Announcement only proportion	Rate	service	
Message only	Counts	service	
Message only proportion	Rate	service	
Arrivals (all_sub_calls)	Counts	service	
Handled (all_sub_calls)	Counts	service	
Handled proportion (all_sub_calls)	Rate	service	
Unhandled (all_sub_calls)	Counts	service	
Unhandled proportion (all_sub_calls)	Rate	service	
Short abandons (all_sub_calls)	Counts	service	
Short abandons proportion (all_sub_calls)	Rate	service	
Abandons (all_sub_calls)	Counts	service	
Abandons proportion (all_sub_calls)	Rate	service	
Other unhandled (all_sub_calls)	Counts	service	
Other unhandled proportion (all_sub_calls)	Rate	service	
Disconnected in service (all_sub_calls)	Counts	service	
Disconnected in service proportion (all_sub_calls)	Rate	service	
Nonwaiting proportion (all_sub_calls)	Rate	service	
Average waiting time given waiting (all_sub_calls)	Means	service	
Average waiting time (all_sub_calls)	Means	service	
Average customer service time (all_sub_calls)	Means	service	

DB Tables
Dictionaries
Calendar
Summaries
Variables
Procedures
Dates >

New Model
OK

Month	Year
May	2001
June	2001
July	2001
August	2001
September	2001
October	2001
November	2001
December	2001
January	2002
February	2002
March	2002
April	2002
May	2002
June	2002

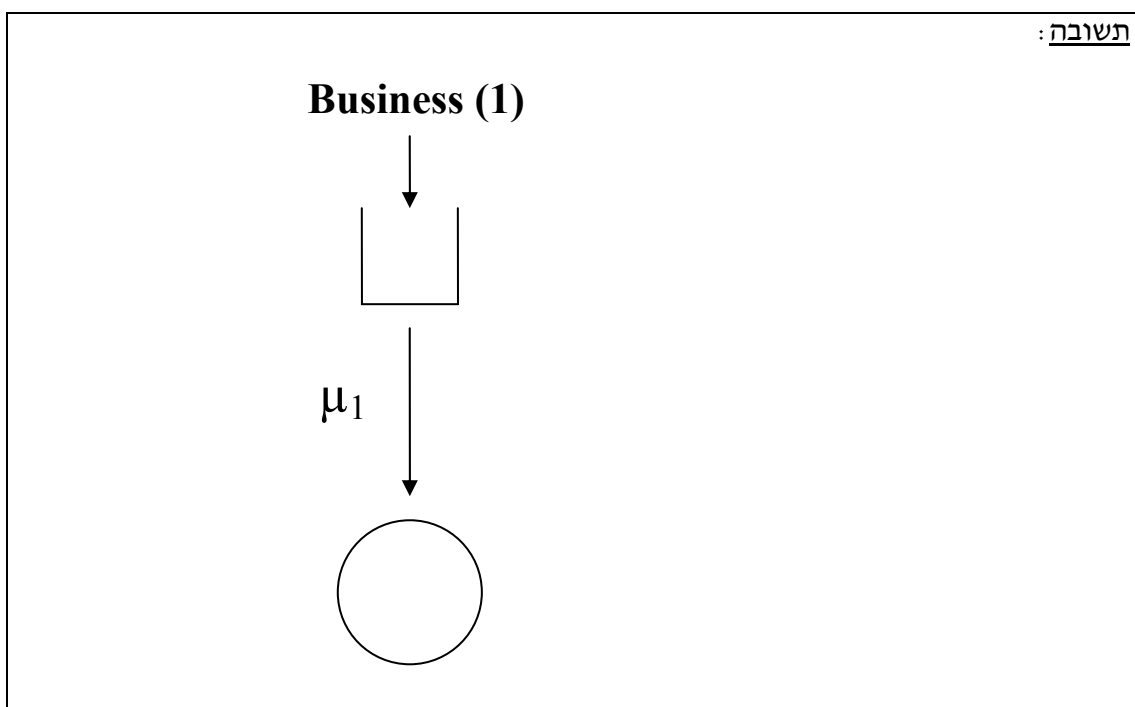
Time series type

☒ Days for one month

☐ Aggregated days by months

- כדי לשפר את רמת השירות ללקוחות Platinum, מציע מנהל השיווק להוסיף מוקדנים לקבוצת מוקדני ה-Platinum. כדי להבטיח את יעילות מוקדני ה-Platinum, הוא מציע בנוסף גם לאפשר להם לתת שירות ללקוחות ה-Business. לשם כך הוא הגדיר את מדיניות השירות הבאה:
- קבוצת מוקדני ה-Business נותנת שירות רק ללקוחות Business.
 - קבוצת מוקדני ה-Platinum נותנת שירות לכולם, תוך מתן עדיפות ללקוחות Platinum.
 - אם לקוח Business מגיע ויש מוקדנים פנויים בשתי הקבוצות, הוא יועבר למוקדני ה-Business.
 - המערכת פועלת לפי מדיניות שהיא *preemptive*, ז"א ניתן בכל רגע להפסיק שירות של לקוח ולהחזירו להמתנה בתור מהסוג שלו, אבל אסור "לזרוק" לקוחות מהמערכת.
 - המדיניות הינה *work conserving*, ז"א לא ייתכן מצב שבו יש שרתים פנויים ובעת ובעונה אחת יש גם לקוחות הממתינים בתור.

2.4 תארו את הארכיטקטורה של המערכת המוצעת בעזרת סכמה המתארת את זרימת הלקוחות במערכת, תחת ההנחה שאין נטישות. (השלימו את התרשים)



לצורך בנית מודל נוזלים למערכת הנ"ל, נגדיר את המשתנים הבאים:

$X_1(t)$ = סה"כ מספר הלקוחות מסוג 1 במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

$X_2(t)$ = סה"כ מספר הלקוחות מסוג 2 במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

2.5 כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$.

תשובה:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} =$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} =$$

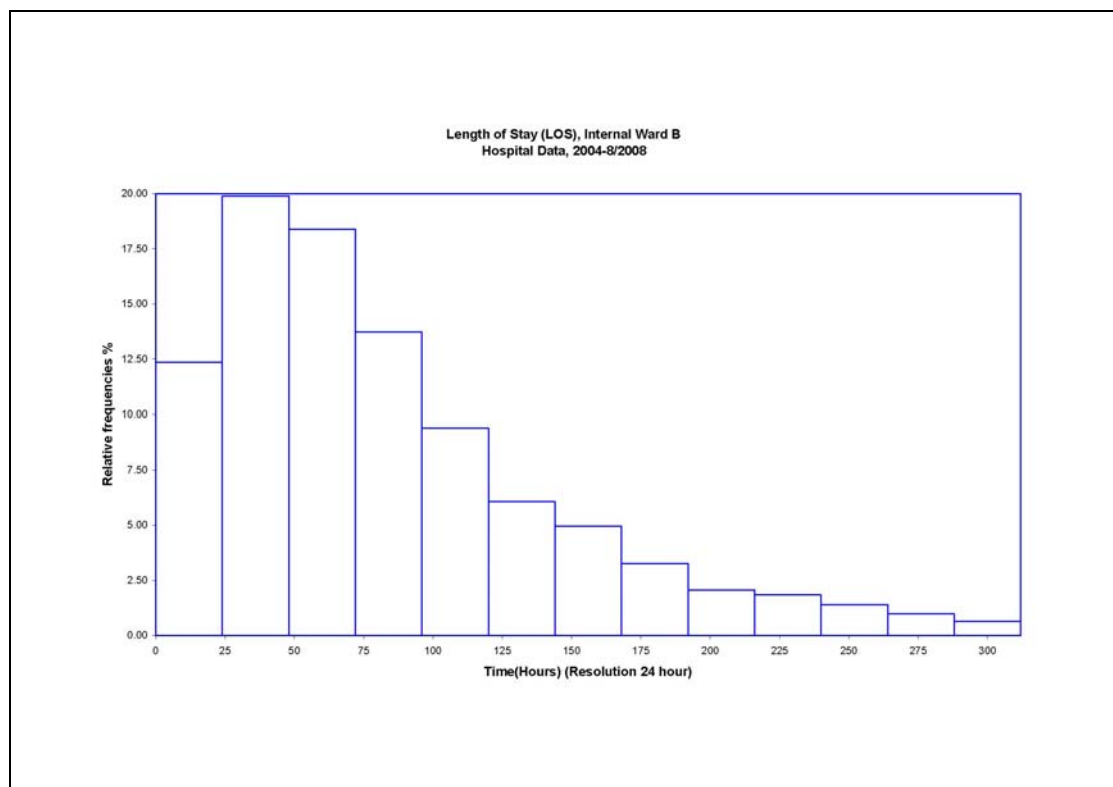
2.6 תארו בקיצור כיצד ניתן, בעזרת גליון אלקטרוני בלבד, לפתור בקירוב (מדויק ככל הנדרש) את המשוואה הדיפרנציאלית בסעיף 2.5.

תשובה:

שאלה 3 – יישום: בתי חולים

בית חולים כולל מחלקות אשפוז שונות. בכל מחלקה מספר קבוע של מיטות - N (בין 10 ל-50). כאשר מוחלט במיון לאשפוז חולה במחלקה כלשהי, מתבצע ברור האם אכן יש מקום במחלקה. במידה וכל המיטות תפוסות (המחלקה מלאה), החולה מועבר לאשפוז במחלקה אחרת, בה מטפלים בו. בדרך כלל רמת הטיפול במחלקה החלופית פחות טובה לחולה, כיוון שהצוות הסיעודי בה פחות מיומן בטיפול בבעיותיו הספציפיות. מצב זה אינו רצוי ולכן הוחלט לעקוב אחרי אחוז החולים שאין להם מקום במחלקה אליה יועדו לראשונה.

3.1 הגרף הבא מראה את התפלגות משך השהיה של חולה במחלקה כלשהי בימים. לאיזו משפחה של התפלגויות נראה שהגרף מתאים? כיצד הייתם בודקים השערה זו?



תשובה:

לצרכים מסוימים, ניתן להניח שחולה שוהה במחלקה מסוימת, שבה 30 מיטות, זמן המתפלג מעריכית עם ממוצע 6 ימים, ושתהליך סך הגעות חולים למחלקה זו הוא פואסוני, עם קצב הגעה קבוע של 6 חולים ביום.

3.2. איזה מודל נראה לכם מתאים לתיאור מספר החולים הנמצאים במחלקה הנידונה? מדוע? הגדירו את ערכי הפרמטרים של המודל.

תשובה:

3.3. שוקלים לשפץ את המחלקה הנידונה. כיצד תקבעו את מספר המיטות הנדרש על סמך הנתונים הנ"ל, כך שההסתברות שלחולה לא יהיה מקום במחלקה תהיה בסדר גודל של עד 7%? מהו פחות או יותר תחום מספר המיטות הנדרש?

תשובה:

3.4. בבדיקה מעמיקה יותר התגלה שקיימים הבדלים מהותיים בין רמת השרות התפעולית הניתנת במחלקות השונות. בטבלה הבאה נתונים כמה מנתוני המחלקות, כפי שנאספו ממערכות המידע של בית החולים.

3.4.1. התאימו לכל מחלקה את משטר השרות בה היא מתפקדת (QED, QD, או ED) והסבירו תשובתכם. חשבו את העומס המוצע (offered-load) של כל מחלקה. קבעו מהו פרמטר איכות השרות המתאים לכל מחלקה. (למשל, כאשר $N \approx R + \beta\sqrt{R}$, β הוא פרמטר איכות השירות).

מחלקה	מספר מיטות	ממוצע כמות חולים שמופנים למחלקה ביום	זמן אשפוז ממוצע בימים	אחוז התפוסה (ניצולת המיטות)	אחוז חולים שאין להם מקום
טיפול נמרץ	13	1.54	9.47	85%	24%
פנימיות (5 מחלקות)	180	34.32	5.24	94%	5.9%
יולדות (2 מחלקות)	60	15.52	2.8	67.5%	0.2%

תשובה:

מחלקה	משטר	עומס מוצע	פרמטר איכות השירות
טיפול נמרץ			
פנימיות (5 מחלקות)			
יולדות (2 מחלקות)			

3.4.2. מדוע למחלקת טיפול נמרץ אחוז גבוה של חולים שאין עבורם מקום למרות שאחוז תפוסתה בינוני (באופן יחסי, למשל ביחס למחלקות הפנימיות).

תשובה:

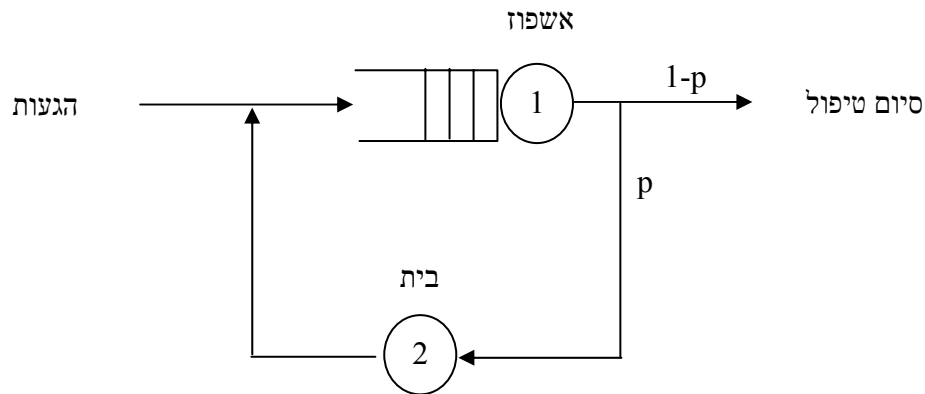
3.4.3. חוו דעתכם – האם הגיוני שנבחר משטר כמתואר למחלקת טיפול נמרץ? אם לא, לאיזה משטר הייתם מצפים ומדוע? מה לדעתכם היו הנסיבות שהביאו לבחירתו של משטר מסוג זה?

תשובה:

3.5. לאורך השנים, אוכלוסיית האזור שמשרת בית החולים גדלה. בית החולים מתעתד לבצע תכנון לטווח ארוך ולשם כך נדרש לאמוד את מספר המיטות הנחוצות בעוד 3 שנים במחלקות הפנימיות. לצורך כך, נניח כי בעוד 3 שנים קצב ההגעה למחלקות אלו יעלה פי 1.5. בית החולים רוצה לבחון מה יקרה לרמות השרות ואחוז התפוסה אם מספר המיטות יוגדל גם הוא פי 1.5. ביחס למצב הקיים, מה יקרה למדד אחוז התפוסה ומדד איכות השרות בעוד 3 שנים?

תשובה:

3.6. מחלקה אונקולוגית שונה ממחלקות אשפוז רגילות בכך שרוב החולים מתאשפזים לא לתקופה אחת רצופה אלא מגיעים לסדרות של אשפוז. כלומר, בכל פעם החולה מגיע לאשפוז של כמה ימים ואם מצבו מאפשר זאת, חוזר לביתו עד לסדרת הטיפולים הבאה (בדרך כלל אחרי מספר שבועות לא גדול). כדי לתאר את מספר החולים בטיפול / בבית, נשתמש ברשת התורים הבאה:



תחנה 1 מתארת את האשפוז בבית החולים לקבלת טיפול. בתחנה זו מספר ה"שרתים" הוא מספר המיטות במחלקה (N), והתור לפני התחנה הוא ההמתנה לאשפוז במיון. תחנה 2 מתארת את שהיית החולה בבית בין הטיפולים. לאחר כל טיפול מחליטים הרופאים אם יש צורך בטיפול נוסף או לא. % החולים שעבורם נדרש טיפול נוסף הוא $100 \cdot p$.

3.6.1 נגדיר משתנה מקרי K הסופר את מספר הטיפולים שכל חולה עובר. כיצד מתפלג K? מהי תוחלתו? (ניתן להיעזר בטבלת ההתפלגויות המצורפת בסוף המבחן)

תשובה:

3.6.2 כמה "שרתים" סביר שיהיו במודל של תחנה 2? הסבירו תשובתכם.

תשובה:

3.6.3 הסבירו מדוע ה- offered-load הוא $R = \frac{\lambda}{(1-p)\mu}$?

תשובה:

3.6.4 במודל הנ"ל, כל חולה המגיע למחלקה מחכה עד שתתפנה עבורו מיטה. הציעו מדד בו ניתן להשתמש על מנת לבדוק רמת שירות תפעולית?

תשובה:

3.7. ידוע כי מספר התקנים של רופאים ואחיות בבתי חולים פרופורציוני למספר המיטות במחלקה. יחס הפרופורציה שונה בין המחלקות השונות בהתאם לחומרה הקלינית וזמני הטיפול הנדרשים. לדוגמה: לכל 6 מיטות במחלקה פנימית יש תקן של אחות אחת, אך במחלקת טיפול נמרץ לכל 2 מיטות אחות אחת.

3.7.1 על איזה מדדי שירות תפעוליים משפיע מספר האחיות במחלקה? האם אלו המדדים החשובים ביותר לצורך תמיכה בקבלת החלטות?

תשובה:

3.7.2. מתוך המודלים שנלמדו בכיתה, באיזה מודל הייתם משתמשים על מנת לקבוע את מספר האחיות הדרוש? מדוע?

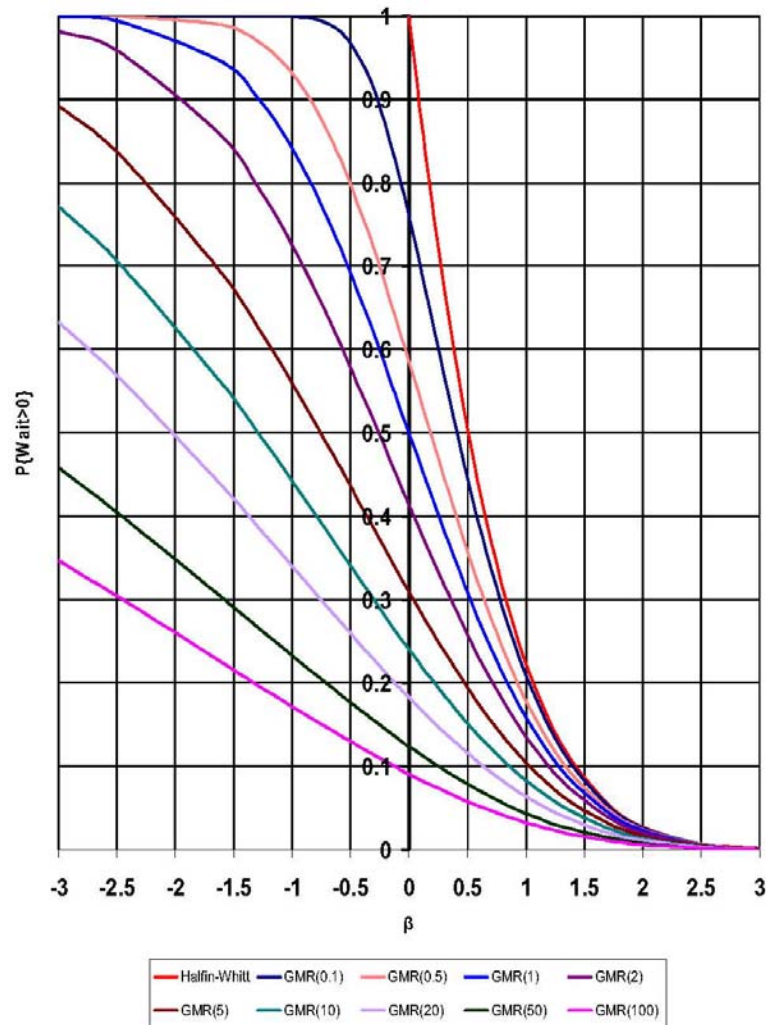
תשובה:

3.7.3. נניח כי קצב בקשות חולים לטיפול הניתן ע"י אחות הוא 20 בקשות לשעה (מכל החולים במחלקה), ומשך טיפול אחות מתפלג מעריכית עם ממוצע של 15 דקות. כמה אחיות צריכות להיות במחלקה אם רוצים שההסתברות שחולה ימתין לאחות לא תעלה על 30%? ענו על השאלה בעזרת הגרף המצורף. הסבירו את תשובתכם.

תשובה:

Erlang-A: The Garnett Delay-Functions

$P\{W_q > 0\}$ vs. the QOS parameter β , for varying patience θ/μ .



GMR(x) describes the asymptotic probability of delay as a function of β when $\frac{\theta}{\mu} = x$. Here, θ and μ are the abandonment and service rate, respectively.

Note: **Erlang-C** = limit of **Erlang-A**, as patience $\uparrow$ indefinitely.

שאלה 4 – תיאוריה ושימושיה: עומס מוצע (Offered-Load)

חלק 1. ייצוגים.

במערכת שירות $M_t | G | \infty$, המופע הוא פואסוני לא הומוגני בזמן עם קצב מופע $\{\lambda(t), t \geq 0\}$, ומשכי השירות S הם בלתי-תלויים, שווי התפלגות, ובלתי תלויים במופע. נסמן ב- $L(t)$ את מספר האנשים במערכת בזמן t ויהי $R(t)$ ממוצע מספרם: $R(t) = EL(t)$. ניתן להראות ש- $R(t)$ נתון על ידי כל אחד משלושת הביטויים הבאים:

$$R(t) = \int_{-\infty}^t \lambda(u) P(S > t - u) du = E \left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du \right) = E(S) \cdot E(\lambda(t - S_e))$$

S_e מסמן את "זמן שארית השירות" כפי שהוגדר בכיתה. (בייצוגים הנ"ל, $\lambda(t) = 0$ עבור t שליליים).

4.1.1 נניח שמשך השירות S הוא **דטרמיניסטי** $D : D \equiv S$. הוכיחו את השוויון בין שלושת ההצגות של $R(t)$ למקרה זה.

תשובה:

4.1.2 הסבירו כיצד ניתן להרחיב את המקרה הדטרמיניסטי ב- 4.1.1 הנ"ל למקרה של S המקבל מספר סופי של ערכים, דהיינו כיצד מוכיחים שאכן :

$$\int_{-\infty}^t \lambda(u) P(S > t-u) du = E \left(\int_{t-S}^t \lambda(u) du \right) = E(S) \cdot E(\lambda(t-S_e))$$

הערה : מאחר וניתן לקרב כל משתנה מקרי, בדיוק רב כרצונכם, על ידי משתנה מקרי המקבל מספר סופי של ערכים (מ"מ דיסקרטי), סעיף זה מוביל להוכחת שלושת הזהויות הנ"ל למקרה של S כללי.

תשובה :

חלק 2 . שימושים.

בכחה הוסבר ש- $R(t)$, כפי שהוגדר לעיל, משמש כהגדרת העומס המוצע (Offered Load) למערכת שירות בזמן t , כאשר המופע אליה ומשכי השירות בה הם כמתואר בחלק 1. (כזכור, $R(t)$ נמדד ב-Erlang).

4.2.1 הסבירו בקצרה מדוע אכן ההגדרה מתאימה. עשו זאת בהסתמך על הייצוג הרביעי הבא של $R(t)$:

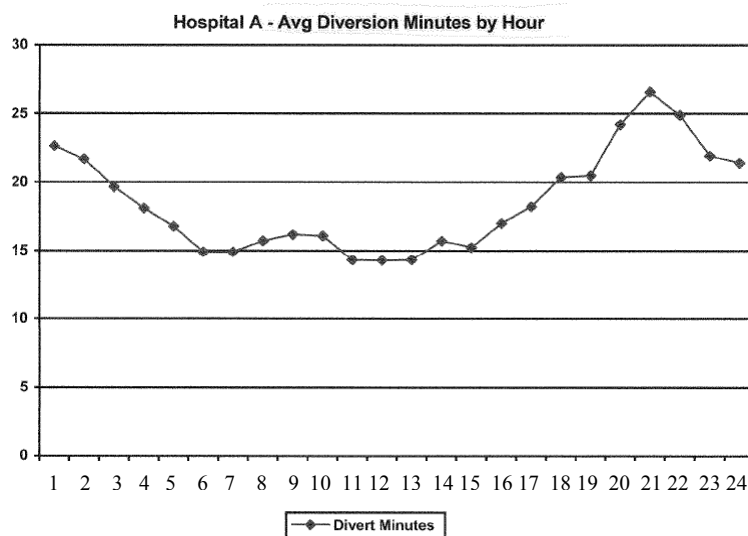
נסמן $A(t)$ – מספר המופעים הכולל עד זמן t (כולל).

$E[A(t)] = \Lambda(t)$ - תוחלת מספר המופעים המצטבר עד זמן t .

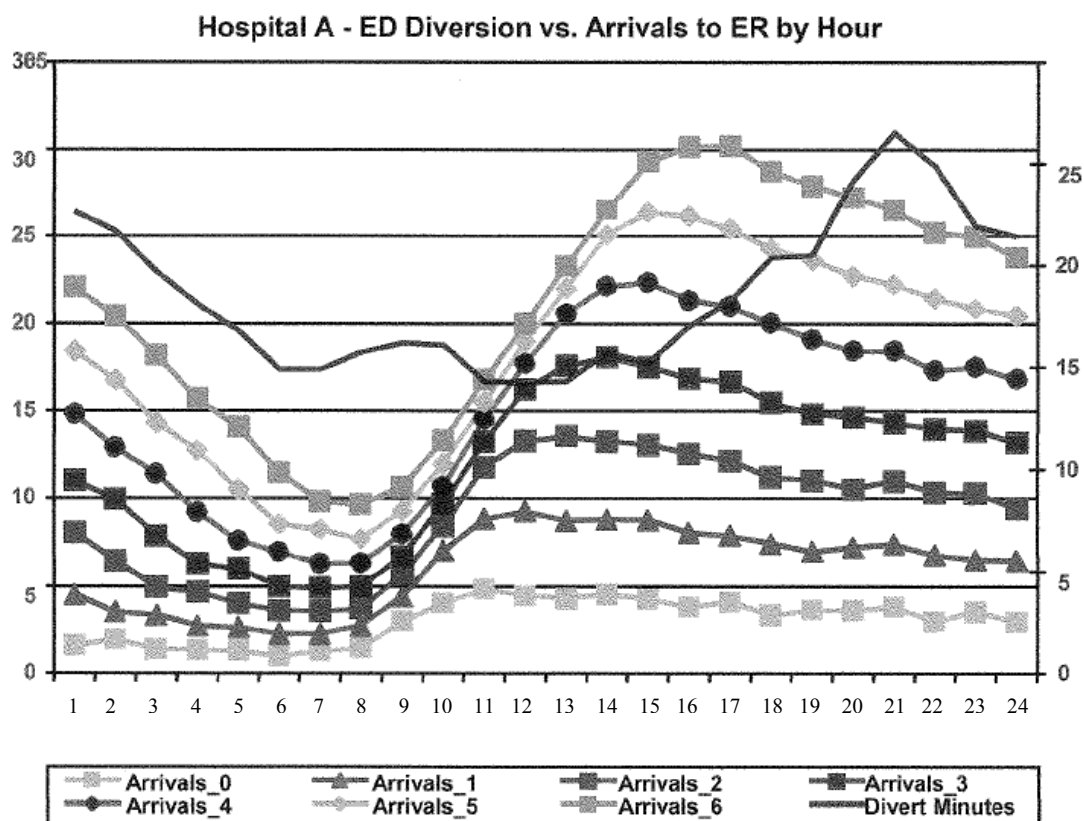
אזי, מאחת ההצגות של $R(t)$ נובע שמתקיים: $R(t) = E[\Lambda(t) - \Lambda(t - S)]$.

תשובה:

4.2.2 הגרף הבא מתאר את תופעת ה-Ambulance Diversion (הסטת אמבולנסים) שתוארה בכיתה (ונפוצה בארה"ב). למשל ערך הגרף בשעה 21:00 הוא אחוז הפעמים בתקופה הנמדדת שהשעה 20:00-21:00 הוכרזה כשעה שבה המיון חסום לכניסת חולים חדשים דרך אמבולנסים (במקרה שלנו 27%).



הגרף הבא מנסה לקשר בין שעת שיא הסטט האמבולנסים לשיא העומס במיון. הסבירו את הגרף.
 כיצד ניתן היה לשפר את ההתאמה בין הזמנים בהם מתרחשים השיאים?
 שימו לב: תוחלת זמן השהיה במיון הנדון היא 6 שעות.



תשובה:

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Gen. Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$N \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multi-nomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(m, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; m \geq 1$	$k = m, m+1, \dots$	$\left[\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t} \right]^m$	$\frac{m}{p}$	$\frac{mq}{p^2}$	Number of trials till m -th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$\exp\{-\lambda(1 - e^t)\}$	λ	λ	
Hyper-geometric	$X \sim HG(N, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N + M$	$\max(0, n - M) \leq k$ $k \leq \min(n, N)$	$\sum_k e^{tk} p(k)$	$\frac{N \cdot N}{N+M}$	$n \cdot \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N+M-n}{N+M-1}$	N – special elements M – ordinary ones n – sample size k – special in sample
		Density Function						
Beta	$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	Complicated	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ $= (x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp\left\{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\}$	μ	σ^2	