



מרצה : פרופסור אבישי מנדלבאום

מתרגלת : גלית יום-טוב

תאריך הבחינה : 19.07.2009

מס' סטודנט _____

שם _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד א' – סמסטר אביב תשס"ט 2009

פתרון

- המבחן נמשך שלוש שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- המבחן בחומר סגור.
- מותר להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל 28 עמודים, כולל עמוד זה.
- כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת הסברים או הוכחות רק אם התבקשתם במפורש לעשות זאת.

ניקוד:	שאלה 1	_____ מתוך 11 נקודות	תרגילי בית
	שאלה 2	_____ מתוך 14 נקודות	הרצאות/תרגולים/בחינות קודמות
	שאלה 3	_____ מתוך 14 נקודות	יישום
	שאלה 4	_____ מתוך 11 נקודות	תיאוריה

סה"כ _____ מתוך 50 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 – תרגילי בית

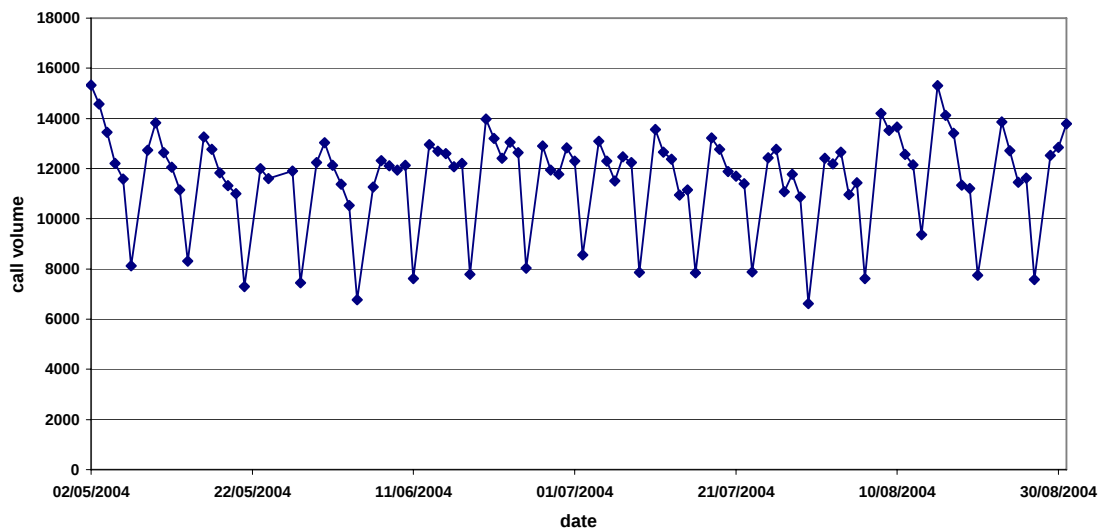
שאלה 1 - חלק 1. מופעים ותחזיות.

נתונים סיכומים של נתוני שיחות טלפון, במוקד של חברת תקשורת ישראלית, על פני שלושה חודשים. הנתונים כוללים, לכל אינטרוול זמן של 1/2 שעה, את כמות השיחות הנכנסות למוקד. מוגדרים 33 אינטרוולים במהלך יום עבודה, בין השעות 7:00 ל-23:30.

נסמן, כמו בתרגיל הבית, N_{jk} להיות מספר השיחות הנכנסות באינטרוול זמן k ביום j

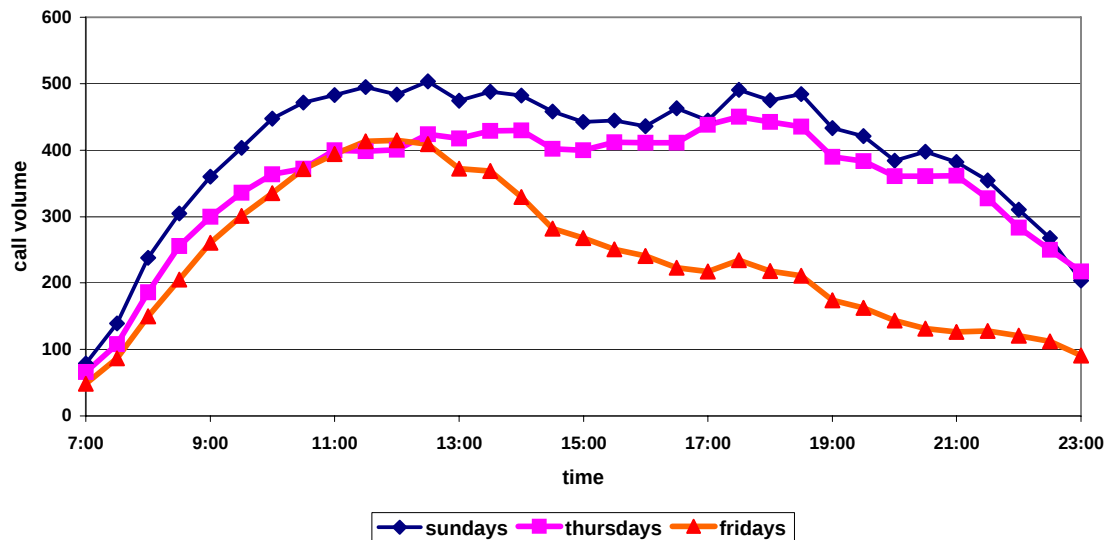
F_{jk} ו- $(j=1,\dots,6)$ להיות תחזית מספר השיחות לאינטרוול זה.

1.1.1 הגרף הבא מציג את סך השיחות הנכנסות ליום בתקופה 2/5/04-31/08/04 (בימים א'-ו', ללא שבת). אילו מסקנות (בעלות משמעות תפעולית) ניתן להסיק מהגרף?



תשובה: ניתן לראות מבנה שבועי בו יש בימי שישי הרבה פחות שיחות וביום ראשון המספר הגבוה ביותר של שיחות. באופן כללי נראה שמספר השיחות יורד הדרגתית מראשון עד שישי. להבחנות אלו יש כמובן משמעות תפעולית בהקשר של החלטות איוש.

1.1.2 הגרף הבא מציג את ממוצע מספר המופעים בכל אינטרוול זמן (חצי שעה) במהלך היום, בימי ראשון, חמישי ושישי בחודש יוני. השוו בין הגרפים השונים. אילו מסקנות תפעוליות ניתן להסיק מגרף זה?



תשובה: בכל הימים יש מקסימום קצב מופע (התקופה העמוסה ביותר) בצהריים בסביבות 12. יום ראשון הוא העמוס ביותר בשעות אלו (7 עד 12) מהצהריים, ימי חמישי וראשון די דומים בצורתם (עדיין ראשון עמוס יותר), אך ליום שישי צורה שונה: החל מהצהריים קצב ההגעה הולך וקטן. השלכות תפעוליות: איוש ב"צורה דומה" לימי ראשון וחמישי, עם פחות מוקדנים ביום חמישי; ליום שישי "צורה" שונה. דבר זה יכול להשפיע לדוגמה על מבנה משמרות בימים אלו.

1.1.3 תארו במדויק, ככל שתוכלו, כיצד ניתן לייצר את הגרף המופיע בסעיף 1.1.2 בעזרת תוכנת SEESat. (לשם תזכורת הפונקציות של התוכנה, צרפנו תצוגה של שני עמודים מממשק התוכנה).

תשובה: נבחר במשתנה Arrivals to system, ב- options באופציה count, בסוג שדות total. וברזולוציה של 30 דקות, משעה 7:00 עד 23:30. נעבור לבחירת התאריכים ונסמן את יוני 2004. נבחר באופציית ה- aggregated days ונסמן את ימי ראשון, חמישי ושישי.

1.1.4 תארו במדויק את אחת משיטות התחזית (Forecasting) שהוצגו בכיתה או בתרגילי הבית.

ציינו באיזו שיטה בחרתם. (השתמשו בתשובתכם בסימונים N_{jk} ו- F_{jk} מסעיף 1.1.1)

תשובה: למשל ממוצע נע (4) - נגדיר את התחזית הבאה על סמך ממוצע של ארבעת האינטרוולים האחרונים מאותו סוג (למשל יום ג' בין 10:00 ל- 10:30):

$$F_{j,k} = \frac{N_{j-6,k} + N_{j-12,k} + N_{j-18,k} + N_{j-24,k}}{4}$$

1.1.5 בכיתה הוגדרו 2 מדדים לקביעת טיב התחזית F_{jk} :

RMSE (Root Mean-Square Error) ו- APE (Average Percent Error). תארו (במשפט אחד) כיצד מסיקים באיזו שיטת תחזית לבחור, בהתבסס על מדדים אלו. איזה מדד מהשניים יותר אינטואיטיבי לשימוש? הסבירו מדוע.

תשובה: ככל שהמדדים קטנים יותר כך התחזית טובה יותר. ולכן נבחר במודל עם הערכים המינימלים.

מדד APE יותר אינטואיטיבי כיוון שקל יחסית להגדיר מהו אחוז הטעות שאנו מוכנים לסבול במערכת כלשהי.

1.1.6 נניח כי המופעים למוקד השרות הם לפי תהליך פואסון עם קצב מופע λ_{jk} . נניח שהצלחנו

לחזות את ערכי הפרמטר λ_{jk} במדויק ($F_{jk}=\lambda_{jk}$). האם אתם מצפים שמדדי הטיב

RMSE ו- APE יהיו שווים ל-0? הסבירו תשובתכם.

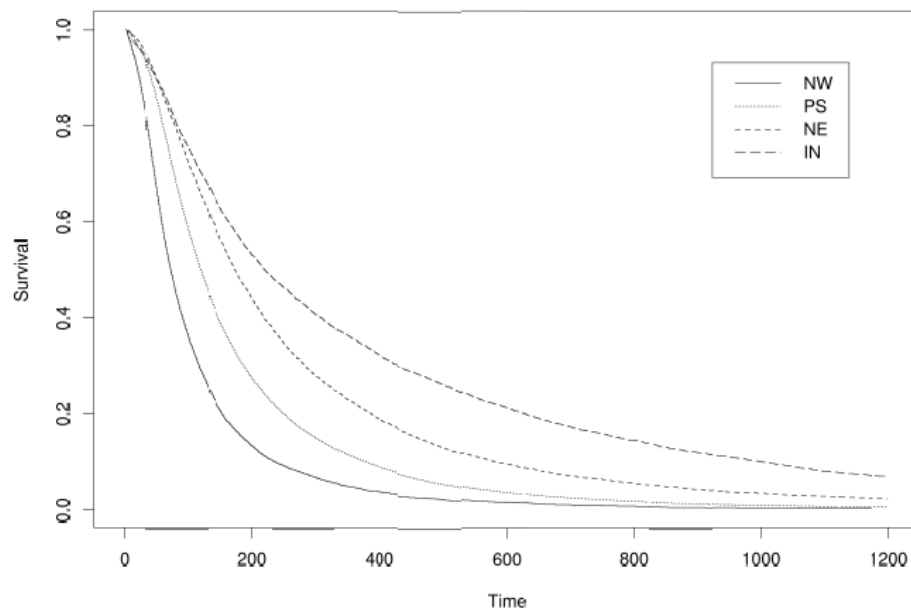
תשובה: לא. הערכים לא צפויים להיות 0, מכיוון שגם אם הפרמטר ידוע באופן מדויק, לתהליך עצמו יש השתנות סטוכסטית (שונויות), והדגימות לא תהיינה זהות לממוצע.

שאלה 1 - חלק 2. פונקציות שרידות ופונקציות סיכון של זמני שירות

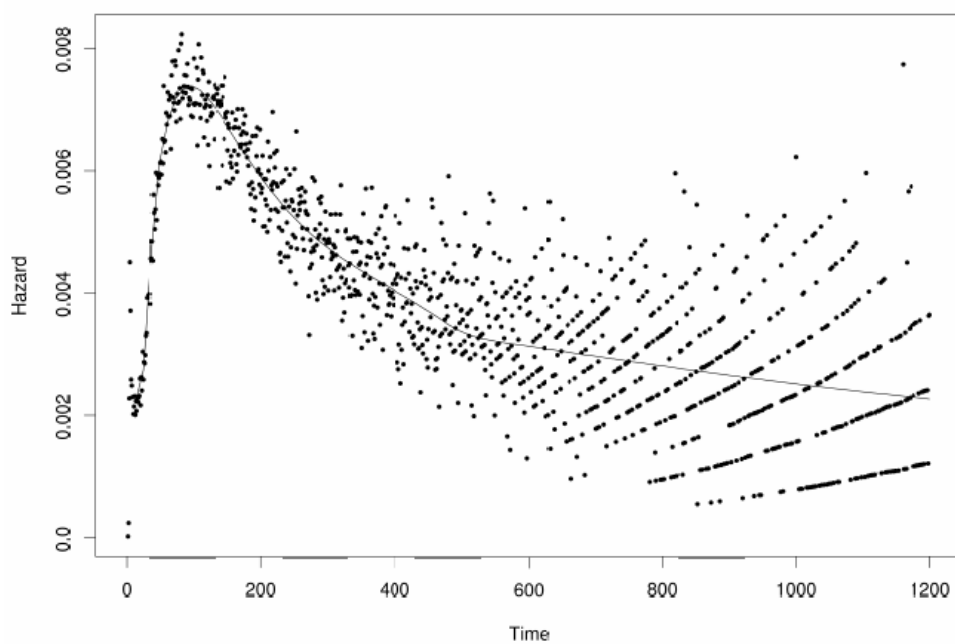
שני הגרפים שלהלן מבוססים על נתוני מוקד שירות טלפוני של בנק ישראלי קטן. נותחו ארבעה סוגי שירות עיקריים: NW, NE, IN, PS. גרף 1 מתאר פונקציות שרידות (survival functions) של ארבעת סוגי השירות. נקודות בגרף 2 הן אמדים לפונקצית הסיכון (hazard rate) של זמן השירות הכולל (כל סוגי השירות ביחד), ברזולוציה של שנייה אחת. הקו בגרף 2 הוא אמד לפונקצית הסיכון אחרי החלקה.

גרף 1

Nov-Dec



גרף 2



1.2.1 איך הייתם אומדים את תוחלת זמן השירות של סוג שירות מסוים, לו הייתה נתונה לכם רק פונקציית השרידות (survival) שלו $S(x), x \geq 0$?

תשובה:

$$\text{נשתמש בנוסחת הזנב: } E[S] = \int_0^{\infty} S(x) dx.$$

1.2.2 איך הייתם אומדים את תוחלת זמן השירות של סוג שירות מסוים, לו הייתה נתונה לכם רק פונקציית הסיכון (hazard rate) שלו $h(x), x \geq 0$?

תשובה:

ניתן לקבל את פונקציית השרידות מפונקציית הסיכון: $S(x) = \exp \left\{ - \int_0^x h(u) du \right\}$ ואחר כך להשתמש בנוסחת הזנב.

1.2.3 סדרו את ארבעת סוגי השירות לפי תוחלתם (מהקצרה ביותר לארוכה ביותר)

תשובה:

$$E(NW) < E(PS) < E(NE) < E(IN)$$

1.2.4 הסבירו את הצורה של "נקודות המסודרות על קו עולה", הבולטת בחלק הימני של גרף 2.

הערה:

האמידה של פונקצית הסיכון בגרף 2 נעשתה באופן הבא :

- נסמן ב A_k את מספר התצפיות עם זמן שירות ששווה ל- k שניות.
- נסמן ב η_k את מספר התצפיות עם זמן שירות שגדול או שווה מ- k שניות.
- האמדים לפונקצית הסיכון בשניה k (נקודות בגרף 2) חושבו ע"י $\widehat{h(k)} = A_k / \eta_k$.

הסבר:

הנקודות המסודרות על קו עולה מתאימות ל- $A_k = 1$, $A_k = 2$, ..., משום ש- η_k יורד כאשר הזמן עולה, קוים אלו עולים. (למשל הקו התחתון מתאים ל- $A_k = 1$)

שאלה 2 - תרגילי כיתה/הרצאות/מבחנים קודמים

שאלה 2 - חלק 1. תחומים תפעוליים

בעמוד הבא מצורף דו"ח ACD של מוקד טלפוני אותו ניתחנו בכיתה (בעמודה האחרונה של כל חצי שעה מופיע ה- *offered load*, המסומן ב-R).

2.1.1 נתמקד בשלוש חצאי השעות 13:30–14:00, 14:30–15:00 ו- 17:00–17:30. התאימו אליהן את המדיניות התפעולית המתאימה מבין: QED, ED ו-QD ונמקו בקצרה אך במדויק ככל שתוכלו.

פתרון:

אינטרוול	מדיניות	נימוק קצר
13:30–14:00	ED	נטישות 10%, ASA בסדר גודל של זמן שרות, $\beta = \frac{N-R}{\sqrt{R}} \approx \frac{107-180}{14} = -1.25$
14:30–15:00	QED	נטישות כ- 2-3%, ASA בסדר גודל <u>פחות</u> מזמן שרות, $\beta \approx 0$
17:00–17:30	QD	נטישות והמתנות זניחות. $\beta \approx \frac{135-112}{\sqrt{112}} > 2$

2.1.2 עבור כל אחת מהאינטרוולים בסעיף 2.1.1 נניח כי מספר המופעים היה גדל פי 4 וגם מספר המוקדנים (שרתים) היה גדל פי 4.

תנו הערכתכם לאחוז הנוטשים תחת תרחיש חדש זה. נמקו בקצרה ובמדויק ככל שתוכלו.

אינטרוול	% הנוטשים הנוכחי	% הנוטשים החדש	נימוק קצר
13:30–14:00	9.4%	9.4% לא משתנה	$\lambda(1-P(Ab)) = \mu N \Rightarrow P(Ab) = 1 - \frac{1}{\rho}$ לא משתנה. $\left(\rho = \frac{\lambda}{\mu N} \right)$
14:30–15:00	2.7%	1.35% לפחות קטן פי 2	במדיניות QED $P(Ab) \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$ לכן יהיה שיפור של לפחות פי $\sqrt{4} = 2$ (למרות שגם β משתנה)
17:00–17:30	0%	0%	מערכת גדולה יותר, סביר שלא תהיה גרועה יותר.

Charlotte – Center

Time	Recvd	Answ	Abn %	ASA	AHT	Occ %	On Prod%	On Prod FTE	R
0	20,577	19,860	3.5%	30	307	95.1%	85.4%	222.7	
8:00	332	308	7.2%	27	302	87.1%	79.5%	59.3	55.70
8:30	653	615	5.8%	58	293	96.1%	81.1%	104.1	106.29
9:00	866	796	8.1%	63	308	97.1%	84.7%	140.4	148.18
9:30	1,152	1,138	1.2%	218	303	90.8%	81.6%	211.1	193.92
10:00	1,330	1,286	3.3%	22	307	98.4%	84.3%	223.1	226.84
10:30	1,364	1,338	1.9%	33	296	99.0%	84.1%	222.5	224.30
11:00	1,380	1,280	7.2%	34	306	98.2%	84.0%	222.0	234.60
11:30	1,272	1,247	2.0%	44	298	94.6%	82.8%	218.0	210.59
12:00	1,179	1,177	0.2%	1	306	91.6%	88.6%	218.3	200.43
12:30	1,174	1,160	1.2%	10	302	95.5%	93.6%	203.8	196.97
13:00	1,018	999	1.9%	9	314	95.4%	91.2%	182.9	177.58
13:30	1,061	961	9.4%	67	306	100.0%	88.9%	163.4	180.37
14:00	1,173	1,082	7.8%	78	313	99.5%	85.7%	188.9	203.97
14:30	1,212	1,179	2.7%	23	304	96.6%	86.0%	206.1	204.69
15:00	1,137	1,122	1.3%	15	320	96.9%	83.5%	205.8	202.13
15:30	1,169	1,137	2.7%	17	311	97.1%	84.6%	202.2	201.98
16:00	1,107	1,059	4.3%	46	315	99.2%	79.4%	187.1	193.73
16:30	914	892	2.4%	22	307	95.2%	81.8%	160.0	155.89
17:00	615	615	0.0%	2	328	83.0%	93.6%	135.0	112.07
17:30	420	420	0.0%	0	328	73.8%	95.4%	103.5	76.53
18:00	49	49	0.0%	14	180	84.2%	89.1%	5.8	4.90

2.1.3 בשורה הראשונה של דו"ח ה-ACD מסוכמים מדדי המוקד היומיים. למשל,

♦ 20,577 מופעים ליום, או $\frac{20,577}{21} \approx 980$, ז"א כ- $\lambda = 990$ מופעים בממוצע לחצי שעה,

♦ 307 שניות משך שירות ממוצע, או כ- $E(S) = 5$ דקות,

♦ 222.7 מוקדנים בממוצע, או כ- $n = 220$ מוקדנים.

♦ 95.1% נצילות ממוצעת, או כ-95% נצילות.

בשורה ראשונה זו ישנה טעות. מהי טעות זו? הסבירו בקצרה.

רמז: כדי לאתר את הטעות שימו לב לחישוב הפשוט הבא:

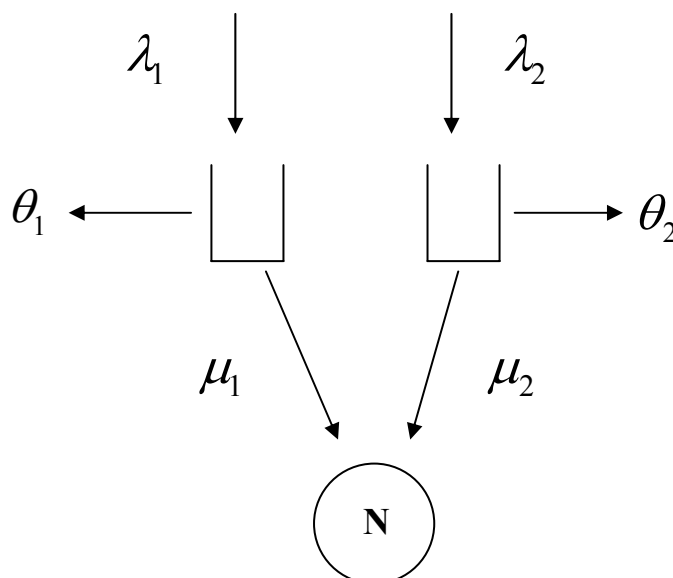
$$\frac{\lambda \cdot E(S)}{n} = \frac{\frac{990}{30} \cdot 5}{220} \approx 75\%$$

כיצד מתיישב חישוב פשוט זה עם הנתון של 95.1% נצילות יומית? הסבירו בקצרה.

הטעות היא: 222.7 גדול מהממוצע האמיתי, אכן 75% לא מייצג את הנצילות היומית.

הסבר: על סמך עמודת FTE, 222.7 גדול כמעט מכל רמות האיוש של חצאי השעות, ולכן לא יכול להיות ממוצע רמת איוש יומי. (לעומת זאת, $E(S)$ יומי של 3.7 שניות אכן נראה מתאים לעמודה שמתחתיו, וכך גם הנצילות הממוצעת של 95%).

נתונה מערכת תורים בארכיטקטורת V, המתוארת בציור הבא :



הפרמטרים של מודל המערכת נתונים ע"י :

- ♦ λ_1 λ_2 - קצבי מופע לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ μ_1 μ_2 - קצבי שירות לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ θ_1 θ_2 - קצבי נטישה אינדיבידואלים של לקוחות מסוג 1 (2),
- ♦ N - מספר השרתים בתחנה

המערכת פועלת לפי מדיניות שהיא *preemptive*, ז"א ניתן בכל רגע להפסיק שירות של לקוח ולהחזירו להמתנה בתור מהסוג שלו. בנוסף, המדיניות הינה *work conserving*, ז"א לא ייתכן מצב שבו יש שרתים פנויים ובעת ובעונה אחת יש גם לקוחות הממתינים בתור.

לצורך בניית מודל נוזלים למערכת הנ"ל, נגדיר את המשתנים הבאים :

$$X_1(t) = \text{סה"כ מספר הלקוחות מסוג 1 במערכת (בשירות או בתור), בזמן } 0 \leq t$$

$$X_2(t) = \text{סה"כ מספר הלקוחות מסוג 2 במערכת (בשירות או בתור), בזמן } 0 \leq t$$

2.2.1 כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$, תחת ההנחה שהתחנה נותנת עדיפות ללקוחות מסוג 1.

תשובה:

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = \lambda_1 - \mu_1 (X_1(t) \wedge N) - \theta_1 (X_1(t) - N)^+$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = \lambda_2 - \mu_2 (X_2(t) \wedge (N - X_1(t))^+) - \theta_2 (X_2(t) - (N - X_1(t))^+)^+$$

2.2.2 כתבו ביטוי למספר הכולל של הממתינים בתור.

תשובה:

$$(X_1(t) + X_2(t) - N)^+$$

2.2.3 רשמו ביטוי לאחוז הנוטשים מסוג 1 באינטרוול $[0, T]$.

תשובה:

$$P\{Ab\} = \frac{\int_0^T \theta_1 (X_1(t) - N(t))^+ dt}{\int_0^T \lambda_1(t) dt}$$

2.2.4 תארו בקיצור כיצד ניתן, בעזרת גיליון אלקטרוני בלבד, לפתור בקירוב (מדויק ככל הנדרש) את המשוואה הדיפרנציאלית בסעיף 2.2.1.

תשובה: נתחיל עם $X(0) = (X_1(0), X_2(0))$ נתון.

לאחר מכן, עבור $n = 1, 2, \dots$, $t_n = t_{n-1} + \Delta$ נחשב,

$$X_1(t_n) = X_1(t_{n-1}) + \lambda_1 \Delta - \mu_1 (X_1(t_{n-1}) \wedge N) \Delta - \theta_1 (X_1(t_{n-1}) - N)^+ \Delta$$

$$X_2(t_n) = X_2(t_{n-1}) + \lambda_2 \Delta - \mu_2 (X_2(t_{n-1}) \wedge (N - X_1(t_{n-1}))^+) \Delta - \theta_2 (X_2(t_{n-1}) - (N - X_1(t_{n-1}))^+)^+ \Delta$$

ונקבל את $X(0), X(\Delta), X(2\Delta), \dots$ ככל ש- Δ קטן יותר, כך הקירוב מדויק יותר.

שאלה 3 – יישום: בתי חולים

להלן כתבה שפורסמה בחודש יוני 2009:

TheMarker Online

שלח להדפסה

בית החולים איכילוב יפתח היום חדר מיון מהיר למקרים קלים; המיון החדש הוא חלק מתוכנית שיפור כוללת

17.6.2009 | 08:57 רוני לינדר-גנץ

<< חדר מיון מהיר לטיפול במקרים קלים, שיעבוד לצד חדר המיון הכללי של בית החולים, ייפתח היום לתקופת הרצה בבית החולים איכילוב בתל אביב. חדר המיון של איכילוב מדורג כיום במקום השני בישראל מבחינת העומס, ומגיעים אליו יותר מ-180 אלף פונים בשנה.

הקמת המיון החדש היא חלק מתוכנית שיפור כוללת של חדרי המיון באיכילוב שעלותה 20 מיליון שקל. במיון החדש יטופלו פונים מתחת לגיל 60, המסוגלים ללכת וסובלים מבעיות פשוטות כגון כאבי ראש, בטן וגרון, חתכים קטנים, כאבי אוזניים ובעיות עיניים. המטרה היא לייעל את תהליכי העבודה במיון ולקצר את זמני ההמתנה של החולים ואת איכות הטיפול בהם.

המיון המהיר יפעל על פי נוהלי עבודה שהותאמו לטיפול במקרים קלים. בית החולים הציב לעצמו יעד שלפיו אנשים שיגיעו אליו יאושפזו או ישוחררו לביתם בתוך שעותיים לכל היותר. זאת, לעומת ממוצע של כארבע שעות, ולעיתים אף יותר, במיון הרגיל.

חדר המיון החדש ממוקם בבניין חדש שהקמתו נמשכה כשמונה חודשים, וגיוסו בעבורו עשרה אנשי צוות נוספים. התנאים הפיסיים בו טובים, והוא אמור להתחרות בין השאר במוקדי החירום של קופות החולים באזור המרכז.

"היה לנו ברור שכדי לשפר את הטיפול בחולים הקשים במיון צריך להוציא ממנו את המקרים הקלים", אמר ד"ר רוני גמזו, מנהל בית החולים הכללי באיכילוב. "ברור שגם המקרים הקלים ירוויחו מכך - חוויית השירות שלהם תהיה נעימה בהרבה וזמן ההמתנה יתקצר באופן משמעותי".

באחרונה עלה לכותרות מצבם העגום של חדרי המיון בישראל בעקבות הכרזתו של סגן שר הבריאות, יעקב ליצמן, כי יערוך ביקור פתע בבתי החולים בשעות הלילה.

3.1 לפי הכתבה, לכמה סוגים מפרידים את החולים המגיעים לחדר המיון באיכילוב, ולפי איזה קריטריון? אילו עוד סוגי הפרדות אתה מכיר, מבתי חולים אחרים?

תשובה:

עפ"י הכתבה החולים באיכילוב מופרדים לשתי קטגוריות: קלים, ורגילים, עפ"י חומרת המצב הרפואי, או בהתאם לזמן הטיפול הנדרש. ניתן להפריד חולים גם לפי סוג הטיפול הנדרש לדוגמה: פנימי, אורתופדי, יולדות וכדומה.

בית החולים מודע לנושא היתרון לגודל. לכן, לפני החלטתו להפריד בין החולים הקלים לקשים יותר, בהשקעה כה גדולה, הוא ניסה ליישם מדיניות של עדיפויות בחדר המיון הכללי. מההיבט התפעולי, הפרדת החולים לשתי הקטגוריות מתבססת על משך השרות הנדרש לחולה. חולים "קלים" זקוקים לטיפול קצר יחסית לחולים הקשים יותר (נכנה אותם "רגילים" מכאן ואילך). מנהל בית החולים טען שכדי לקצר את זמן השהייה הממוצע במיון יש לתת עדיפות לחולים הקלים.

3.2 הסבירו את טענת המנהל. האם היא נכונה?

תשובה:

כאשר המטרה היא קיצור משך השהייה הממוצע, אזי ההערכה היא שעלות ההמתנה של כל החולים זהה. אזי לפי כלל ה- $C\mu$, כדאי לתת עדיפות לחולים עם קצב שרות גבוה יותר, שהם החולים הקלים, ואז תוחלת זמן ההמתנה של כלל החולים תקטן לעומת כל מדיניות שרות אחרת. ולכן טענתו נכונה.

3.3 מנהל המיון הנוכחי סירב לתת עדיפות דווקא לחולים קלים. טענתו היא שהנזק הנגרם כתוצאה מהמתנה ארוכה לחולים רגילים גבוה יותר מחולים קלים, ולכן אם רוצים להפעיל מדיניות עדיפויות, צריך לתעדף חולים רגילים. כיצד ניתן למדל את נזקי ההמתנה, והאם ניתן בעזרת המידול הזה להצדיק את מנהל המיון?

תשובה:

ניתן להגדיר "עלות" המתנה לכל סוג חולה, כאשר עלות ההמתנה של חולה רגיל גבוהה מעלות ההמתנה של חולה קל. באופן זה כאשר מפעילים את כלל ההחלטה $C\mu$, יתכן שדווקא החולים הרגילים יקבלו עדיפות. (קיימת הכללה לכלל ה- $C\mu$ לעלויות לא ליניאריות, שהיא נראית רלוונטית יותר במקרה זה)

מנהל בית החולים הצליח לשכנע את הנהלת בית החולים בצורך לקיצור משכי שהיה. כדי שחדר המיון לא יפעל בניגוד לדחיפות הרפואית, הוחלט להפריד את שתי הקבוצות לשני חדרי מיון נפרדים, כפי שמתואר בכתבה.

ננסה עתה לבחון, **תפעולית**, מה יקרה בחדר המיון החדש. לשם כך דרושים לנו נתונים נוספים. בדיקה ראשונה שביצענו מעלה שאחוז החולים המתאימים להפניה למיון המהיר הוא 10% מכלל מופע החולים.

3.4 מנהל בית החולים רוצה להעריך את גודל השטח הדרוש למיון החדש, ולהשוותו למיון הנוכחי. הוא מכיר את חוק Little, והחליט בעזרתו, ובעזרת הנתונים המופיעים בכתבה, לחשב כמה חולים קלים היו בממוצע במיון הרגיל, בכל שעה, לפני השינוי, וכמה יהיו במיון החדש. בשני הסעיפים הבאים, שחזרו את חישובי מנהל בית החולים.

3.4.1 מספר החולים הקלים ששוהים במיון הישן, בממוצע שנתי, על סמך נתוני הכתבה הוא :

תשובה :

$$E[L] = \lambda * E[W] = \left(\frac{180,000}{365 * 24} * 0.1 \right) * 4 = 2.05 * 4 = 8.2$$

על סמך חוק ליטל :

3.4.2 כמה חולים בממוצע מצפה מנהל בית החולים שיהיו במיון החדש, בכל רגע נתון, בהנחה שהיעד התפעולי שהוצב הוא שהייה של שעתיים בממוצע?

תשובה :

$$E[L] = \lambda * E[W] = \left(\frac{180,000}{365 * 24} * 0.1 \right) * 2 = 2.05 * 2 = 4.1$$

3.4.3 כאמור, מנהל בית החולים מבקש להשתמש בחישוביו, בסעיפים 3.4.1 ו- 3.4.2, כדי לתכנן את גודל המיון החדש. האם דרכו מוצדקת? הסבירו תשובתכם. אם לא, הציעו עקרונית (ללא פירוט) דרך חלופית.

תשובה :

השימוש בחוק Little הוא בעייתי מכמה סיבות :

1. מספר החולים בחדר המיון משתנה, בין שעות היממה (הרבה ביום ומעט בלילה), בין ימי השבוע (הרבה בימים רגילים ומעט בסופי שבוע) ולפי עונות השנה.
2. חדרי מיון צריכים לתת מענה גם למקרים של אירוע רב נפגעים, שקורה לעיתים רחוקות, ושטח חדר המיון צריך לאפשר התמודדות עם מקרים אלו.
3. חדר מיון נבנה לתקופה ארוכה, ולכן יש להתחשב גם בפרמטרים נוספים כמו גידול צפוי באוכלוסיה.
4. לעיתים מפרידים את המיון לסוגי חולים שונים הזקוקים לשטח שונה לפי סוגם (לדוגמה : טראומה / מתהלכים / שוכבים)

לכן, הסתכלות על ממוצע שנתי כולל תיתן ערך שסביר שיהיה נמוך משמעותית ממה שצריך בפועל.

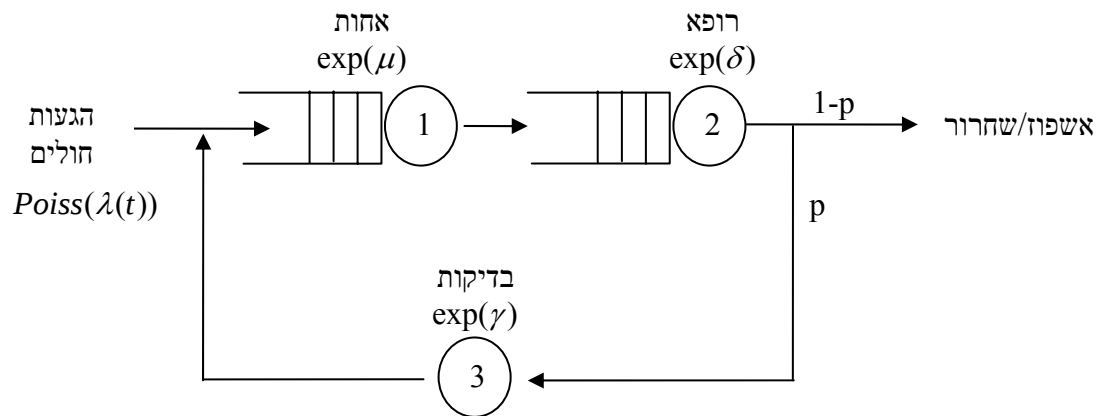
שיטה נכונה יותר תהיה להסתכל על התפלגות מספר החולים במיון, ולתת מענה לאחוז גבוה מהמקרים, כך שההסתברות שלחולה לא יהיה מקום במיון תהיה קטנה עד זניחה. בנוסף, יש לבצע ניתוחי רגישות, לגידול בכמות החולים הנכנסים, ולבדוק את השפעת הנהלים להפניית חולים במקרים של אירועים חריגים על הנעשה במיון.

הטענה שלפיה זמן השהיה יתקצר מארבע שעות לשעתיים מבוססת על העובדה שזמן הטיפול הכולל "נטו" בחולה קל קטן כמובן משעתיים, וכל יתר זמן שהייתו בחדר המיון נובע מהמתנות לרופא, לאחות ו/או לבדיקות.

נתאר בצורה מפורטת יותר את תהליך הטיפול בחולה בחדר המיון :

כאשר חולה מגיע למיון, הוא צריך להיבדק ע"י אחות ורופא. לעיתים הרופא שולח את החולה לבדיקות וכאשר מגיעות תוצאותיהן הוא חוזר לרופא ; לעיתים עדיין אין אבחנה והחולה נשלח לסדרת בדיקות נוספות, שלאחריהן הוא שוב צריך להיבדק ע"י רופא. כאשר הבדיקות מושלמות

ויש אבחנה, הרופא מחליט על צורת הטיפול ומחליט באם לאשפז או לשולחו לביתו.
ניתן לתאר (בקירוב שימושי) את התהליך המתואר לעיל בעזרת רשת התורים הבאה :



תחנה 1 מתארת את הביקור אצל האחות. בתחנה זו מספר ה"שרתים" N_1 הוא מספר האחיות במיון, והתור לפני התחנה הוא התור לביקור אצל האחות. נניח כי זמן הביקור אצל אחות מתפלג מעריכית עם פרמטר μ .

תחנה 2 מתארת את הביקור אצל הרופא. בתחנה זו מספר ה"שרתים" N_2 הוא מספר הרופאים במיון, והתור לפני התחנה הוא התור לביקור אצל הרופא. נניח כי זמן הביקור אצל רופא מתפלג מעריכית עם פרמטר δ .

תחנה 3 מתארת את תהליך הבדיקות שהחולה צריך לעבור. אנו לא נמדל במפורט תהליך זה, אלא רק את העיכוב הכללי שנוצר כתוצאה מבדיקות אלו. לכן נניח כי בתחנה 3 אינסוף שרתים, וזמן הבדיקות מתפלג מעריכית עם פרמטר γ .

בזמן כל ביקור אצל הרופא, מחליט הרופא אם יש צורך בבדיקות נוספות או לא. אחוז החולים שעבורם נדרשות בדיקות נוספות הוא $100 \cdot p$. (לכן, מספר הביקורים הכולל אצל הרופא/האחות מתפלג גיאומטרית עם פרמטר "הצלחה" $(1-p)$).

עד כה תארנו את המודל באופן פרמטרי, מדידות בחדר המיון מראות שערכי הפרמטרים הם כדלקמן: נמצא כי בממוצע חולה קל עובר 3 ביקורים אצל הרופא לפני החלטה על אשפוז/שחרור. עוד נמצא כי ביקור בודד של חולה אצל רופא מתפלג מעריכית עם ממוצע של 15 דקות, זמן ביקור אצל אחות מתפלג מעריכית עם ממוצע של 10 דקות, וזמן הבדיקות מתפלג מעריכית עם ממוצע של 15 דקות.

3.5 כיצד מתפלג זמן הטיפול הכולל (טיפול אחות, רופא, ובדיקות ללא המתנות) בחולה קל בחדר המיון? תנו תשובה מדויקת ככל שתוכלו.

תשובה:

זמן הטיפול הכולל מתפלג Phase-type, עם פאזות מעריכיות במבנה התואם את הרשת הנ"ל.

$$q = [1 \ 0 \ 0], \quad m = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & \frac{1}{\delta} & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.6 מהו ממוצע משך הטיפול הכולל בחולה קל?

תשובה:

$$\text{ממוצע זמן הטיפול הוא: } (15+10)*3 + 15*2 = 25*3 + 30 = 105 \text{ min} = 1.75 \text{ hour}$$

3.7 מהו מספר הרופאים והאחיות המינימלי הדרוש לטיפול כך שמספר החולים במיון לא "יתפוצץ"? בססו את תשובתכם על שיקולי מצב יציב (ז"א מופע בקצב קבוע).

תשובה:

זמן הטיפול בחולה ע"י צוות רופא או אחות הוא :

$$\text{רופא: } 15*3 = 45 \text{ min} = 0.75 \text{ hour}$$

$$\text{אחות: } 10*3 = 30 \text{ min} = 0.5 \text{ hour}$$

על פי נתוני הכתבה, מספר החולים הנכנסים למיון הוא בממוצע $\bar{\lambda} = \left(\frac{180,000}{365*24} * 0.1 \right) = 2.05$ חולים בשעה.

$$\text{ולכן תנאי היציבות לאחיות הוא: } \frac{\lambda * E[S_1]}{N_1} < 1 \Leftrightarrow 2.05 * 0.5 < N_1, \text{ כלומר, } N_1 \geq 1.03.$$

$$\text{ולכן תנאי היציבות לרופאים הוא: } \frac{\lambda * E[S_2]}{N_2} < 1 \Leftrightarrow 2.05 * 0.75 < N_2, \text{ כלומר, } N_2 \geq 1.54.$$

--

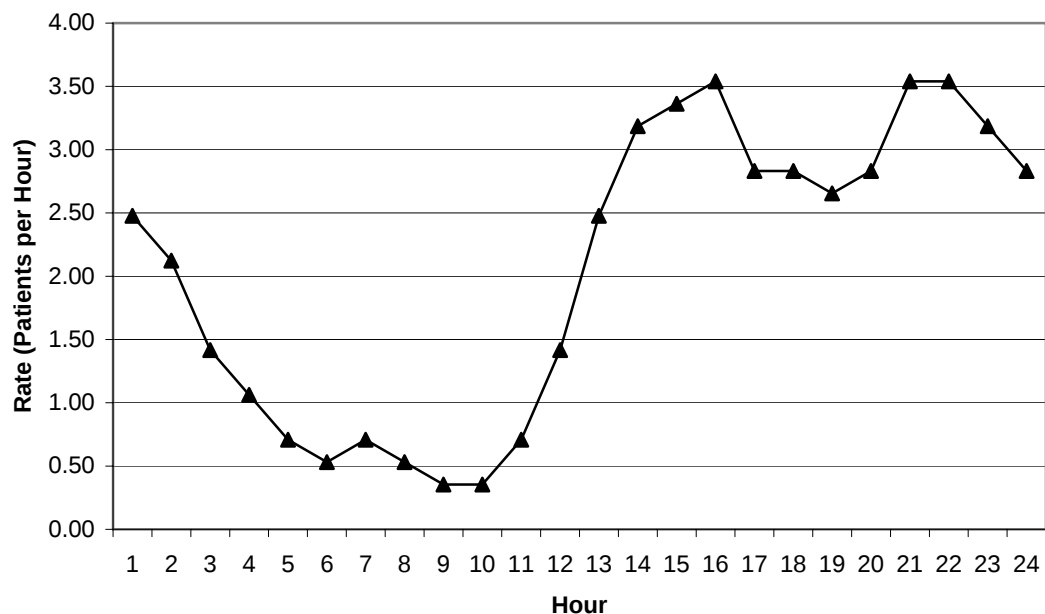
3.8 הסבירו מדוע תשובתכם לשאלה 3.7 רלוונטית גם כאשר המופע הוא משתנה בזמן אך מחזורי (לדוגמה עם מחזור של יממה).

תשובה:

התשובה נכונה גם במצב מחזורי כיוון שבמקרה זה, על פני יממה, ברור אינטיאיטבית שכל החולים שנכנסו גם יצאו, כלומר המצב יהיה יציב, אם כי זמני ההמתנה עלולים להיות מאוד ארוכים בשעות מסוימות (זה יהיה תלוי באמפליטודה של קצב המופע על פני המחזור).

הגרף הבא מתאר את קצב הגעות חולים קלים למיון, לפי שעה במהלך יום חול ממוצע:

Arrival Rate per Hour



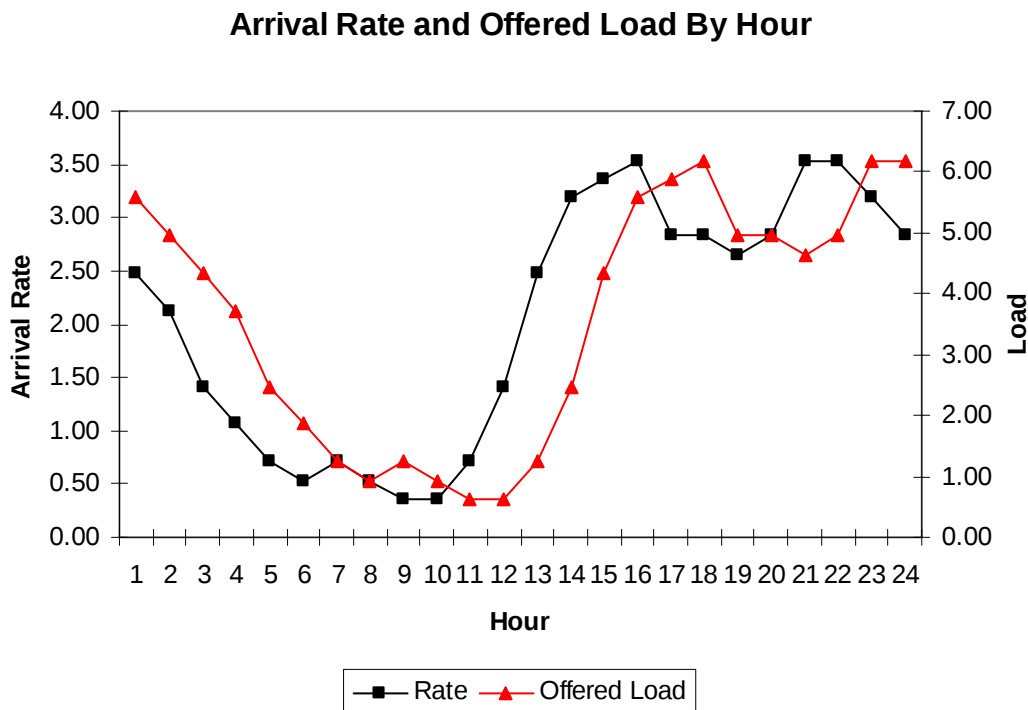
3.9 האם יתכן שתהליך ההגעות למיון הוא פואסוני הומוגני בזמן? הסבירו.

תשובה:

לא, כיוון שקצב ההגעה משתנה בזמן.

3.10 ציירו על הגרף הבא כיצד אתם מצפים שיראה הגרף של "העומס המוצע" (Offered load) במיון. הסבירו (תוך שימוש בסקלה בצד ימין) במידת הצורך.

תשובה:



הסבר: בתור יחיד העומס המוצע נתון לפי הנוסחה: $R(t) = E[\lambda(t - S_e)]E[S]$, ובקירוב

$R(t) = \lambda(t - E[S_e])E[S]$. לכן, גרף העומס המוצע אמור לעקוב אחרי גרף קצב ההגעות עם

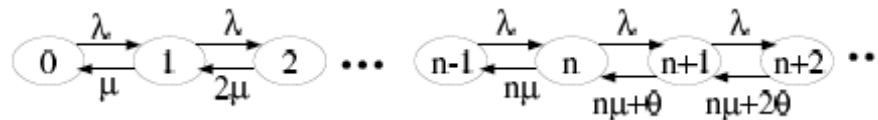
הפרש אופקי שהוא פחות או יותר תוחלת זמן שארית שרות (כולל) ולכן במקרה שלנו פחות או יותר עיכוב של 1.75 שעה (מסעיף 8). ומבחינת הערכים (ציר ה-Y) הוא צריך להיות בסדר גודל של קצב ההגעה * 1.75.

שאלה 4 – תיאוריה ושימושיה

בעמודים הבאים מופיעים דפי הרצאה ותרגול, ובהם חלקים או עובדות חסרים. בהתאם להוראות השלימו את הפרטים החסרים.

בעמוד הבא מופיעה הוכחה פורמלית שמודל Erlang-A הוא תמיד ארגודי (סטבילי). נסמן את הפרמטרים של מודל זה, כרגיל, על ידי λ, μ, θ, n . עובדת הארגודיות זו הוסברה בכיתה בצורה פחות פורמלית על ידי השוואה עם "מודל חלקיקים", דהיינו $M / M / \infty$ מתאים. 4.1.1 חזרו על ההסבר שניתן בכיתה לעובדה ש-Erlang-A תמיד ארגודי.

הסבר: נתבונן בדיאגרמות המעבר של מודל Erlang-A.



נחליף את קצבי המוות בתרשים בקצבים הבאים: $k(\mu \wedge \theta)$ לכל מצב $k, k = 0, 1, 2, \dots$. נקבל שרשרת בה קצבי המוות קטנים יותר מאשר במודל המקורי (כיוון שלכל מצב k , כך ש- $k \geq n$ מתקיים: $k \min(\mu, \theta) \leq n\mu + (k - n)\theta$, ובמצבים בהם $k < n$ מתקיים $k \min(\mu, \theta) \leq k\mu$). בשרשרת זו מספר האנשים הממוצע במערכת יהיה גדול (סטוכסטית) ממספר האנשים הממוצע במודל המקורי. כלומר, אם שרשרת זו יציבה אזי קל וחומר השרשרת המקורית יציבה. אבל השרשרת החדשה יציבה כיוון שמקבלים שעבודה זוהי דיאגרמת קצבי מעבר של מודל $M / M / \infty$, עם קצב מוות $\mu \wedge \theta$, שהוא יציב תמיד.

4.1.2 חשבו את פונקציית Granett למודל Erlang-A במקרה $\mu = \theta$. הסבירו צעדיכם. (תזכורת:

למודל $M / M / \infty$ התפלגות סטציונרית פואסונית)

תשובה:

$$\begin{aligned} P(W_q > 0) &= P(L_q(M / M / n + M) \geq n) \stackrel{\mu=\theta}{=} P(L_q(M / M / \infty) \geq n) \\ &= P(\text{Poisson}(R) \geq n) = P\left(\frac{\text{Poisson}(R) - R}{\sqrt{R}} \geq \frac{n - R}{\sqrt{R}}\right) \\ &\stackrel{R=\frac{\lambda}{\mu}}{\rightarrow} P(N(0, 1) \geq \beta) = 1 - \phi(\beta) \equiv \text{Granett function} \end{aligned}$$

QED, CLT

Erlang-A: Stability

Claim: **Erlang-A is always stable.**

Proof:

$$\begin{aligned}\pi_0^{-1} &= \sum_{j=0}^n \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \prod_{k=n+1}^j \left(\frac{\lambda}{n\mu + (k-n)\theta} \right) \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\min(\mu, \theta))^j}{j!} = e^{-\lambda/\min(\mu, \theta)}.\end{aligned}$$

(Used the inequality $n\mu + (k-n)\theta \geq k \min(\mu, \theta)$, for all $k \geq n$.)

Remark: Let d_j = death-rate in state j , $0 < j < \infty$.

Then, in fact,

$$j \cdot \min(\mu, \theta) \leq d_j \leq j \cdot \max(\mu, \theta).$$

Now observe that the bounds are death-rates of M/M/ ∞ queues, with service rates $\min(\mu, \theta)$ and $\max(\mu, \theta)$.

This implies that Erlang-A is sandwiched (stochastically) between two M/M/ ∞ queues.

$\Rightarrow$ The stationary (limiting) distribution is sandwiched (stochastically) between Poisson distributions.

Special case: $\mu = \theta \Rightarrow$ Erlang-A $\stackrel{d}{=} \text{M/M}/\infty$.
 $\Rightarrow$ Square-Root Staffing
(via Poisson $\approx$ Normal; more on that later).

4.2 בעמוד הבא מופיע דף הרצאה המסביר את כלל האיוש 1:1 שהוסבר בכיתה: "אם העומס היומי עולה ב-80 שורות בממוצע, ונותן השירות מסוגל לבצע בממוצע 80 שורות ביום, פשוט שוכרים נותן שרות נוסף".

4.2.1 באיזה מודל תורי מדובר?

תשובה:

המודל המתואר בדף ההרצאה הוא Erlang-C.

4.2.2 שתי השורות האחרונות בעמוד נמחקו. בשתי שורות אלו מופיעה ההוכחה לשורה הקודמת (האחרונה המופיעה). השלימו **בעמוד הבא** 2 שורות אלו.

4.2.3 בהמשך, הראינו בכיתה שתאור "כלל האיוש 1:1", בעצם מתייחס לתחום התפעולי ED. הסבירו מדוע.

תשובה:

בכלל האיוש 1:1 מתקיים: $n(1 - \rho_n) = 1$.

זה שקול ל- $\rho = \frac{\lambda}{\mu n} = 1 - \frac{1}{n}$.

$\Leftarrow n = \frac{\lambda}{\mu} + 1 = R + 1$ שזהו כלל איוש של תחום ה-ED!

4.2.4 כיצד ניתן לשנות את כלל ה-1:1 כדי שממוצע משך ההמתנה יתכנס **לשליש** משך שרות ממוצע?

תשובה:

אם נאייש לפי $n = R + 3$, אזי יתקיים $n(1 - \rho_n) = 3$ ו- $\rho_n \rightarrow 1$. ואז נקבל שבמערכות גדולות

מספיק $(n \rightarrow \infty)$ מתקיים: $W_q \approx \frac{1}{N} \frac{\rho_N}{1 - \rho_N} E[S] \rightarrow \frac{1}{3} E[S]$.

λ/hr	N	$\rho = \text{OCC}$	$L_q = \text{Que}$	$W_q = \text{ASA}$
72	10	90%	60	5:01
120	16	93.8%	11	5:29
400	51	98%	42	6:18
640	81	98.8%	70	6:32
1,280	161	99.4%	145	6:48
2,560	321	99.7%	299	7:00
3,600	451	99.8%	423	7:04
$\downarrow$ ∞	$\downarrow$ ∞	$\downarrow$ 1	$\downarrow$ ∞	$\downarrow$ 7:30 !

$\Rightarrow$ **Efficiency-Driven Operation** (Heavy-Traffic)

Intuition: at 100% utilization, N servers = 1 fast server

Indeed $\bar{W}_q \approx \bar{W}_q | W_q > 0 = \frac{1}{N} \cdot \frac{\rho_N}{1 - \rho_N} \cdot E(S) \rightarrow E(S) = 7:30$!

2 שורות נחקו

since
$$\rho_N = \frac{\lambda_N \times E(S)}{N} = \frac{8(N-1) \times 7.5 / 60}{N} = \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N}$$

$$N(1 - \rho_N) = 1 \quad , \quad \rho_N \rightarrow 1 .$$