



מרצה : ד"ר גלית יום-טוב

מתרגל : נועה זיכלינסקי

תאריך הבחינה : 11.2.2016

מס' סטודנט _____

הנדסת מערכות שירות – 096324

מועד א' – סמסטר חורף 2016

פתרון

- המבחן נמשך **שלוש** שעות. באחריותך להחזירו במועד.
- **המבחן בחומר סגור.**
- **מותר להשתמש במחשבון מדעי רגיל.**
- המבחן כולל **29** עמודים, כולל עמוד זה.
- **כאשר נדרשים חישובים, ניתן לעגלם באופן שאינו פוגע בהבנת התשובה.**
- מלאו את הפרטים הנדרשים בראש העמוד, בכתב ברור בבקשה.
- על התשובות יש לענות במקומות המיועדים, שאמורים להספיק: מלל מיותר יגרע ניקוד.
- יש לתת **הסברים או הוכחות רק אם** התבקשתם במפורש לעשות זאת.

שאלה 1	_____ מתוך 25 נקודות	תרגילי בית
שאלה 2	_____ מתוך 25 נקודות	בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים
שאלה 3	_____ מתוך 35 נקודות	יישום
שאלה 4	_____ מתוך 15 נקודות	תיאוריה

סה"כ _____ מתוך 100 נקודות

בהצלחה !

שאלה 1 - תרגילי בית (25 נקודות).

חלק 1 – SEESat ומודל נוזלים עם עדיפויות

למרכז שרות US Bank פונים לקוחות מכמה סוגים, ביניהם לקוחות המוגדרים Business (1) ו- Platinum (2). לקוחות Platinum נחשבים לקוחות VIP המקבלים עדיפות בנגישות לשרות. השרות עצמו, הניתן לשני סוגי הלקוחות, זהה, ואותם מוקדנים יכולים לתת שרות לשני סוגי הלקוחות. למרות זאת הוגדרו שתי קבוצות נציגי שירות נפרדים: "מוקדני Business" ו"מוקדני Platinum", שכל אחת מהן נותנת שרות לקבוצת הלקוחות שלה. הפרמטרים של המערכת נתונים ע"י:

♦ λ_1 (λ_2) - קצבי מופע לקוחות מסוג 1 (2),

♦ μ_1 (μ_2) - קצבי שירות לקוחות מסוג 1 (2),

♦ N_1 (N_2) - מספר המוקדנים בקבוצת שירות 1 (2).

מנהל השיווק החליט להשתמש בתוכנת SEESat על מנת לבחון את רמת השירות הניתנת לשני סוגי לקוחות אלו. הוא טוען שבחודש יולי 2001 רמת השירות לא היתה טובה וזאת על סמך הגרפים הבאים:

Figure 1: Average waiting time for Business and Platinum calls (July-01)

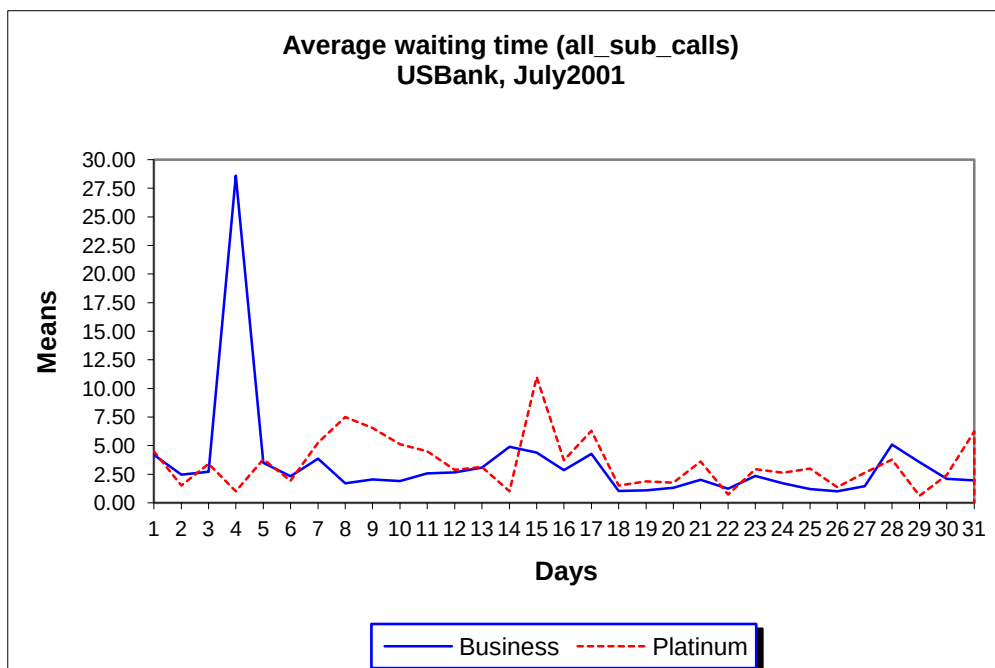
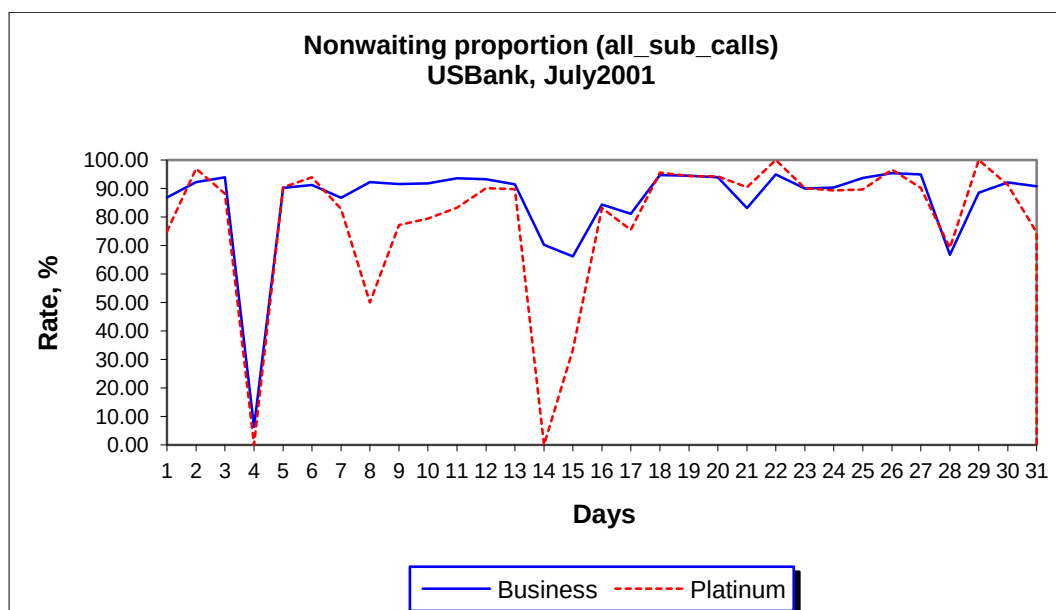


Figure 2: % immediately answered for Business and Platinum calls (July-01)



1.1.1. (2 נקודות) הסבירו את טענתו של מנהל השיווק, תוך שימוש בגרפים הנ"ל.

תשובה:

המנהל משווה בין רמות השירות של שני סוגי הלקוחות בשני היבטים: ממוצע זמן המתנה וההסתברות לקבל שירות מיידי. הוא מגלה שלקוחות ה-Business קיבלו רמת שירות טובה יותר מלקוחות ה-Platinum, כיוון שברוב הימים (ובייחוד בשבוע שבין ה-7 ל-16 ביולי) לקוחות ה-VIP מחכים יותר וגם ההסתברות שיקבלו שירות מיידי נמוכה יותר.

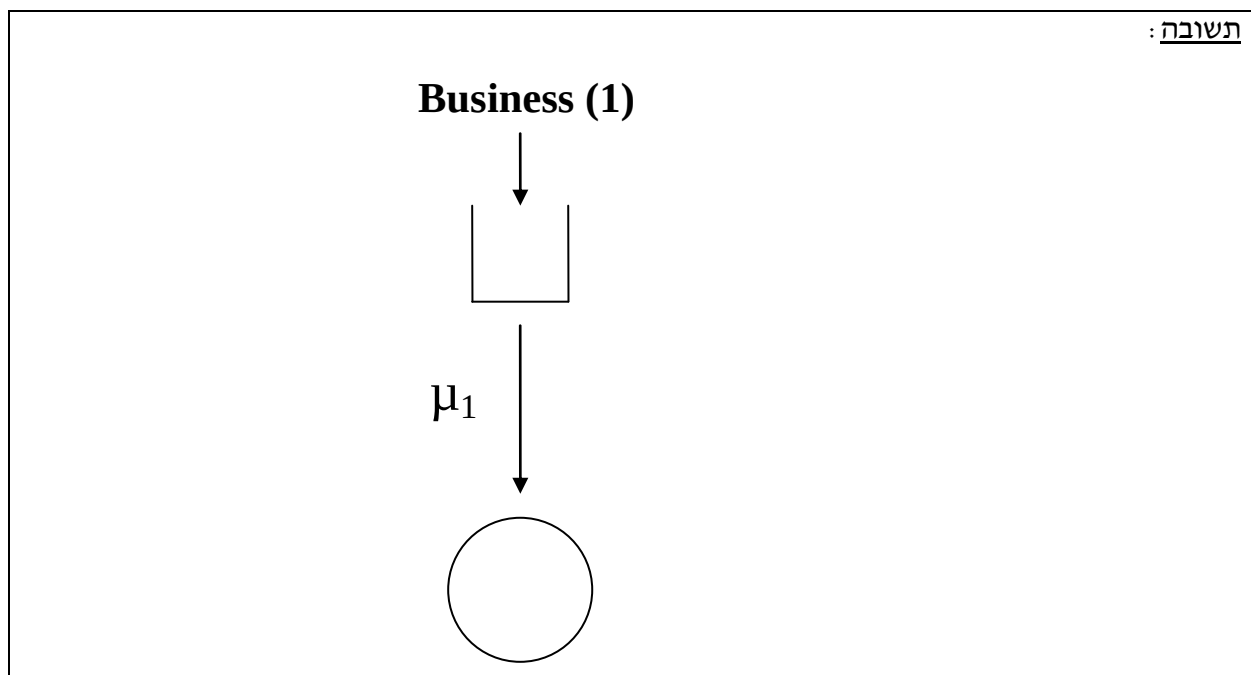
1.1.2. (2 נקודות) הציעו לפחות 2 פתרונות אפשריים לבעיה, ללא תוספת כוח אדם.

תשובה:

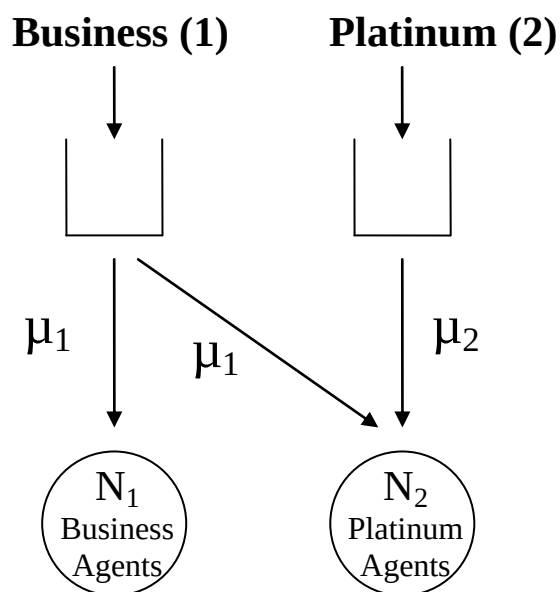
- ניתן להעביר קבוצת מוקדנים מ-Business ל-Platinum.
- ניתן לאחד את שתי קבוצות המוקדנים ולהגדיר מדיניות ניתוב שתיתן עדיפות ללקוחות ה-VIP (Platinum).
- ניתן לאפשר למוקדני ה-Business לתת שירות גם ללקוחות ה-Platinum, אם למשל יש יותר מ-X לקוחות Platinum בתור.

- כדי לשפר את רמת השירות ללקוחות Platinum, מציע מנהל השיווק להוסיף מוקדנים לקבוצת מוקדני ה-Platinum. כדי להבטיח את יעילות מוקדני ה-Platinum, הוא מציע בנוסף גם לאפשר להם לתת שירות ללקוחות ה-Business. לשם כך הוא הגדיר את מדיניות השירות הבאה:
- א. קבוצת מוקדני ה-Business נותנת שירות רק ללקוחות Business.
 - ב. קבוצת מוקדני ה-Platinum נותנת שירות לכולם, תוך מתן עדיפות ללקוחות Platinum.
 - ג. אם לקוח Business מגיע ויש מוקדנים פנויים בשתי הקבוצות, הוא יועבר למוקדני ה-Business.
 - ד. המערכת פועלת לפי מדיניות שהיא *preemptive*, ז"א ניתן בכל רגע להפסיק שירות של לקוח ולהחזירו להמתנה בתור מהסוג שלו, אבל אסור "לזרוק" לקוחות מהמערכת.
 - ה. המדיניות הינה *work conserving*, ז"א לא ייתכן מצב שבו יש שרתים פנויים ובעת ובעונה אחת יש גם לקוחות הממתינים בתור.

1.1.3. (2 נקודות) תארו את הארכיטקטורה של המערכת המוצעת בעזרת סכמה המתארת את זרימת הלקוחות במערכת, תחת ההנחה שאין נטיות. (השלימו את התרשים).



תשובה :



לצורך בניית מודל נזלים למערכת הנ"ל, נגדיר את המשתנים הבאים :

$X_1(t)$ = סה"כ מספר הלקוחות מסוג 1 במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

$X_2(t)$ = סה"כ מספר הלקוחות מסוג 2 במערכת (בשירות או בתור), בזמן $0 \leq t$.

1.1.4. (4 נקודות) כתבו משוואה דיפרנציאלית עבור $X_1(t)$ ו- $X_2(t)$, $0 \leq t$.

תשובה :

$$\begin{aligned} \frac{dX_1(t)}{dt} &= \lambda_1 - \mu_1 (X_1(t) \wedge N_1) - \mu_1 \left((X_1(t) - N_1)^+ \wedge (N_2 - X_2(t))^+ \right) = \\ &= \lambda_1 - \mu_1 (X_1(t) \wedge N_1) - \mu_1 \left(X_1(t) \wedge (N_1 + (N_2 - X_2(t))^+) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = \lambda_2 - \mu_2 (X_2(t) \wedge N_2)$$

1.1.5 (4 נקודות) תארו בקיצור כיצד ניתן, בעזרת גליון אלקטרוני בלבד, לפתור בקירוב (מדויק ככל הנדרש) את המשוואה הדיפרנציאלית מהסעיף הקודם.

תשובה:

נתחיל עם $X(0) = (X_1(0), X_2(0))$ נתון. לאחר מכן, עבור $n=1, 2, \dots$, $t_n = t_{n-1} + \Delta$ נחשב,

$$X_1(t_n) = X_1(t_{n-1}) + \lambda_1 \Delta - \mu_1 (X_1(t) \wedge N_1) \Delta - \mu_1 ((X_1(t) - N_1)^+ \wedge (N_2 - X_2(t))^+) \Delta$$

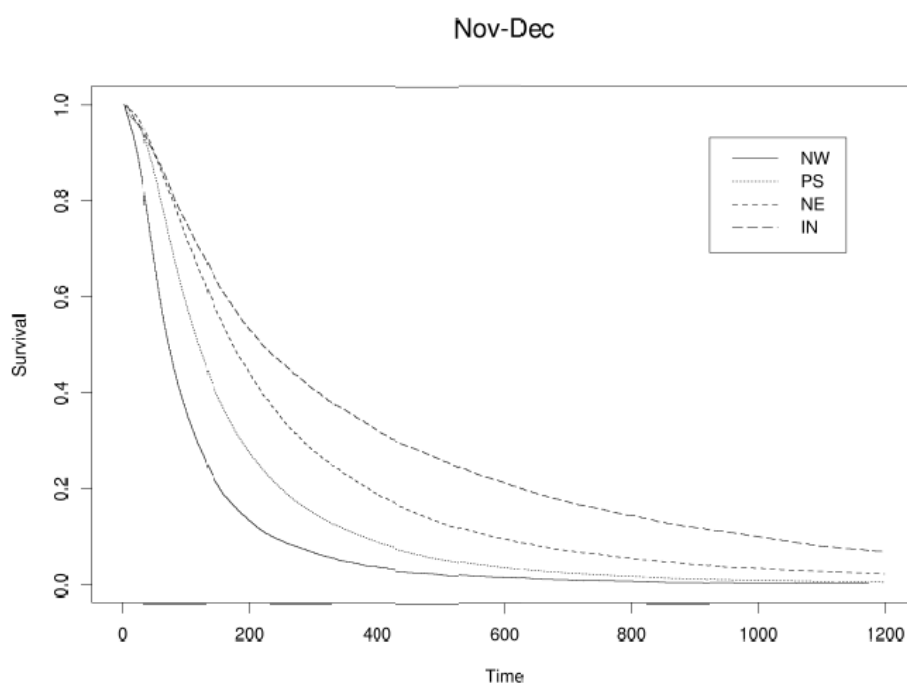
$$X_2(t_n) = X_2(t_{n-1}) + \lambda_2 \Delta - \mu_2 (X_2(t) \wedge N_2) \Delta$$

ונקבל את $X(0), X(\Delta), X(2\Delta), \dots$ ככל ש- Δ קטן יותר, כך הקירוב מדויק יותר.

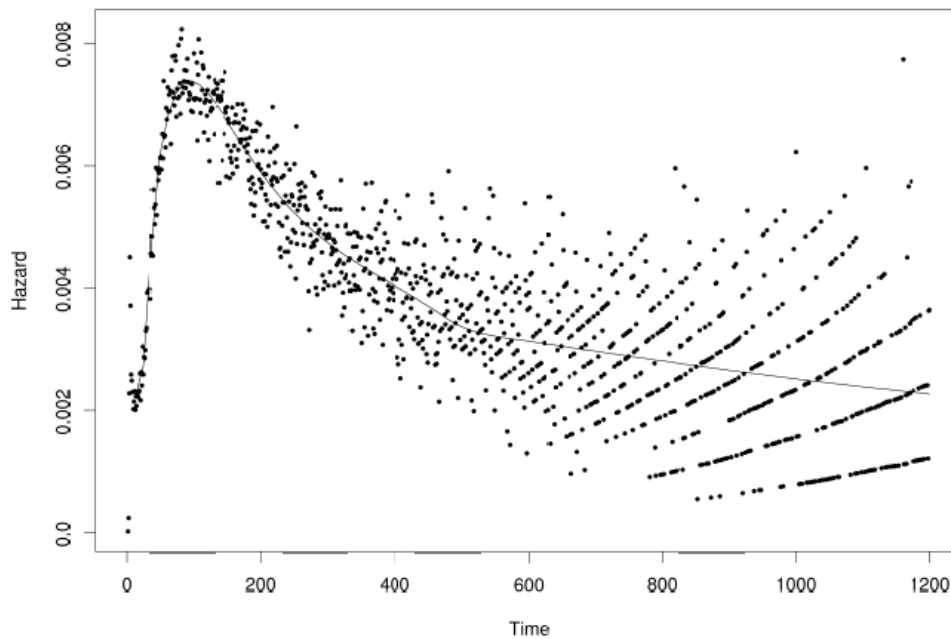
חלק 2 – פונקציות שרידות ופונקציות סיכון של זמני שירות

שני הגרפים שלהלן מבוססים על נתוני מוקד שירות טלפוני של בנק ישראלי קטן. נותחו ארבעה סוגי שירות עיקריים: NW, NE, IN, PS. גרף 1 מתאר פונקציות שרידות (survival functions) של ארבעת סוגי השירות. נקודות בגרף 2 הן אמדים לפונקצית הסיכון (hazard rate) של זמן השירות הכולל (כל סוגי השירות ביחד), ברזולוציה של שנייה אחת. הקו בגרף 2 הוא אמד לפונקצית הסיכון אחרי החלקה.

גרף 1



גרף 2



1.2.1. (3 נקודות) כיצד הייתם אומדים את תוחלת זמן השירות של סוג שירות מסוים, לו הייתה נתונה לכם רק פונקציית השרידות (survival) שלו $S(x), x \geq 0$?

תשובה:

$$\text{נשתמש בנוסחת הזנב: } E[S] = \int_0^{\infty} S(x) dx.$$

1.2.2. (3 נקודות) כיצד הייתם אומדים את תוחלת זמן השירות של סוג שירות מסוים, לו הייתה נתונה לכם רק פונקציית הסיכון (hazard rate) שלו $h(x), x \geq 0$?

תשובה:

ניתן לקבל את פונקציית השרידות מפונקציית הסיכון: $S(x) = \exp\left(-\int_0^x h(u) du\right)$ ואחר כך להשתמש בנוסחת הזנב.

1.2.3. (2 נקודות) סדרו את ארבעת סוגי השירות לפי תוחלתם (מהקצרה ביותר לארוכה ביותר)

תשובה:

$$E(NW) < E(PS) < E(NE) < E(IN)$$

1.2.4. (3 נקודות) הסבירו את הצורה של "נקודות המסודרות על קו עולה", הבולטת בחלק הימני של גרף 2.

תערה:

האמידה של פונקצית הסיכון בגרף 2 נעשתה באופן הבא:

- נסמן ב A_k את מספר התצפיות עם זמן שירות שווה ל- k שניות.
- נסמן ב η_k את מספר התצפיות עם זמן שירות שגדול או שווה מ- k שניות.
- האמדים לפונקצית הסיכון בשניה k (נקודות בגרף 2) חושבו ע"י $h(k) = A_k / \eta_k$.

תשובה:

הנקודות המסודרות על קו עולה מתאימות ל- $A_k = 1$, $A_k = 2$, ..., משום ש- η_k יורד כאשר הזמן עולה, קוים אלו עולים. (למשל הקו התחתון מתאים ל- $A_k = 1$)

שאלה 2 – בחינות קודמות/הרצאות/תרגולים (25 נקודות).

להלן דו"ח ACD של מוקד טלפוני אותו ניתחנו בכיתה (בעמודה מופיע ה-*offeredload*, המסומן ב-R).

Charlotte – Center

Time	Recvd	Answ	Abn %	ASA	AHT	Occ %	On Prod%	On Prod FTE	R
0	20,577	19,860	3.5%	30	307	95.1%	85.4%	222.7	
8:00	332	308	7.2%	27	302	87.1%	79.5%	59.3	55.70
8:30	653	615	5.8%	58	293	96.1%	81.1%	104.1	106.29
9:00	866	796	8.1%	63	308	97.1%	84.7%	140.4	148.18
9:30	1,152	1,138	1.2%	218	303	90.8%	81.6%	211.1	193.92
10:00	1,330	1,286	3.3%	22	307	98.4%	84.3%	223.1	226.84
10:30	1,364	1,338	1.9%	33	296	99.0%	84.1%	222.5	224.30
11:00	1,380	1,280	7.2%	34	306	98.2%	84.0%	222.0	234.60
11:30	1,272	1,247	2.0%	44	298	94.6%	82.8%	218.0	210.59
12:00	1,179	1,177	0.2%	1	306	91.6%	88.6%	218.3	200.43
12:30	1,174	1,160	1.2%	10	302	95.5%	93.6%	203.8	196.97
13:00	1,018	999	1.9%	9	314	95.4%	91.2%	182.9	177.58
13:30	1,061	961	9.4%	67	306	100.0%	88.9%	163.4	180.37
14:00	1,173	1,082	7.8%	78	313	99.5%	85.7%	188.9	203.97
14:30	1,212	1,179	2.7%	23	304	96.6%	86.0%	206.1	204.69
15:00	1,137	1,122	1.3%	15	320	96.9%	83.5%	205.8	202.13
15:30	1,169	1,137	2.7%	17	311	97.1%	84.6%	202.2	201.98
16:00	1,107	1,059	4.3%	46	315	99.2%	79.4%	187.1	193.73
16:30	914	892	2.4%	22	307	95.2%	81.8%	160.0	155.89
17:00	615	615	0.0%	2	328	83.0%	93.6%	135.0	112.07
17:30	420	420	0.0%	0	328	73.8%	95.4%	103.5	76.53
18:00	49	49	0.0%	14	180	84.2%	89.1%	5.8	4.90

- 2.1. (3 נקודות) נתמקד בשלושה חצאי השעות 13:30-14:00, 14:30-15:00 ו- 17:00-17:30. התאימו אל כל אחד מהם את המדיניות התפעולית המתאימה מבין: ED, QED ו-QD ונמקו בקצרה אך במדויק ככל שתוכלו.

תשובה:		
אינטרוול	מדיניות	נימוק קצר
13:30–14:00	ED	נטישות 10%, ASA בסדר גודל של זמן שרות, $\beta = \frac{N-R}{\sqrt{R}} \approx \frac{107-180}{14} = -1.25$
14:30–15:00	QED	נטישות כ- 2-3%, ASA בסדר גודל פחות מזמן שרות, $\beta \approx 0$
17:00–17:30	QD	נטישות והמתנות זניחות. $\beta \approx \frac{135-112}{\sqrt{112}} > 2$

- 2.2. (3 נקודות) עבור כל אחד מחצאי השעות מהסעיף הקודם כתוב את כלל האיוש המתאים וחשב את פרמטר רמת השירות המתאים.

תשובה:		
כללי האיוש מתאימים למערכת Erlang-A (עם נטישות)		
אינטרוול	כלל האיוש	פרמטר רמת השירות
13:30–14:00	$N = R - \gamma R, \quad 0 < \gamma < 1$	$\gamma = \frac{R-N}{R} = \frac{180.37-163.4}{180.37} = 0.094$
14:30–15:00	כלל השורש: $N = R + \beta \sqrt{R}, \quad -\infty < \beta < \infty$	$\beta = \frac{N-R}{\sqrt{R}} \approx \frac{206.1-204.69}{\sqrt{204.69}} = 0.0985$
17:00–17:30	$N = R + \delta R, \quad \delta > 0$	$\delta = \frac{N-R}{R} = \frac{135-112.07}{112.07} = 0.2$

2.3. (2 נקודות) בשורה הראשונה של דו"ח ה-ACD מסוכמים מדדי המוקד היוםיים. למשל,

♦ 20,577 מופעים ליום, או $\frac{20,577}{21} \approx 980$, ז"א כ- $\lambda = 980$ מופעים בממוצע לחצי שעה,

♦ 307 שניות משך שירות ממוצע, או כ- $E(S) = 5$ דקות,

♦ 222.7 מוקדנים בממוצע, או כ- $n = 220$ מוקדנים.

♦ 95.1% נצילות ממוצעת, או כ-95% נצילות.

בשורה ראשונה זו ישנה טעות. מהי טעות זו? הסבירו בקצרה.

רמז: כדי לאתר את הטעות שימו לב לחישוב הפשוט הבא:

$$\frac{\lambda \cdot E(S)}{n} = \frac{980 \cdot 5}{220} \approx 74\%$$

כיצד מתיישב חישוב פשוט זה עם הנתון של 95.1% נצילות יומית? הסבירו בקצרה.

תשובה:

הטעות היא: 222.7 גדול מהממוצע האמיתי, אכן 75% לא מייצג את הנצילות היומית.

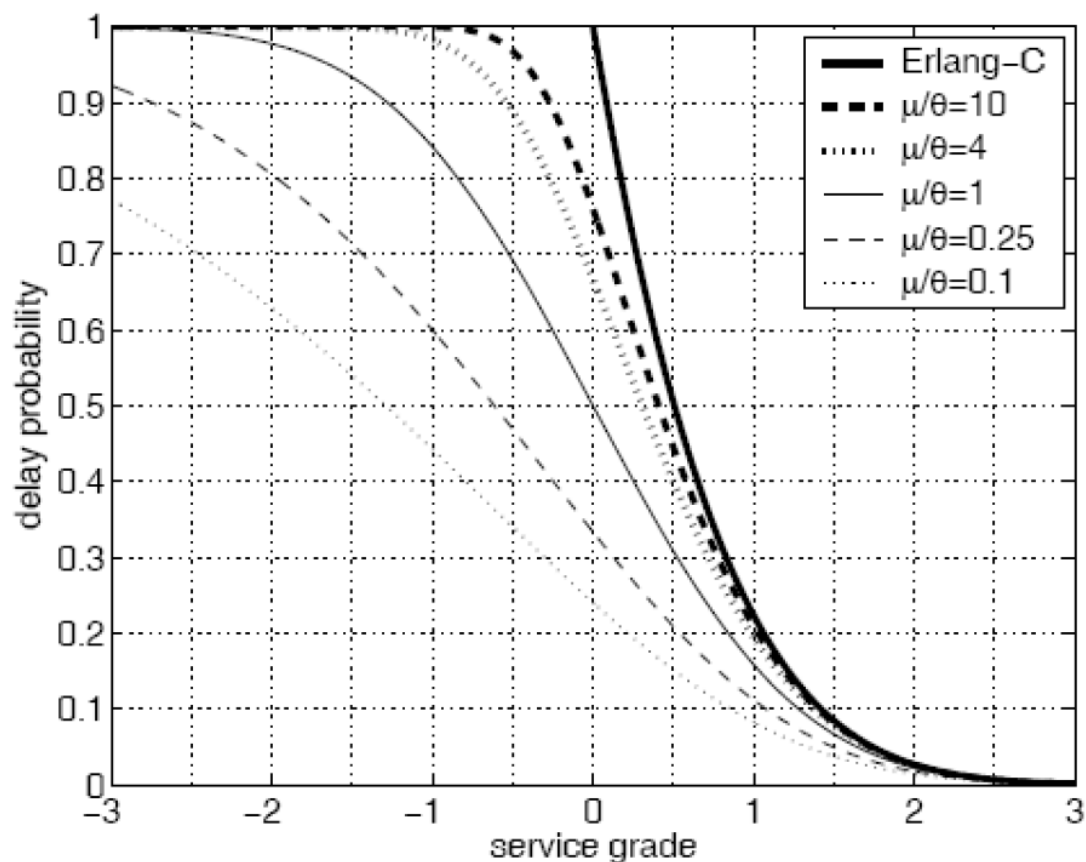
הסבר: על סמך עמודת FTE, 222.7 גדול כמעט מכל רמות האיוש של חצאי השעות, ולכן לא יכול להיות ממוצע רמת איוש יומי. (לעומת זאת, $E(S)$ יומי של 3.7 שניות אכן נראה מתאים לעמודה שמתחתיו, וכך גם הנצילות הממוצעת של 95%).

2.4. (6 נקודות) עבור כל אחת מהאינטרוולים בסעיף 2.1 נניח כי מספר המופעים היה גדל פי 4 וגם מספר המוקדנים (שרתים) היה גדל פי 4. תנו הערכתכם לאחוז הנוטשים תחת תרחיש חדש זה עבור כל אחד מהאינטרוולים. נמקו בקצרה ובמדויק ככל שתוכלו.

תשובה:

אינטרוול	% הנוטשים הנוכחי	% הנוטשים החדש	נימוק קצר
13:30–14:00	9.4%	9.4% לא משתנה	$\lambda(1-P(Ab)) = \mu N \Rightarrow P(Ab) = 1 - \frac{1}{\rho}$ לא משתנה. $\left(\rho = \frac{\lambda}{\mu N}\right)$
14:30–15:00	2.7%	1.35% לפחות קטן פי 2	במדיניות QED $P(Ab) \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$ לכן יהיה שיפור של לפחות פי $\sqrt{4} = 2$ (למרות שגם β משתנה)
17:00–17:30	0%	0%	מערכת גדולה יותר, סביר שלא תהיה גרועה יותר.

2.4. (4 נקודות) הניחו שלמוקד שירות טלפוני מגיעות 100 שיחות בדקה. ממוצע משך שיחה הוא 1.5 דקות וממוצע משך הסבלנות הוא 15 דקות. מספר המוקדנים העונים לשיחות הוא 150. בעזרת הגרף הבא, העריכו מה אחוז הלקוחות שנענים מייד מבלי להמתין בתור?



תשובה:

$\lambda = 100$ שיחות בדקה

$\mu = 2/3$ שיחות בדקה

$\theta = 1/15$ שיחות בדקה

$$\frac{\mu}{\theta} = 10, \quad R = \frac{\lambda}{\mu} = 150$$

$$\beta = \frac{R - N}{\sqrt{R}} = 0$$

מהגרף מתקבל שאחוז הלקוחות שנאלצים להמתין הוא 80% ועל כן 20% מהלקוחות מקבלים שירות מייד

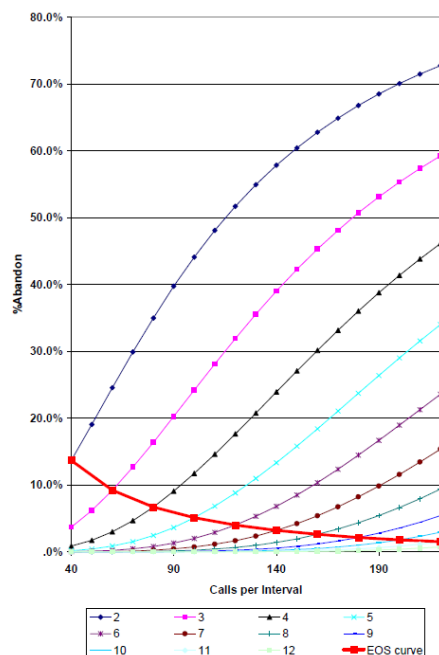
2.5. (3 נקודות) הנח כעת שסבלנות הלקוחות היא אינסופית. עבור אותה רמת שירות כמו בסעיף 2.4 (אותו ערך של β). מה יהיה כעת אחוז הלקוחות המקבלים שירות מיידי?

תשובה:

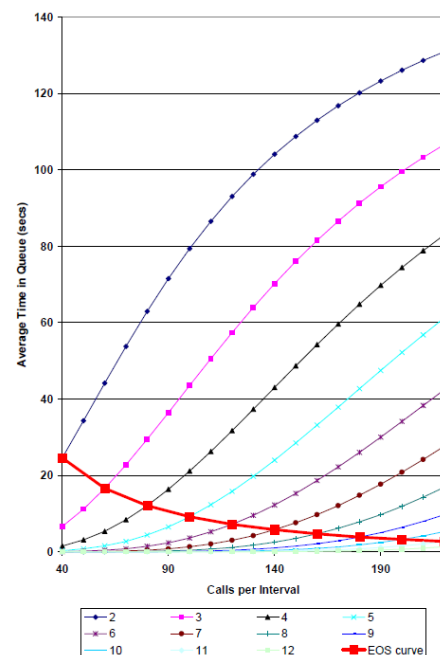
נסתכל כעת על העקומה של Erlang-C עבור $\beta = 0$ נקבל שאחוז הלקוחות המקבלים שירות מיידי קרוב מאוד לאפס.

2.6 (4 נקודות) בשיעור דנו ביתרון לגודל (Economy of Scale) במערכות שירות. הסבר בקצרה את התופעה וכיצד היא באה לידי ביטוי בגרפים. השתמש במושג "עומס מוצע".

Probability to abandon



Average wait



Example: $1/\mu = 2$ minutes, $1/\theta = 3$ minutes;
 λ varies from 40 to 230 calls per hour, in steps of 10;
 n varies from 2 to 12.

כל סדרה בתרשים תואמת מספר שונה של מוקדנים שהוצבו לטיפול בביקוש הנכנס. הערכים לכל קו מצוינים במקרא.

תשובה:

במערכות שירות גדולות עם מספר רב של שרתים קיימת תופעה שנקראת יתרון לגודל – Economies of Scale בתחומים תפעוליים מסוימים.

בגרפים לעיל רואים כי העומס המוצע פר שרת נשאר קבוע על קו ה-EOS, עם זאת ככל שהמערכת גדולה יותר ביצועי המערכת משתפרים - גם ממוצע זמן ההמתנה קטן וגם ההסתברות שלקוח ינטוש קטנה. זה נובע מכך שההסתברות למצוא שרת פנוי עולה ככל שגודל המערכת עולה, מה שמביא לעליה במדדי הביצוע מנקודת מבטו של הלקוח.

שאלה 3 – יישום (35 נקודות)

להלן קטע ממאמר שפורסם במוסף ממון של ידיעות אחרונות בנושא שינויים במבנה ובאופן הפעולה של הדייט פרי בנתב"ג. אין צורך לקרוא את הכתבה מאחר וההסברים והנתונים כלולים בגוף השאלה על סעיפי השונים.

הדייט פרי
נחשבים

10,000
קונים ביום בממוצע

20
אלף
מוצרים

1,500
מותגים

180
דולר
סך קניה ממוצעת של ישראלי

140
דולר
סך קניה ממוצעת של תייר



השקעה של יותר מ-50 מיליון שקל. הדייט פרי המחודש | צילום: יובל כץ

התורים בדייט פרי מתקצרים

מתחם הקניות בנתב"ג שופץ, נוספו דוכני יוקרה ושדרגו אזורי הקופות • בקרוב תוכלו לקנות את המוצרים בבית ולקבלם לפני הטיסה

את התורים הנפרדים לקופות מחליף תור ראשי אחד המנותח במסלולים מיוחדים. זמן ההמתנה לקופות בזמני עומס התקצר מ'20'30' דקות ל'6' דקות

רה, ולא במקרה: מכירת מוצרי היוקרה בדייט פרי נמצאת בקו עלייה. במכירת רות שאנל, למשל, נרשמת בשנה האחרונה עלייה של 10%. נראה שלמרות המבצעים שעדיין מקיים הדייט פרי, הגיעו שם למסקנה שמלחמות המחירים חסרות תכלית וכי על גקורת המכירה בדייט פרי לברל את עצמה מהנעשה בארץ באמצעות העצמת מותגי היוקרה. מי שמתעקשים לקנות בדייט פרי מותגים כמו ג'ייד, רבלון או לוריאל בגלל הפטור ממע"מ נדרשים לשטוט במבוך.

חברת היוקרה גם הקימו דוכנים ייעודיים, חלקם ראשונים מסוגם בש"ד תעופה. כך, למשל, הרמס וולגרי שמוכרת לראשונה בשדה תעופה את

רצ'דרסון. שהבטיח ומימש גם את הע' לאת מוצרי החנות לאינטרנט. בראיון ראשון מאז כניסתו לתפקיד, אותו העניק ל'ידיעות אחרונות' ביולי אתה, ביישר גלבוץ על השיפורים המסיביים בחנות הגדולה של ג'יימס רצ'דרסון. אתמול נחשפו העיתונאים לשיפורים ולשינוי מבנה החנות, שני ערכו בהשקעה של למעלה מ-50 מ' ליון שקל, חלק מהסכום בהשתתפות היבואנים.

השינויים הדramטיים ביותר היו כמב' נה מחלקת הקוסמטיקה והממתקים. די' כני התצוגה הוחזקים כוטל, ובמקומם, במעגל מסביב לחנות, מציגות חברות היוקרה את מוצריהן ב'סטודיו' - סוג של דוכנים שולחנות המאפשרים לצר'

חמת שושנה חן

רצ'דרסון לחסוך את התורים בדייט פרי בנתב"ג? תוכלי לעשות זאת אם אתם אחר מ-300 אלף חברי המ' עוזן של הדייט פרי. באוגוסט תחילת פילוט, שיאפשר לקוחות המועדון להיכנס לאתר האינטרנט של החברה, לבצע הזמנה מהבית, והמוצרים ימתינו למומינים בחנות. כל שיצטרכו המומינים להציג בהגיעם לחנות הוא כרטיס עלייה למסוף תעודת הזהו' או דרכון. 'מורבר בהישג, התהליך לא היה פשוט מול הרגליציה, אבל אנח' נו מסיימים אותו בימים אלו' אומר אורי גלבוץ, מנכ"ל דייט פרי ג'יימס

מתחם הקניות בנתב"ג משרת לקוחות היוצאים מהארץ והוא פועל 24 שעות ביממה. לקוחות המגיעים למתחם בוחרים את המוצרים שהם מעוניינים לרכוש וניגשים לקופות לביצוע התשלום. ניתן להניח כי המופעים לקופות ניתנים לתיאור כהליך פואסון הומוגני בזמן עם קצב λ לקוחות בשעה. ממוצע מספר הקונים ביממה הוא 10,000. כמו כן, ניתן להניח כי משך השירות בקופה מתפלג מעריכית עם פרמטר μ והוא בממוצע 5 דקות. בשלב זה, ניתן להניח שאין נטישות מהתור.

חלק 1. מצב קיים (12 נקודות)

במצב הקיים פועלות במתחם הקניות 44 קופות. התור לכל קופה מתנהל בנפרד, כך שלקוח המגיע בוחר תור ונשאר בו (אין מעבר בין תורים של קופות שונות).

3.1.1. **(2 נקודות)** הציעו מודל מרקובי המתאים לשירות בקופות. ציינו מהו ערכם של הפרמטרים במודל.

תשובה:

מודל מתאים הוא 44 תורים מסוג $M/M/1$, עם הפרמטרים (בשעות) הבאים:

$$\lambda = \frac{10,000}{24 \cdot 44} = 9.47 \text{ לקוחות לשעה.}$$

$$\mu = 12 \text{ לקוחות לשעה.}$$

$$N=1$$

3.1.2. **(2 נקודות)** מהי ניצולת הקופות? האם המערכת יציבה?

תשובה:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{9.47}{12} = 0.79$$

המערכת יציבה כי הניצולת לא עולה על 100%

3.1.3. (3 נקודות) רשמו ופתרו את משוואות המצב היציב המתאימות למערכת.

רמז : סכום טור הנדסי אינסופי יורד הוא :

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$$

כאשר a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה ו- q הוא מנת הסדרה

תשובה :

משוואות המצב היציב לתק"ם המתאים למערכת M/M/1 הן :

$$\begin{cases} \lambda \cdot \pi_i = \mu \cdot \pi_{i+1}, & i \geq 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \pi_0, & i \geq 1, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \end{cases}$$

ופתרון הוא :

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

$$\pi_i = \rho^i (1 - \rho), \quad i > 0$$

3.1.4. (3 נקודות) חשבו את תוחלת אורך התור לכל קופה.

תשובה :

לפי סעיף 3.1.3. נובע כי התפלגות מספר האנשים במערכת היא גאומטרית :

$$L_{\text{sys}} \sim \text{Geo}_0(1 - \rho)$$

תוחלת מספר האנשים במערכת ניתנת לחישוב לפי תוחלת התפלגות גאומטרית :

$$E(L_{\text{sys}}) = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

ועל כן :

$$E(L_q) = E(L_{\text{sys}}) - E(L_{\text{ser}}) = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{0.79^2}{0.21} = 2.97$$

3.1.5. (2 נקודות) על בסיס הסעיף הקודם, חשבו מהו משך ההמתנה הממוצע בתור לקופה? (אם לא הגעתם לתוצאה מספרית בסעיף הקודם, השתמשו בסימון $E(L_q)$ לציון ממוצע אורך התור).

תשובה:

עפ"י חוק ליטל:

$$E(W_q) = \frac{E(L_q)}{\lambda} = \frac{2.97}{9.47} = 0.3136$$

כלומר, 18.8 דקות

חלק 2. סבלנות (11 נקודות)

כעת הניחו שלעיתים חלק מהלקוחות עוזבים את התור מחשש שיאחרו לטיסה. אחוז הנוטשים הוא 25%. ניתן להניח כי הזמן עד נטישה מתפלג מעריכית עם קצב θ (בשעות). ממוצע ההמתנה הוא 15 דקות.

3.2.1. (3 נקודות) מהו ערכו של θ ומהו ממוצע הסבלנות של לקוח?

תשובה:

$$\theta = \frac{p(ab)}{E(W_q)} = \frac{0.25}{15/60} = 1$$

ממוצע הסבלנות של לקוח הוא שעה אחת.

3.2.2. (4 נקודות) מהו המודל המרקובי המתאים כעת לשירות בקופות? ציינו מהו ערכם של הפרמטרים במודל.

תשובה:

מודל מתאים הוא 44 תורים מסוג $M/M/1+M$, עם הפרמטרים (בשעות) הבאים:

$$\lambda = 9.47$$

$$\mu = 12$$

$$N = 1$$

$$\theta = 1$$

3.2.3. (4 נקודות) מהו העומס המוצע (Offered load) עבור הקופות ומהי ניצולתן כעת?

תשובה:

העומס המוצע:

$$R = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{9.47}{12} = 0.79 \text{ הוא עדיין העומס המוצע לא השתנה.}$$

הניצולת:

ניצולת הקופות ירדה, שכן חלק מהלקוחות נוטשים ולא מקבלים שירות מהקופה. הניצולת החדשה היא

$$\rho = \frac{\lambda(1-p(ab))}{\mu} = \frac{9.47 \cdot 0.75}{12} = 0.59$$

חלק 3. מצב חדש (12 נקודות)

בשיפוץ מתחם הקניות המתוכנן אזור הקופות ישתנה כך שיהיה תור ראשי אחד לכל הקופות. לקוח שעומד בראש התור ינותב לקופה הראשונה שתתפנה. כמו כן, מספר הקופות יגדל ל-59. שינוי נוסף שמתוכנן הוא העלאת אתר אינטרנט שבו תתאפשר רכישת מוצרים טרם ההגעה לשדה התעופה ואיסופם בנתב"ג טרם הטיסה היוצאת או לאחר החזרה ארצה. עפ"י הערכת המנהלים, בשלב ראשון כ-12% מהקונים ישתמשו בשירות זה, ועל כן לא יצטרכו לשלם בקופות.

3.3.1 (2 נקודות) מהו המודל המרקובי המתאים כעת לשירות בקופות? ציינו מהו ערכם של הפרמטרים במודל. הניחו כי משך השירות והסבלנות הממוצעת לא ישתנו במצב החדש.

תשובה:

המודל כעת הוא Erlang-A, $M/M/N+M$. הפרמטרים (בשעות) הם:

$$\lambda = \frac{10,000 \cdot 0.88}{24} = 366.67$$

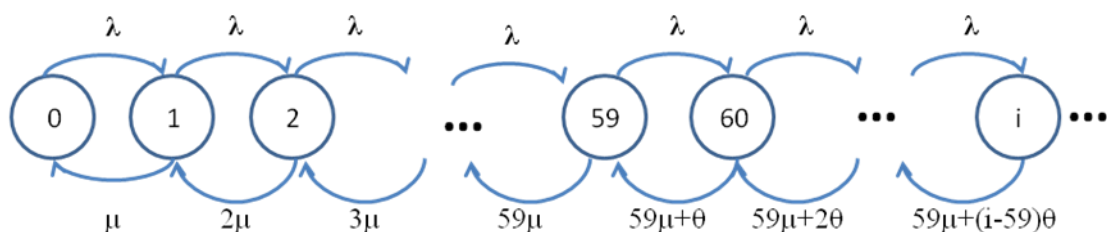
$$\mu = 12$$

$$N = 59$$

$$\theta = 1$$

3.3.2 (2 נקודות) ציירו את דיאגרמת קצבי המעבר עבור המודל המרקובי המתאים. פרטו את קצבי המעבר.

תשובה :



3.3.3 (3 נקודות) כתבו את משוואות המצב היציב המתאימות. אין צורך לפתור אותן.

תשובה :

$$\begin{cases} \lambda \cdot \pi_i = (i+1) \cdot \mu \cdot \pi_{i+1}, & i = 0, 1, \dots, 58, \\ \lambda \cdot \pi_i = (59\mu + (i-58)\theta) \cdot \pi_{i+1}, & i \geq 59, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \end{cases}$$

3.3.4 (2 נקודות) בטאו בעזרת π_i את ההסתברות לכך שלקוח אשר מגיע יאלץ להמתין בתור. נמקו את

תשובתכם.

תשובה :

$$\sum_{i=59}^{\infty} \pi_i = 1 - \sum_{i=0}^{58} \pi_i$$

הסבר :

התשובה מסתמכת על תכונת PASTA של המודל המרקובי. על פיה ההסתברות שלקוחות לקוחות המגיעים למערכת לפי תהליך פואסון (כמו במקרה שלנו) "רואים" את המערכת כפי שהיא, ולכן ההסתברות שלקוח יגיע וימצא את המערכת עם 59 לקוחות או יותר, היא ההסתברות שהמערכת אכן נמצאת במצב זה (בטווח הארוך), שזה מה שמחושב נוסחה שלעיל.

3.3.5 (3 נקודות) בועז הוא סטודנט להנדסת תעשייה וניהול בטכניון העובד במשרה חלקית בנתבי"ג. מנהל החנות ביקש מבועז שיבדוק אם 59 הקופות המתוכננות אכן נחוצות לעמידה ביעדי השירות שהגדירה ההנהלה. היעד שהגדירה ההנהלה הוא שלכל היותר 35% מהלקוחות יאלצו להמתין בתור לשירות, ולא יהיו לקוחות שינטשו אחרי יותר מדקה אחת של המתנה. בועז הפיק את הפלטים הבאים ממערכת 4CC. כמה קופות נדרשות כדי לעמוד ביעדי ההנהלה?

פלט 1:

The Advanced Profiling tool allows you to enter multiple values for each of the input parameters, and produces a performance profile for each combination of parameters.

Compute Add to Table Delete Rows Clear All Export Import Graph Settings

Input Multi-Value	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Agents Occupancy	%Answer	%Abandon	Average Speed of Answer	Average Time in Queue	%Answer within Target	%Abandon within Target	Average Queue Length
Results														
1	60.0	00:00.0	27.0				99.9%	88.2%	11.8%	07:26.0	07:04.2	.6%	.0%	43.2
2	60.0	00:00.0	29.0				99.0%	93.9%	6.1%	03:44.7	03:41.3	7.3%	.0%	22.6
3	60.0	00:00.0	31.0				96.0%	97.3%	2.7%	01:37.0	01:37.3	26.0%	.0%	9.9
4	60.0	00:00.0	33.0				91.6%	98.9%	1.1%	00:40.9	00:41.2	49.0%	.0%	4.2
5	60.0	00:00.0	35.0				87.0%	99.5%	.5%	00:17.5	00:17.7	68.3%	.0%	1.8
6	60.0	00:00.0	37.0				82.5%	99.8%	.2%	00:07.5	00:07.6	81.8%	.0%	.8
7	60.0	00:00.0	39.0				78.3%	99.9%	.1%	00:03.2	00:03.2	90.3%	.0%	.3
8	60.0	00:00.0	41.0				74.6%	100%	.0%	00:01.3	00:01.3	95.2%	.0%	.1
9	60.0	00:00.0	43.0				71.1%	100%	.0%	00:00.5	00:00.5	97.8%	.0%	.1
10	60.0	00:00.0	45.0				68.0%	100%	.0%	00:00.2	00:00.2	99.1%	.0%	.0
11	60.0	00:00.0	47.0				65.1%	100%	.0%	00:00.1	00:00.1	99.6%	.0%	.0
12	60.0	00:00.0	49.0				62.4%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	99.9%	.0%	.0
13	60.0	00:00.0	51.0				60.0%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
14	60.0	00:00.0	53.0				57.7%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
15	60.0	00:00.0	55.0				55.6%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
16	60.0	00:00.0	57.0				53.7%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
17	60.0	00:00.0	59.0				51.8%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
18														
19														
20														

Settings Parameters Indicators

פלט 2:

The Advanced Profiling tool allows you to enter multiple values for each of the input parameters, and produces a performance profile for each combination of parameters.

Compute Add to Table Delete Rows Clear All Export Import Graph Settings

Input Multi-Value	Basic Interval (minutes)	Target Time to Answer	Number of Agents	Average Handling Time	Calls per Interval	Average Patience	Agents Occupancy	%Answer	%Abandon	Average Speed of Answer	Average Time in Queue	%Answer within Target	%Abandon within Target	Average Queue Length
Results														
1	60.0	01:00.0	27.0				99.9%	88.2%	11.8%	07:26.0	07:04.2	1.9%	1.6%	43.2
2	60.0	01:00.0	29.0				99.0%	93.9%	6.1%	03:44.7	03:41.3	16.7%	1.5%	22.6
3	60.0	01:00.0	31.0				96.0%	97.3%	2.7%	01:37.0	01:37.3	47.3%	1.0%	9.9
4	60.0	01:00.0	33.0				91.6%	98.9%	1.1%	00:40.9	00:41.2	73.6%	.6%	4.2
5	60.0	01:00.0	35.0				87.0%	99.5%	.5%	00:17.5	00:17.7	88.5%	.3%	1.8
6	60.0	01:00.0	37.0				82.5%	99.8%	.2%	00:07.5	00:07.6	95.4%	.2%	.8
7	60.0	01:00.0	39.0				78.3%	99.9%	.1%	00:03.2	00:03.2	98.3%	.1%	.3
8	60.0	01:00.0	41.0				74.6%	100%	.0%	00:01.3	00:01.3	99.4%	.0%	.1
9	60.0	01:00.0	43.0				71.1%	100%	.0%	00:00.5	00:00.5	99.8%	.0%	.1
10	60.0	01:00.0	45.0				68.0%	100%	.0%	00:00.2	00:00.2	99.9%	.0%	.0
11	60.0	01:00.0	47.0				65.1%	100%	.0%	00:00.1	00:00.1	100%	.0%	.0
12	60.0	01:00.0	49.0				62.4%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
13	60.0	01:00.0	51.0				60.0%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
14	60.0	01:00.0	53.0				57.7%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
15	60.0	01:00.0	55.0				55.6%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
16	60.0	01:00.0	57.0				53.7%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
17	60.0	01:00.0	59.0				51.8%	100%	.0%	00:00.0	00:00.0	100%	.0%	.0
18														
19														
20														

Settings Parameters Indicators

תשובה :

לפי הפלט הראשון, דרושות לפחות 35 קופות כדי שאחוז הממתינים לא יעלה על 35%.
לפי הפלט השני דרושות לפחות 37 קופות כדי שאחוז הנוטשים אחרי יותר מדקה אחת לא יעלה על 0% :

$$P(W_q > 1, Ab) = P(Ab) - P(Ab. \text{ within Target})$$

על כן, מספיקות 37 קופות במצב החדש כדי לעמוד ביעדי השירות של החברה.

שאלה 4 תיאוריה (15 נקודות)

4.1. (5 נקודות) מודל M/U/1 מסמן מערכת תור כאשר :

- מופעים ע"פ תהליך פואסון עם קצב λ .

- משכי שירות מפולגים Uniform [0,b].

- שרת יחיד.

השוו את תוחלת זמן ההמתנה בתור זה לתוחלת זמן ההמתנה בתור שבו משכי השירות מפולגים

אקספוננציאלית עם ממוצע $b/2$ ולתור שבו משכי השירות קבועים וערכם $b/2$.

באיזה תור תוחלת זמן ההמתנה היא הארוכה ביותר? באיזה תור תוחלת זמן ההמתנה היא הקצרה ביותר?
פרטו את חישוביכם.

רמז :

1. עבור $X \sim \text{Uni}[0, b]$: $E[X] = \frac{b}{2}$, $\text{Var}(X) = \frac{b^2}{12}$.

2. נוסחת Khintchine-Pollaczek לתור M/G/1 :

$$E(W_q) = E(S) \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot \frac{1 + C^2(S)}{2}.$$

3. $C^2(S) = \frac{\text{var}(S)}{E^2(S)}$.

תשובה:

למעשה אנו מסתכלים על שלושה תורים: $M/D/1$ ו- $M/M/1$, $M/U/1$.
כל הפרמטרים בנוסחת Khintchine-Pollaczek לתוחלת זמן ההמתנה בשלושת התורים הנ"ל זהים, פרט ל- $C^2(S)$.

$$\left(E[S] = \frac{b}{2}, \quad \rho = \lambda E[S] = \lambda \frac{b}{2} \right)$$

נחשב את $C^2(S)$ ואת תוחלת זמן ההמתנה בכל אחד מהתורים הנ"ל:

$$E[W_q] = E[S] \frac{\rho}{1-\rho} \frac{2}{3} \Leftrightarrow C^2(S) = \frac{Var(S)}{E(S)^2} = \frac{b^2/12}{b^2/4} = \frac{1}{3} : M/U/1$$

$$E[W_q] = E[S] \frac{\rho}{1-\rho} \cdot 1 \Leftrightarrow C^2(S) = \frac{Var(S)}{E(S)^2} = \frac{1/\mu^2}{(1/\mu)^2} = 1 : M/M/1$$

$$E[W_q] = E[S] \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{2} \Leftrightarrow C^2(S) = \frac{Var(S)}{E(S)^2} = 0 : M/D/1$$

מסקנה: בתור $M/D/1$ תוחלת זמן ההמתנה היא הקצרה ביותר. בתור $M/M/1$ תוחלת זמן ההמתנה היא הארוכה ביותר, והסדר נקבע ע"פ "כמות האקראיות" במשך השירות.

4.2. (2 נקודות) נניח כעת מודל $M/U/1$ כאשר משכי השירות מפולגים אחיד על $[0, b]$. כמו כן נניח כי, עבור כל לקוח שמגיע למערכת, אנו יודעים האם משך השירות שלו קטן מ- $b/2$ או גדול מ- $b/2$. מהי מדיניות העדיפות האופטימאלית (כלומר לאיזה סוג של לקוחות תינתן עדיפות בכניסה לשירות). הסבירו את תשובתכם.

תשובה:

ע"פ כלל ה- $c\mu$ שנלמד בכיתה, ניתן עדיפות ללקוחות בעלי משכי השירות הקצרים יותר, כלומר ללקוחות שאנו יודעים שמשך השירות שלהם יהיה קטן מ- $b/2$. מדיניות זו תמזער את משך ההמתנה הכולל במערכת.

4.3. (5 נקודות) בהמשך לסעיף הקודם, נניח בנוסף מדיניות Preemptive. השוו את תוחלת זמן ההמתנה של הלקוחות בעלי העדיפות הגבוהה (על סמך תשובתכם לסעיף הקודם) לתוחלת זמן ההמתנה של לקוחות אלו בתור ללא עדיפויות. נוסחאות בנושא מופיעות בסוף השאלה.

תשובה:

בתור M/U/1 ללא עדיפויות:

$$E[W_q] = E[S] \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1+C^2(S)}{2} = E[S] \frac{\rho}{1-\rho} \frac{2}{3} = \frac{\rho}{1-\rho} \frac{b}{3}$$

העדיפות הגבוהה רואה תור M/U/1 עם הפרמטרים הבאים:

- משך השירות מפולג $Uni[0, \frac{b}{2}]$.

- מופע פואסוני בקצב $\frac{\lambda}{2}$.

תחת מדיניות Preemptive, עבור העדיפות הגבוהה:

$$E(R_1) = \rho_1 E[S_1] \frac{1+C^2(S_1)}{2}$$

$$E[S_1] = \frac{b}{4}, \quad Var(S_1) = \frac{b^2}{48}, \quad C^2(S) = \frac{1}{3}, \quad \rho_1 = \lambda_1 E[S_1] = \frac{\lambda}{2} \frac{b}{4} = \frac{\lambda b}{8} = \frac{\rho}{4}$$

$$\Rightarrow E(R_1) = \rho b \frac{1}{24}$$

$$E[W_{q_1}] = \frac{E(R_1)}{1-\rho_1} = \frac{\rho}{1-\frac{\rho}{4}} \frac{b}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{E[W_{q_without_priority}]}{E[W_{q_1}]} = \frac{1-\frac{\rho}{4}}{1-\rho} 8$$

4.4. (3 נקודות) נניח כי היינו יודעים את משכי השירות המדויקים ומשתמשים במידע זה על מנת לקבוע את העדיפויות. ברור כי ידיעה זו הייתה מאפשרת להביא לשיפור תוחלת זמן ההמתנה הכללי. נניח שהיינו רוצים לחשב את השיפור הנ"ל, כלומר, לחשב את היתרון (מהיבט משך המתנה ממוצע) שבידיעת זמני השירות המדויקים. הציעו דרך לחשב יתרון זה (אין צורך לבצע את החישוב!).

תארנו חלוקת $[0, b]$ ל- $(\frac{b}{2}, b]$, $[0, \frac{b}{2}]$, אינטרוולים באורך $\frac{1}{2}$. באותו אופן ניתן לחלק

לאינטרוולים באורך $\frac{1}{4}$: $(\frac{3}{4}b, b]$, $(\frac{b}{2}, \frac{3}{4}b]$, $(\frac{b}{4}, \frac{b}{2}]$, $[0, \frac{b}{4}]$, ולנתח מערכת זו כמערכת עם 4

סוגי לקוחות, עדיפויות תינתנה מהשרות הקצר (אינטרוול $[0, \frac{b}{4}]$) עד לארוך.

כך נמשיך עם אינטרוולים באורך $\frac{1}{2^n}$: $(\frac{b+1}{2^n}, \frac{b+2}{2^n}]$, $(\frac{b}{2^n}, \frac{b+1}{2^n}]$, $[0, \frac{b}{2^n}]$, עבור $n = 1, 2, 3, \dots$

הגבול יזהה עבורנו את הטוב ביותר שניתן להגיד ע"י ידע מדויק של משך השירות (אפשר להשתמש בכל חלוקה אחרת לאינטרוולים, כל עוד שאורך המקסימאלי מהם מתכנס ל-0).

M/G/1 with priorities

Steady state $\Leftrightarrow \rho \triangleq \rho_1 + \dots + \rho_K < 1$, where $\rho_k = \lambda_k m_k$.

Convenient notation: $\bar{\rho}_k = \rho_1 + \dots + \rho_k$, $1 \leq k \leq K$.

$$\bar{\rho}_0 \equiv 0$$

Note: ρ_k = fraction of time allocated by server to class k .

$1 - \rho$ = idleness/availability.

- $E(W_q^k)$ - expected waiting time of class k customer.
- $E(L_q^k)$ - expected number of waiting class k customers.
- $E(R)$ - expected residual service time.

Non- Preemptive Regime

$$1. \quad E(W_q^1) =$$

$$E(R) + m_1 E(L_q^1) = E(R) + m_1 \lambda_1 E(W_q^1) = E(R) + \rho_1 E(W_q^1)$$

$$\Rightarrow E(W_q^1) = \frac{E(R)}{(1 - \rho_1)}, \text{ as before } (K = 1).$$

$$2. \quad E(W_q^2) = E(R) + \underbrace{m_1 E(L_q^1) + m_2 E(L_q^2)}_{\text{wait due to class 1 \& 2 in queue}} + \underbrace{m_1 \lambda_1 E(W_q^2)}_{\text{wait due to class 1, arriving during wait of 2.}}$$

$$\Rightarrow E(W_q^2) = E(R) + \rho_1 E(W_q^1) + \rho_2 E(W_q^2) + \rho_1 E(W_q^2)$$

$$\Rightarrow E(W_q^2) = [E(R) + \rho_1 E(W_q^1)] / (1 - \rho_1 - \rho_2) =$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(W_q^2) &= \frac{E(R)}{[(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)]} \\ \uparrow \\ &\text{substitute } E(W_q^1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k. \quad EW_q^k &= ER + m_1 \cdot EL_q^1 + \dots + m_k \cdot EL_q^k + \lambda_1 m_1 EW_q^k + \dots + \lambda_{k-1} m_{k-1} EW_q^k \\
\Rightarrow &= ER + \rho_1 EW_q^1 + \dots + \rho_{k-1} EW_q^{k-1} + (\rho_1 + \dots + \rho_k) EW_q^k
\end{aligned}$$

$$E(W_q^k) = \frac{E(R) + \rho_1 E(W_q^1) + \dots + \rho_{k-1} E(W_q^{k-1})}{(1 - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho_k)} = \frac{E(R)}{(1 - \bar{\rho}_{k-1})(1 - \bar{\rho}_k)}$$

Where

$$\begin{aligned}
E(R) &= (1 - \rho) \cdot 0 + \sum_{j=1}^K \rho_j \cdot m_j \cdot \frac{1 + C_j^2(S)}{2} = \\
&= \sum_{j=1}^K \lambda_j m_j^2 \cdot \frac{E(S_j^2)}{2m_j^2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \lambda_j E(S_j^2)
\end{aligned}$$

Preemptive Regime

$$\begin{aligned}
E(W_q^k) &= \frac{E(R^k)}{1 - (\rho_1 + \dots + \rho_k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j m_j [E(W_q^k) + m_k] \\
&= \frac{E(R^k)}{1 - \bar{\rho}_k} + \bar{\rho}_{k-1} [E(W_q^k) + m_k] \\
E(W_q^k) &= \frac{E(R^k)}{(1 - \bar{\rho}_k)(1 - \bar{\rho}_{k-1})} + \frac{\bar{\rho}_{k-1}}{1 - \bar{\rho}_{k-1}} m_k
\end{aligned}$$

$$\text{where } E(R^k) = \sum_{j=1}^k \rho_j \cdot m_j \cdot \frac{1 + C_j^2(S_j)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \lambda_j E(S_j^2)$$

Table 1: Discrete and Continuous Distributions

Distribution	Notation	Probability Function	Parameters	Support	Moment Gen. Function	Expectation	Variance	Comments
Binomial	$N \sim \text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; n \geq 1$	$k = 0, 1, \dots, n$	$[p \cdot e^t + q]^n$	np	npq	
Multi-nomial	$X \sim \text{Mult}(n, p)$	$p(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$ $x = (x_1, \dots, x_k)$	$0 \leq p_i; \sum_{i=1}^k p_i = 1; n \geq 1$ $p = (p_1, \dots, p_k)$	$0 \leq x_i; \sum_{i=1}^k x_i = n$		$E(X_i) = np_i$ $i = 1, \dots, k$	$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$ $(i \neq j)$	$X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$
Negative Binomial	$X \sim NB(m, p)$	$p(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$	$0 \leq p = 1 - q \leq 1; m \geq 1$	$k = m, m+1, \dots$	$\left[\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t} \right]^m$	$\frac{mp}{p}$	$\frac{mq}{p^2}$	Number of trials till m -th success
Geometric	$X \sim G(p)$	$p(k) = q^{k-1} \cdot p$	$0 \leq p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$	$\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X \sim NB(1, p)$
Poisson	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$\lambda \geq 0$	$k = 0, 1, \dots$	$\exp\{-\lambda(1 - e^t)\}$	λ	λ	
Hyper-geometric	$X \sim HG(N, M, n)$	$p(k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$	$N, M > 0;$ $1 \leq n \leq N + M$	$\max(0, n - M) \leq k$ $k \leq \min(n, N)$	$\sum_k e^{tk} p(k)$	$\frac{n \cdot N}{N+M}$	$n \cdot \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{N+M} \cdot \frac{N}{N+M-1}$	N – special elements M – ordinary ones n – sample size k – special in sample
		Density Function						
Beta	$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$	$f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	$0 \leq t \leq 1$	Complicated	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$\alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Uniform}$
Gamma	$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha, \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-\alpha}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ $= (x-1)\Gamma(x-1)$
Erlang	$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$	$n = 1, 2, \dots; \lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
Exponential	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$\lambda > 0$	$t \geq 0$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim \text{Gamma}(1, \lambda)$
Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$	$-\infty < \mu < \infty; \sigma > 0$	$-\infty < t < \infty$	$\exp \left\{ t\mu + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2 \right\}$	μ	σ^2	